

Şimdi de şekil değiştirme matrisinin de bir tensör olduğunu gösterelim. ~~Şimdi~~ Hatırlatalım ki, eğer u_1, u_2 ve u_3 -ler $\vec{u}$ yer değiştirme vektörünün $Ox_1x_2x_3$ koordinat takımındaki birleşenleri ise, onda, bir önceki dersde gösterilen (Şekil 1) $Ox_1'x_2'x_3'$ koordinat takımındaki birleşenlerini de u_1', u_2' ve u_3' -lerle işaretlederiz. Bu işaretlemeler gereğince, şekil değiştirme matrisinde alt xx, xy, xz, yy ve zz indekslerini sırası ile 11, 12, 13, 22 ve 33'lerle yer değiştirmişsek, $Ox_1x_2x_3$ koordinat takımında şekil değiştirme matrisi birleşenlerini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\ \epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (1)$$

Aynı kaidelerle, $Ox_1'x_2'x_3'$ koordinat takımındaki şekil değiştirme matrisinin ϵ' componentlerini de aşağıdaki biçimde yazarız:

$$\begin{aligned} \epsilon'_{11} &= \frac{\partial u_1'}{\partial x_1'}, \quad \epsilon'_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_2'} + \frac{\partial u_2'}{\partial x_1'} \right), \quad \epsilon'_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_3'} + \frac{\partial u_3'}{\partial x_1'} \right), \\ \epsilon'_{22} &= \frac{\partial u_2'}{\partial x_2'}, \quad \epsilon'_{33} = \frac{\partial u_3'}{\partial x_3'}. \end{aligned} \quad (2)$$

~~Şimdi~~ Şimdi ϵ'_{ij} ve ϵ_{ij} -ler arasındaki ilişkileri elde edelim.

Hatırlatalım ki, u_i ve u_i' ($i=1,2,3$) ler arasında, bir önceki dersde gösterdiğimiz

$$u_k' = \alpha_{k1} u_1 + \alpha_{k2} u_2 + \alpha_{k3} u_3, \quad (3)$$

$$\text{ve} \quad u_k = \alpha_{1k} u_1' + \alpha_{2k} u_2' + \alpha_{3k} u_3'$$

(2) ilişkileri vardır. U_i' -lerin (3)'deki ifadelerini (2)'de yerine yazarak ε_{ij}' -lerin ε_{ij}^2 -lerle ifadesini elde etmeye çalışalım.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ii}' &= \frac{\partial U_i'}{\partial x_i'} = \frac{\partial}{\partial x_i'} (d_{i1} U_1 + d_{i2} U_2 + d_{i3} U_3) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i'} (d_{i1} U_1 + d_{i2} U_2 + d_{i3} U_3) \frac{\partial x_1}{\partial x_i'} + \frac{\partial}{\partial x_i'} (d_{i1} U_1 + d_{i2} U_2 + \\ & d_{i3} U_3) \frac{\partial x_2}{\partial x_i'} + \frac{\partial}{\partial x_i'} (d_{i1} U_1 + d_{i2} U_2 + d_{i3} U_3) \frac{\partial x_3}{\partial x_i'} \quad (4)\end{aligned}$$

ifadesinin kolaylıkla (2) ve (3)'de yazılabileceğini. Eğer, x_1, x_2, x_3 'leri' ve $\vec{r}$ konum vektörünün $Ox_1x_2x_3$ koordinat takımındaki bileşenleri ~~olarak~~ olduğunu hatırlarsak, x_1', x_2' ve x_3' -lerinde aynı $\vec{r}$ vektörünün $Ox_1'x_2'x_3'$ koordinat takımındaki bileşenleri olduğunu hatırlarsak onda

$$\begin{aligned}x_1 &= d_{11} x_1' + d_{12} x_2' + d_{13} x_3', & x_1' &= d_{11} x_1 + d_{12} x_2 + d_{13} x_3 \\ x_2 &= d_{21} x_1' + d_{22} x_2' + d_{23} x_3', & x_2' &= d_{21} x_1 + d_{22} x_2 + d_{23} x_3 \\ x_3 &= d_{31} x_1' + d_{32} x_2' + d_{33} x_3', & x_3' &= d_{31} x_1 + d_{32} x_2 + d_{33} x_3\end{aligned} \quad (5)$$

ifadelerini yazılabiliriz. (5) 'den

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_1'} = d_{11}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_1'} = d_{12}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_1'} = d_{13} \quad (6)$$

olduğunu da (5)'den kolayca elde ederiz.

(6) ifadelerini (4)-de yerine yazarak bazı matematiksel işlemler yapalım.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ii}' &= \left(d_{i1} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + d_{i2} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + d_{i3} \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) d_{i1} + \left(d_{i1} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \right. \\ & \left. d_{i2} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + d_{i3} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) d_{i2} + \left(d_{i1} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + d_{i2} \frac{\partial U_2}{\partial x_3} + d_{i3} \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) d_{i3} =\end{aligned}$$

$$= \alpha_{11} \alpha_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \alpha_{12} \alpha_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \alpha_{13} \alpha_{11} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} +$$

$$+ \alpha_{11} \alpha_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \alpha_{12} \alpha_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \alpha_{13} \alpha_{12} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} +$$

$$+ \alpha_{11} \alpha_{13} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \alpha_{12} \alpha_{13} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \alpha_{13} \alpha_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} =$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \alpha_{11} \alpha_{11} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \alpha_{11} \alpha_{12} + \alpha_{12} \alpha_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

$$+ \alpha_{13} \alpha_{11} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \alpha_{12} \alpha_{13} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) +$$

$$+ \alpha_{13} \alpha_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \alpha_{11} \alpha_{11}}_{\varepsilon_{11}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \alpha_{11} \alpha_{12}}_{\varepsilon_{21}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \alpha_{11} \alpha_{12}}_{\varepsilon_{12}} +$$

$$+ \alpha_{12} \alpha_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \alpha_{13} \alpha_{11}}_{\varepsilon_{31}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \alpha_{13} \alpha_{11}}_{\varepsilon_{13}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \alpha_{12} \alpha_{13}}_{\varepsilon_{32}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \alpha_{12} \alpha_{13}}_{\varepsilon_{23}} +$$

$$+ \alpha_{13} \alpha_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{11}' = \varepsilon_{11} \alpha_{11} + \varepsilon_{12} \alpha_{11} \alpha_{12} + \varepsilon_{21} \alpha_{12} \alpha_{11} + \varepsilon_{22} \alpha_{12} \alpha_{12} +$$

$$\varepsilon_{13} \alpha_{11} \alpha_{13} + \varepsilon_{31} \alpha_{13} \alpha_{11} + \varepsilon_{23} \alpha_{12} \alpha_{13} + \varepsilon_{32} \alpha_{13} \alpha_{12} +$$

$$+ \varepsilon_{33} \alpha_{13} \alpha_{13} \quad (7)$$

gerde ~~galem~~ ε_{ij}' lerin ε_{ij}' lerle ifadeleri
benzeri kaidelerle yapabiliriz
şimdi ε_{11} -in ε_{ij}' -lerle ifadesini almaya
gelelim

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_{11} u_1' + \alpha_{21} u_2' + \alpha_{31} u_3') = \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1'} (\alpha_{11} u_1' + \alpha_{21} u_2' + \alpha_{31} u_3') \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_2'} (\alpha_{11} u_1' + \alpha_{21} u_2' + \alpha_{31} u_3') \frac{\partial x_2'}{\partial x_1} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_3'} (\alpha_{11} u_1' + \alpha_{21} u_2' + \alpha_{31} u_3') \frac{\partial x_3'}{\partial x_1} = \\
&= \left(\alpha_{11} \frac{\partial u_1'}{\partial x_1'} + \alpha_{21} \frac{\partial u_2'}{\partial x_1'} + \alpha_{31} \frac{\partial u_3'}{\partial x_1'} \right) \alpha_{11} + \\
&+ \left(\alpha_{11} \frac{\partial u_1'}{\partial x_2'} + \alpha_{21} \frac{\partial u_2'}{\partial x_2'} + \alpha_{31} \frac{\partial u_3'}{\partial x_2'} \right) \alpha_{21} + \\
&+ \left(\alpha_{11} \frac{\partial u_1'}{\partial x_3'} + \alpha_{21} \frac{\partial u_2'}{\partial x_3'} + \alpha_{31} \frac{\partial u_3'}{\partial x_3'} \right) \alpha_{31} = \\
&= \frac{\partial u_1'}{\partial x_1'} \alpha_{11} \alpha_{11} + \frac{\partial u_2'}{\partial x_2'} \alpha_{21} \alpha_{11} + \frac{\partial u_3'}{\partial x_3'} \alpha_{31} \alpha_{11} + \\
&+ \frac{\partial u_1'}{\partial x_2'} \alpha_{11} \alpha_{21} + \frac{\partial u_2'}{\partial x_2'} \alpha_{21} \alpha_{21} + \frac{\partial u_3'}{\partial x_2'} \alpha_{31} \alpha_{21} + \\
&+ \frac{\partial u_1'}{\partial x_3'} \alpha_{11} \alpha_{31} + \frac{\partial u_2'}{\partial x_3'} \alpha_{21} \alpha_{31} + \frac{\partial u_3'}{\partial x_3'} \alpha_{31} \alpha_{31} = \varepsilon_{12} \\
&= \underbrace{\frac{\partial u_1'}{\partial x_1'} \alpha_{11} \alpha_{11}}_{\varepsilon_{11}'} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2'}{\partial x_1'} + \frac{\partial u_1'}{\partial x_2'} \right) \alpha_{21} \alpha_{11} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_2'} + \frac{\partial u_2'}{\partial x_1'} \right) \alpha_{21} \alpha_{11} \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3'}{\partial x_1'} + \frac{\partial u_1'}{\partial x_3'} \right) \alpha_{31} \alpha_{11} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_3'} + \frac{\partial u_3'}{\partial x_1'} \right) \alpha_{31} \alpha_{11} + \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3'}{\partial x_2'} + \frac{\partial u_2'}{\partial x_3'} \right) \alpha_{21} \alpha_{31} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2'}{\partial x_3'} + \frac{\partial u_3'}{\partial x_2'} \right) \alpha_{21} \alpha_{31} + \\
&\underbrace{\left(\frac{\partial u_2'}{\partial x_2'} \alpha_{21} \alpha_{21} + \frac{\partial u_3'}{\partial x_3'} \alpha_{31} \alpha_{31} \right)}_{\varepsilon_{22}'} + \underbrace{\left(\frac{\partial u_3'}{\partial x_3'} \alpha_{31} \alpha_{31} \right)}_{\varepsilon_{33}'}
\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = & \varepsilon_{11}^1 \alpha_{11} \alpha_{11} + \varepsilon_{21}^1 \alpha_{21} \alpha_{11} + \varepsilon_{12}^1 \alpha_{11} \alpha_{21} + \varepsilon_{13}^1 \alpha_{11} \alpha_{31} + \\ & + \varepsilon_{31}^1 \alpha_{31} \alpha_{11} + \varepsilon_{22}^1 \alpha_{21} \alpha_{21} + \varepsilon_{32}^1 \alpha_{31} \alpha_{21} + \\ & + \varepsilon_{22}^1 \alpha_{21} \alpha_{21} + \varepsilon_{33}^1 \alpha_{31} \alpha_{31} \end{aligned} \quad (8)$$

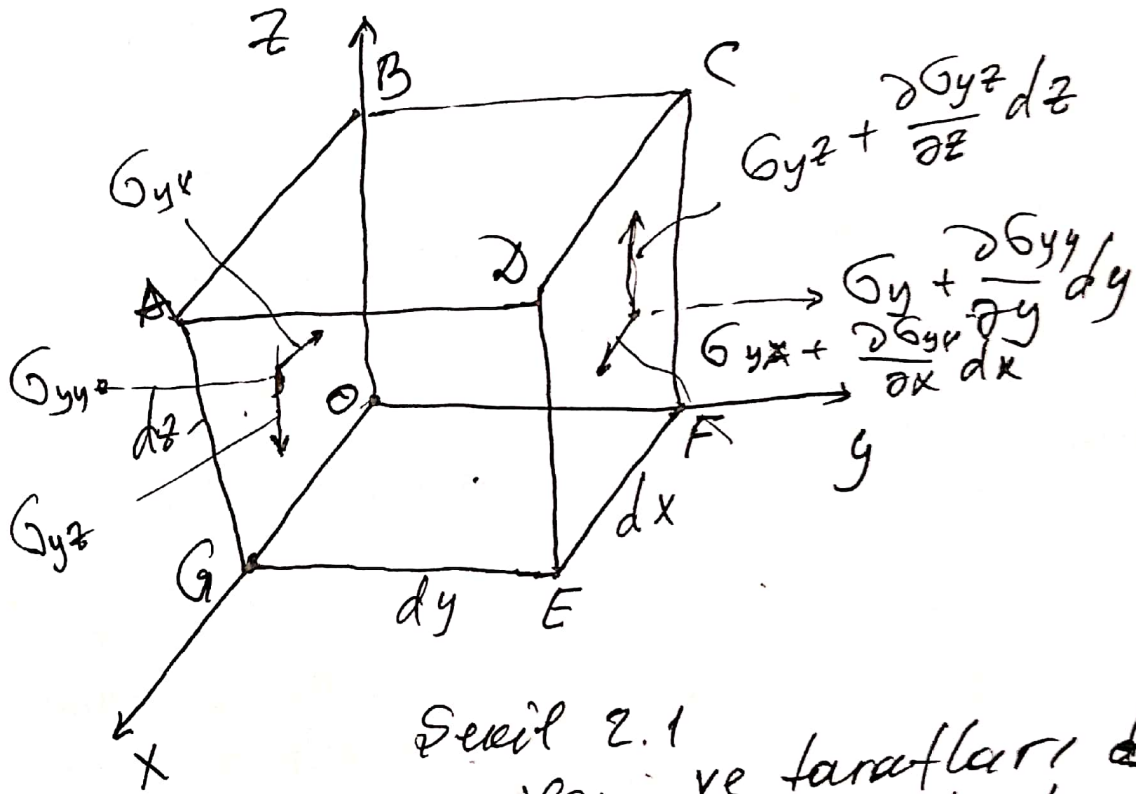
Birer ε_{ij}^1 lerin ε_{ij}^1 - le ifadeleri de aynı
yolla elde edilir.

Birlelikle, bir önceki dersde verdiğimiz
tensör tanımına göre ve elde edilen (7)
ve (8) ifadelerine göre sekizdepişirme
matrisinin ~~bir~~ ikinci mertebeden bir tensör
oluşturduğunu kanıtlamış olduk.

Denge denklemini

(6)

Denge denklemini çıkarmadan önce, cisme etki eden kuvvetlerin iki sınıfa ayrıldığını, yani yüzeysel ve hacimsel olarak adlandırılan kuvvetlere ayrıldığını hatırlatalım. Şimdi, şekil değiştirebilen cisimden elementar küçüğe bir hissesinin dengede kalma şartını bilinen statik prensiplerden elde etmeye çalışalım



Şekil 2.1

Şekil 2.1 -de verilen ve tarafları dx , dy ve dz olan bir prizmatik parçacığı ele alalım. Parçacığın Ox eksenine dik olan yüzleri $OBCF$ ve $GADE$ 'lerdir

Oy eksenine dik olan yüzleri

$OBA G$ ve $CFED$ 'lerdir ve Oz eksenine dik olan yüzleri

$OGEF$ ve $ABCD$ 'lerdir

Ox eksenine dik olan yüzeylerde etki eden kuvvetleri yazalım

$$\left[\begin{array}{l} OBCF \text{ 'de}; -\sigma_{xx}; -\sigma_{xy}; -\sigma_{xz} \\ AGED \text{ 'de } \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx; \sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dx; \sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dx \end{array} \right] dydz$$

Oy eksenine dik olan yüzeylerde:

$$\left[\begin{array}{l} OBAG \text{ 'de}; -\sigma_{yy}; -\sigma_{yx}; -\sigma_{yz} \\ DCEF \text{ 'de } \sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy; \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy; \sigma_{yz} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dy \end{array} \right] dxdz$$

Oz eksenine dik olan yüzeylerde

$$\left[\begin{array}{l} OGEF \text{ 'de } -\sigma_{zz}; \sigma_{zx}; \sigma_{zy} \\ ABCD \text{ 'de } \sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz; \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz; \sigma_{zy} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} dz \end{array} \right] dxdy$$

Farz edelim ki, ele alınan prizmatik parçacığa

$$\rho \vec{F} dv = (\rho F_x \vec{i} + \rho F_y \vec{j} + \rho F_z \vec{k}) dxdydz$$

hacimsel kuvveti de etki eder.

Şimdi Ox, Oy ve Oz eksenleri yönünde etki eden kuvvetlerin toplamını sıfıra eşitleyelim:

Ox eksenini yönünde

$$-\sigma_{xx} dydz + \sigma_{xx} dydz + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dxdydz - \sigma_{yx} dxdz + \sigma_{yx} dxdz + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dydxdz - \sigma_{zx} dx dy + \sigma_{zx} dx dy + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dzdxdy + \rho F_x dxdydz = 0$$

dxdydz ' bölersen

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \rho F_x = 0$$

$$\rho \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

Oy eksenine' yönünde

(8)

$$-\sigma_{xy} dy dz + \sigma_{xy} dy dz + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dx dy dz + \sigma_{yy} dx dz + \sigma_{yy} dx dz + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy dx dz - \sigma_{zy} dx dy + \sigma_{zy} dx dy + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} dz dx dy + \rho F_y dx dy dz = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \rho F_y = 0} \quad \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

Oz eksenine' yönünde

$$-\sigma_{xz} dy dz + \sigma_{xz} dy dz + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dy dz dx + \sigma_{yz} dx dz + \sigma_{yz} dx dz + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dy dx dz - \sigma_{zz} dx dy + \sigma_{zz} dx dy + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz dx dy + \rho F_z dx dy dz = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho F_z = 0} \quad \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

İndirgenmiş elastisite teorisinin temel denklemler formunu yazalım
Denge denklemleri

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \rho F_x = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \rho F_y = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho F_z = 0, \quad (9)$$

Hooke yasası

$$\sigma_{xx} = \lambda e + 2G \epsilon_{xx},$$

$$\sigma_{yy} = \lambda e + 2G \epsilon_{yy},$$

$$\sigma_{zz} = \lambda e + 2G \epsilon_{zz}$$

$$\sigma_{xz} = 2G \epsilon_{xz}, \quad \sigma_{yz} = 2G \epsilon_{yz}, \quad \sigma_{xy} = 2G \epsilon_{xy}$$

$$e = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz},$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (10)$$

Şekildeyiştirme gerdeğiştirme ilişkileri

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right), \quad (11)$$

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_1 + u_y \vec{e}_2 + u_z \vec{e}_3$$

3 + 6 + 6 = 15 bilinmeyen için

3 + 6 + 6 = 15 denklemler elde ediliyor

Bu denklemlere sınır koşulları eklenir. Farz edelim ki, cismin V hacmi S yüzeyi ile sınırlanmıştır. S yüzeyinin S_I kısmında kuvvetler, S_{II} kısmında ise yerdeğiştirmeler verilir. Bu veriler σ aşapıdarı gibi formüle edilebilir.

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z &= P_x, \\
\sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{zy} n_z &= P_y, \\
\sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z &= P_z
\end{aligned} \quad (12)$$

$$x, y, z \in S_I, \quad n_x, n_y \text{ ve } n_z$$

S_I yüzeyinin x, y, z noktasında yüzeye dış
birim normal vektörün bileşenleridir,
 P_x, P_y ve P_z ise S_I kısmına etki eden
dış yüzey kuvvet vektörünün bileşenleridir.
Cismin yüzeyinin S_{II} kısmında ise
yerdeğiştirmeler veriliyor :

$$u_x = f_1(x, y, z); \quad u_y = f_2(x, y, z), \quad u_z = f_3(x, y, z)$$

$$x, y, z \in S_{II} \quad (13)$$