

Düzlem şekildeğiştirme durumu

Tanım: Eğer şekildeğiştirme durumunda cismi her bir noktasının yerdeğiştirme vektörü aynı bir düzleme paralel gelirse, onda bu tür şekildeğiştirme durumuna düzlem şekildeğiştirme denir.

Farz edelim ki, yerdeğiştirme vektörünün paralel olduğu düzlem Oxy (veya Ox_1x_2) düzlemidir. Onda, yukarıdaki tanıma göre yerdeğiştirme vektörünün, yani

$$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k} \text{ ve ya indeksli gösterim}$$

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3 \quad (1)$$

vektörünün w (u_3) bileşeni sıfır olmalıdır, yani

$$w = 0 \text{ ve ya } u_3 = 0 \quad (2)$$

olmalıdır. Şimdilik indeks notasyonu kullanalım.

Bundan başka, yukarıdaki tanıma göre yerdeğiştirme vektörünün u_1 ve u_2 bileşenleri yalnız x_1 ve x_2 koordinatlarının fonksiyonu olmak zorundalar; yani

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), u_2 = u_2(x_1, x_2) \quad (3)$$

Şimdi (2) ve (3) ifadelerini göz önüne alarak bir önceki dersimizde verdiğimiz ~~if~~ şekildeğiştirme yerdeğiştirme ifadelerinden düzlem şekildeğiştirme

durumu için şekildeğiştirme fonksiyonu bileşenlerinin ifadelerini elde edelim. Bundan için ilk önce bir önceki dersde verdiğimiz ifadeleri indeks notasyonu ile yazalım

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \epsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), \\ \epsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

(2) ve (3) ifadelerini (4) yerine yazarsak, düzlem şekildeğiştirme durumunda şekildeğiştirme fonksiyonu bileşenleri için aşağıdaki ifadeleri elde ediyoruz.

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \epsilon_{33} = 0, \quad \epsilon_{23} = 0, \\ \epsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \epsilon_{13} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Şimdi bir önceki dersde (10) ifadeleri ile verilen Hooke yasasını indeks notasyonu ile yazalım

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda e + 2G\epsilon_{11}, \quad \sigma_{22} = \lambda e + 2G\epsilon_{22}, \quad \sigma_{33} = \lambda e + 2G\epsilon_{33} \\ \sigma_{13} &= 2G\epsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = 2G\epsilon_{23}, \quad \sigma_{12} = 2G\epsilon_{12}, \quad \text{~~(6)}~~ \\ e &= \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}. \end{aligned} \quad (6)$$

(5) ifadelerinin (6) yerine yazarsak, düzlem şekildeğiştirme durumu için Hooke yasası aşağıda ki gibi olur:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda e + 2G\epsilon_{11}, \quad \sigma_{22} = \lambda e + 2G\epsilon_{22}, \quad \sigma_{33} = \lambda e; \\ \sigma_{12} &= 2G\epsilon_{12}, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0 \\ e &= \epsilon_{11} + \epsilon_{22} \end{aligned} \quad (7)$$

(7)'nin birinci ve ikinci ifadelerinden

$$e = \frac{1}{2(\lambda + G)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (8)$$

olduğunu direkt alırsak, (7) - nin üçüncü ifadesinden⁽³⁾

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2(\lambda + G)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\sigma_{33} = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (9)$$

olduğunu kanıtlarız.

Şimdi Hook yasasını şekildeğiştirmelerin gerilmelerle ifade edilmesi biçiminde yazalım. Bunun için ilk önce, bu dönem ikinci dersde verdik. Hook yasası ifadelerini indeks notasyonu ile yazalım.

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{22} + \sigma_{33}),$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{33}),$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}),$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2G} \sigma_{13}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2G} \sigma_{23} \quad (10)$$

(5)'teki düzlemsel şekildeğiştirme ifadelerini (10) yerine yazarsak, aşağıdakileri buluruz:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{22} + \sigma_{33}),$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{33}),$$

$$0 = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}),$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12}, \quad \varepsilon_{13} = 0; \quad \varepsilon_{23} = 0 \quad (11)$$

(11)-in 3. ifadesinden σ_{33} - ü

$$\sigma_{33} = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (12)$$

gibi bulup, (11)'in 1. ve 2. ifadelerinde yerine yazalım.

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{22} + \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) = \\ &= \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu^2}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_{22} = \\ &= \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_{22} ;\end{aligned}$$

yani

$$\boxed{\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_{22} \\ \epsilon_{22} &= -\frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_{11} + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{22}\end{aligned}} \quad (13)$$

oluyor.

Şimdi düzlem şekildeğiştirme durumunda denge denklemlerini sadeleştirme için bir önceki dersimizde verdiğimiz (9) denklemlerini ilk önce indeks notasyonu ile yazalım

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho F_1 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho F_2 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho F_3 = 0 \quad (14)$$

(7)'deki ifadeleri dikkate alırsak ve tüm büyüklüklerin sadece x_1 ve x_2 koordinatlarından bağımlı olduklarını hatırlarsak, (14) denklemlerini düzlem şekildeğiştirme durumunda aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \rho F_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho F_2 &= 0 \\ \rho F_3 &= 0 !!\end{aligned}}$$

(15)

(5)
 Sonuçta, düzlem şekildeğiştirme durumunda 3 gerilme $\sigma_{11}, \sigma_{12} (= \sigma_{21}), \sigma_{22}$; 3 şekildeğiştirme $\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{22}$ ve 2 yerdeğiştirme u_1, u_2 olmak üzere 8 bilinmeyen (veya aranan) fonksiyonumuz vardır. Bu 8 bilinmeyene karşılık 2 denge denklemi (15), 3 elastisite bağıntısı (Hook yasası) (11) ve 3 şekildeğiştirme-yerdeğiştirme bağıntısı (5) bağıntıları olmak üzere 8 denkleminiz vardır.

Düzlem gerilme durumu

Tanım: Eğer şekildeğiştirme durumunda cismin her bir noktesindeki gerilme vektörü bir düzleme paralel olursa, onda bu tür gerilme durumuna düzlem gerilme durumu denir.

Gerilme vektörlerinin paralel olduğu düzlemi Ox_1x_2 düzlemi olarak kabul ederseniz, onda yukarıdaki tanıma göre

$$\sigma_{11} \neq 0, \sigma_{12} \neq 0 \text{ ve } \sigma_{22} \neq 0$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad \text{olur} \quad (16)$$

ve σ_{11}, σ_{12} ve σ_{22} 1'er yalnız x_1 ve x_2 koordinatlarının fonksiyonu olurlar

(16) ifadelerini (14) denkleminde yazarsak (15) denklemlerini buluruz.

Şimdi (16) ifadelerini (10) (Hook yasası) ifadelerinde yazalım:

$$\epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22}, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12}$$

$$\epsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} + \frac{\sigma_{22}}{E}, \quad \epsilon_{13} = 0,$$

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad \epsilon_{23} = 0, \quad (17)$$

(17)'deki ϵ_{11} ve ϵ_{22} için yazılan ifadelerden

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{22} = \frac{(1-\nu)}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (18)$$

buluruz. Buradan ise $\sigma_{11} + \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22})$ yazarak, ϵ_{33} 'de dikkate alırsak

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \quad (19)$$

ifadesini buluruz.

ϵ_{11} , ϵ_{22} ve ϵ_{12} 'lerin $\sqrt{x_1}$ ve x_2 koordinatlarının fonksiyonu olduğunu göz önüne alırsak,

$$\epsilon_{33} = \epsilon_{33}(x_1, x_2) \Rightarrow \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \epsilon_{33}(x_1, x_2) \Rightarrow$$

$$\boxed{u_3 = \epsilon_{33}(x_1, x_2) x_3 + \varphi(x_1, x_2)} \quad (20)$$

gibi bir ifade yazabiliriz

~~ϵ_{11} , ϵ_{22} ve ϵ_{12}~~

$$\epsilon_{13} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon_{33}}{\partial x_1} x_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$$

$$\epsilon_{23} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon_{33}}{\partial x_2} x_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0$$

$$\underline{\underline{\varphi = \text{sabit}}}$$

Düzlem gerilme:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22},$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} + \frac{\sigma_{22}}{E},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12}, \quad (21)$$

sigma_12

Düzlem şekil değişimine

$$\varepsilon_{11} = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_{22},$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_{11} + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{22},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12}, \quad (21')$$

sigma_12

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

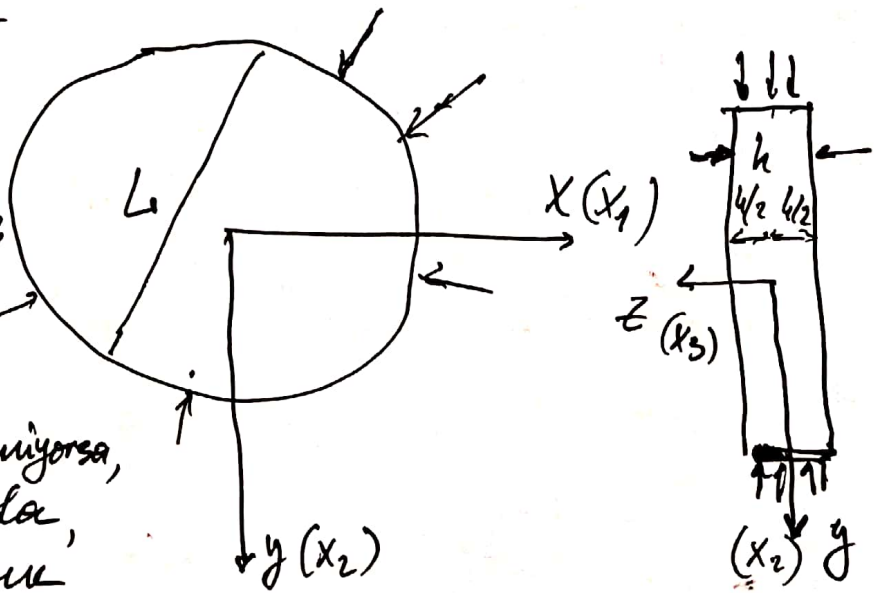
(22)

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (23)$$

~~Notlarda gerilme durumu~~

Düzlem gerilme durumu hallerine örnekler

Eğer ince bir plakaya ($L \gg h$) yanal yüzden etki eden yükün şiddeti $X_3(x_3)$ koordinatından bağımsız, ve plakanın alt ve üst yüzlerine hiç bir kuvvet etki etmiyorsa, onda bu plakada, yaklaşık olarak düzlem gerilme durumu olurus denebilir.



Verilen durumda plaka için üç boyutlu denklemleri yazalım

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad (24)$$

Bu denklemlerin her birini $-h/2$ -den $+h/2$ göre x_3 -e göre integrallayalım

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_3} dx_3 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} dx_3 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} dx_3 = 0 \quad (25)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_3} dx_3 = \sigma_{12} \Big|_{x_3=+h/2}^0 - \sigma_{12} \Big|_{x_3=-h/2}^0 = 0$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} dx_3 = \sigma_{23} \Big|_{x_3=+h/2}^0 - \sigma_{23} \Big|_{x_3=-h/2}^0 = 0$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} dx_3 = \sigma_{33} \Big|_{x_3=+h/2}^0 - \sigma_{33} \Big|_{x_3=-h/2}^0 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3 \approx h \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{13}^*(x_1, x_2, x_3^*) \approx 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3 \approx h \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{23}^*(x_1, x_2, x_3^*) \approx 0$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_3 = \sigma_{11}^*(x_1, x_2, x_3^*)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dx_3 = \sigma_{12}^*(x_1, x_2, x_3^*)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dx_3 = \sigma_{22}^*(x_1, x_2, x_3)$$

Onda (25)-den

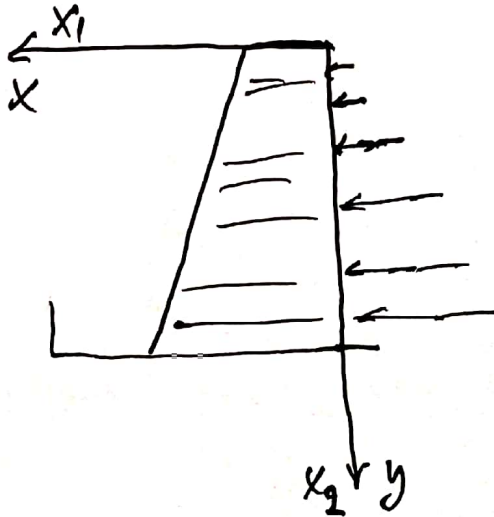
$$\frac{\partial \sigma_{11}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^*}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^*}{\partial x_2} = 0$$

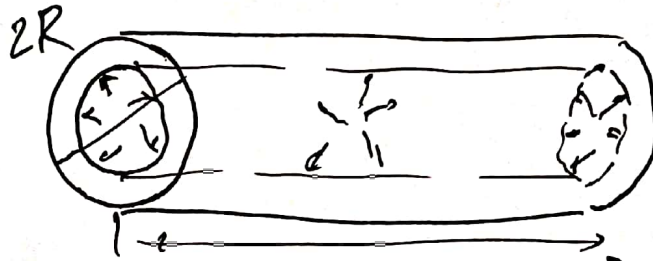
*ları gözardı edersek (22)-ki denklemleri elde ederiz

Sonuç: Düzlem gerilme durumu pratikte kestirilebilir, hiç bir zaman saplanmaz: bu durum yaklaşık olarak saplanmaz, yukarıda gösterilen genelleşmiş düzlem gerilme durumu gibi.

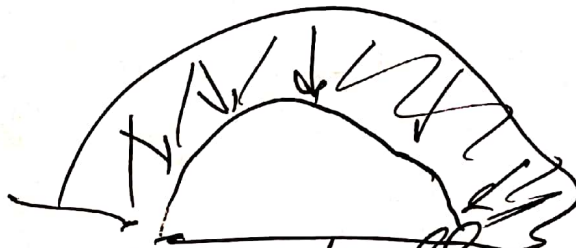
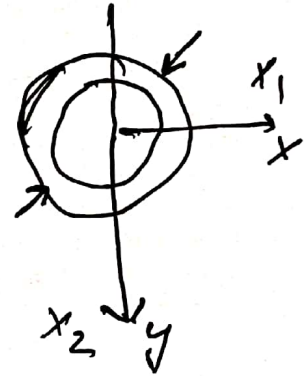
Düzlem şekil değiştirme durumuna ait örnekler.



yamaç basınca etki
gösteren istinat duvarı



İç basınca maruz kalan
silindirik



Kanal ve tuneller

Bu yapılarda x_3 (oz) eksen yönündeki uzunluk bu eksene dik kesitlerden uzunluklardan çok-cok büyüye olmalı; ve ~~oz (ox_3) eksenine paralel etki eden dış~~ kuvvetlerin şiddeti x_3 (z) koordinatından bağımsız olmalı. Bu durumlarda düzlem şekil değiştirme durumu kesin olarak sağlanır.

Nörlde gerilme durumu

Bir önceki derslerimizde (örneğin bir önceki dersimizdeki (12) formülleri) üçölçülü durumda $Oxyz$ ($Ox_1x_2x_3$) eksen takımında normal $\vec{N}(n_1, n_2, n_3)$ ($\vec{N}(n_1, n_2, n_3)$) olan bir düzleme etki eden gerilme vektörü bileşenlerinin ifadelerini almıştık. Şimdi bu ifadeleri indeks notasyonu ile tekrar yazalım

$$\sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 = P_1$$

$$\sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3 = P_2$$

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 = P_3 \quad (25)$$

Şimdi (25) ifadelerini düzlem gerilme ve ya düzlem şekildeğiştirme durumları için sadeleştirelim; $n_3 = 0$; $P_3 = 0$; $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$ olduğunu (25)'de göz önüne alırsak (25)'den aşağıdaki sonucu yazabiliriz

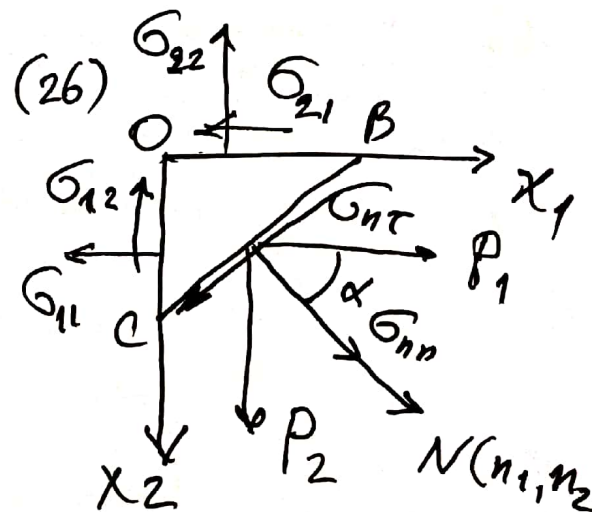
$$\sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 = P_1$$

$$\sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 = P_2$$

Şekil (3.2)'ye göre

$$n_1 = \cos \alpha; \quad n_2 = \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$$

$$n_2 = \sin \alpha;$$



Şekil 3.2

(12)

Şekil (3.2)'den ve (26)-dan yararlanarak
CB kesitinde etkili eden normal σ_{nn} ve
kayma σ_{nz} gerilmelerini bulalım

$$\sigma_{nn} = P_1 \cos \alpha + P_2 \sin \alpha$$

$$\sigma_{nz} = -P_1 \sin \alpha + P_2 \cos \alpha \quad (27)$$

P_1 ve P_2 -nin (26)'daki ifadelerini (27)-de
yerine yazarak

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= (\sigma_{11} \cos \alpha + \sigma_{21} \sin \alpha) \cos \alpha + \\ &(\sigma_{12} \cos \alpha + \sigma_{22} \sin \alpha) \sin \alpha = \sigma_{11} \cos^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \\ &\quad + \sigma_{22} \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma_{nn} = \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{12} \sin 2\alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{nz} &= -(\sigma_{11} \cos \alpha + \sigma_{21} \sin \alpha) \sin \alpha + (\sigma_{12} \cos \alpha + \\ &+ \sigma_{22} \sin \alpha) \cos \alpha = -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{12} \sin^2 \alpha + \\ &+ \sigma_{12} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin 2\alpha + \\ &+ \sigma_{12} \cos 2\alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma_{nz} = \frac{1}{2} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin 2\alpha + \sigma_{12} \cos 2\alpha} \quad (29)$$

Şimdi, (29)-de $\exists$ bir α bulalım ki, $\sigma_{nz} = 0$
olsun:

$$\sigma_{nz} = \frac{1}{2} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin 2\alpha + \sigma_{12} \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma_{12} \cos 2\alpha = \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\alpha$$

$$\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} = \tan 2\alpha$$

$$\boxed{\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{12}} = \frac{1}{2} \tan 2\alpha} \quad (30)$$

Eğer farz etsek ki, $\alpha = \alpha^*$ (30) denkleminin çözümüdür, onda $\alpha = \alpha^* + \pi/2$ 'de (30) denkleminin çözümü olur ve sonuçta bir-birine dik olan iki kesit bulunur ki, bu kesitlerde kayma gerilmesi sıfır olur ve onlar üzerinde sadece normal ~~gerilme~~ ~~etki~~ etki ediyor: bu gerilmelere asal gerilmeler denir, bu gerilmelerin etki ettikleri kesitlerinin normalle-
rinin yönlerine ise asal yönler denir

Eğer σ_{x_1} ve σ_{x_2} eksenleri asal yönlerle çakışırsa, onda $\sigma_{12} = 0$ olur ve (28), (29) formülleri aşağıdaki hale gelir

$$\sigma_{nn} = \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha,$$

$$\sigma_{nt} = \frac{1}{2} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin 2\alpha. \quad (31)$$

Eğer $\sigma_{11} > \sigma_{22}$ olduğunu varsayarsak,
ond $|\sigma_{nt}|_{\max}$ $\alpha = 45^\circ$ 'de olur.

$$\sigma_{nn} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\alpha$$

$$\sigma_{nt} = \frac{1}{2} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin 2\alpha$$

$$\left(\sigma_{nn} - \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right)^2 + \sigma_{nt}^2 = \frac{1}{4} (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2$$

