



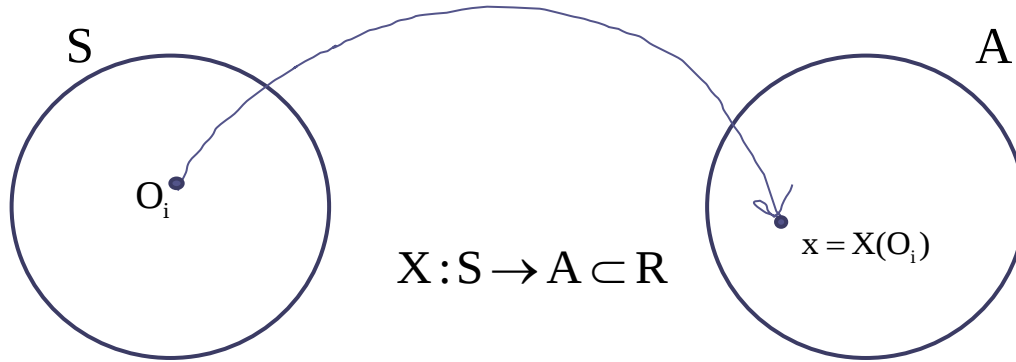
# Rasgele Değişkenler/ Kesikli Rasgele Değişken

## Rasgele Değişken

Rasgele bir sistemin davranışlarını anlayıp, açıklamak ve yorumlamak için, meydana gelebilecek bütün durumları (örnek uzay) göz önüne alarak, araştırılan olayların ortaya çıkışlarının olasılıkları bulunur ve karşılaştırmalar yapılabilir.

Bu şekilde belirsizlikten kurtulmaya çalışılır.

S örnek uzayının her bir basit olayını yalnız bir gerçel değere dönüştüren  $X$  fonksiyonuna ***rasgele (rassal) değişken*** denir.



## Rasgele Değişken

Her basit  $O_i$  olayı için  $x = X(O_i)$  'dir.

Her rasgele değişken gerçekte bir fonksiyondur ve örnek uzayından gerçel sayı kümesine bir dönüşümdür.

$O_i$ , örnek uzayında basit bir olay iken bu olayı  $R$ 'de görüntüleyen  $X$  fonksiyonunun aldığı değer  $x = X(O_i)$  olup,  $O_i \subset S$  yerine  $x \in R$  alınmaktadır.

$X, Y, Z \longrightarrow$  Rasgele değişkenler

$x, y, z \longrightarrow$  Rasgele değişkenlerin aldıkları değerler

**Örnek:** Bir para iki kez atılsın.

$$S=\{TT, TY, YT, YY\}$$

$X \longrightarrow$  gelecek tura sayısı

| Örnek nokta | TT | TY | YT | YY |
|-------------|----|----|----|----|
| X           | 2  | 1  | 1  | 0  |

## Rasgele Değişken

```
graph TD; A[Rasgele Değişken] --> B[Kesikli Rasgele Değişken]; A --> C[Sürekli Rasgele Değişken];
```

### Kesikli Rasgele Değişken

- Sonlu
- Sayılabilir sonsuz

### Sürekli Rasgele Değişken

- Sonsuz

## Kesikli Rasgele Değişken

X rasgele değişkeninin  $R$ 'deki değer kümesi olan  $A$ , sayılabilir sonlu veya sayılabilir sonsuz bir küme ise;  $X$ 'e **kesikli rasgele değişken** denir.

Rassal sistemde karşılaşılabılır tüm durumlar, bir fonksiyon olarak tanımlanan rasgele değişkenle gerçek sayılara dönüştürülerek, bu sistemdeki olayların olasılıkları, bu olaylara karşılık gelen rasgele değişkenin olasılığı ile gösterilir.

# Kesikli Rasgele Değişken – Olasılık Dağılımı

$X \rightarrow$  kesikli rasgele değişken

$x_1, x_2, x_3, \dots$  bu rasgele değişkenin alabileceği sürekli büyüklüğü artan bir düzende sıralanan değerler olsun.

Bunlara karşılık gelen olasılıklar

$$P(X = x_k) = f(x_k) \quad k = 1, 2, \dots$$

şeklinde verilir.

$$P(X = x) = f(x)$$

olasılık fonksiyonu ya da diğer adı ile olasılık dağılımı

Yoğunluk fonksiyonu

Olasılık yoğunluk fonksiyonu

## Kesikli Rasgele Değişken – Olasılık Dağılımı

- $x = x_k$  için bu tanım (1) nolu tanıma indirgenir. Diğer  $x$  değerleri için  $f(x) = 0$ 'dır.
- 1.  $f(x) \geq 0$
- 2.  $\sum_x f(x) = 1 \rightarrow$  ise  $f(x)$  bir olasılık fonksiyonudur.

**Örnek:** Bir para iki kez atılsın. X'e karşılık gelen olasılık fonksiyonunu bulunuz.  
Olasılık grafiğini oluşturunuz.

$$S=\{TT, TY, YT, YY\}$$

X  $\longrightarrow$  gelecek tura sayısı

| Örnek nokta | TT | TY | YT | YY |
|-------------|----|----|----|----|
| X           | 2  | 1  | 1  | 0  |

$$P(TT) = \frac{1}{4} \quad P(TY) = \frac{1}{4} \quad P(YT) = \frac{1}{4} \quad P(YY) = \frac{1}{4}$$

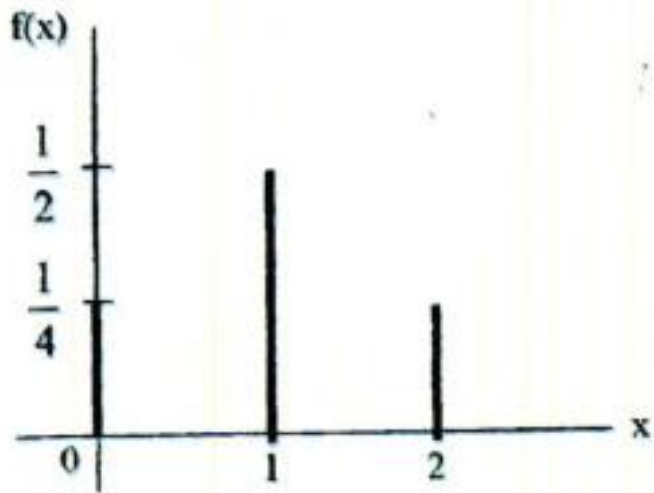
$$P(X=0) = P(YY) = \frac{1}{4}$$

$$P(X=1) = P(TY \cup YT) = P(TY) + P(YT) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

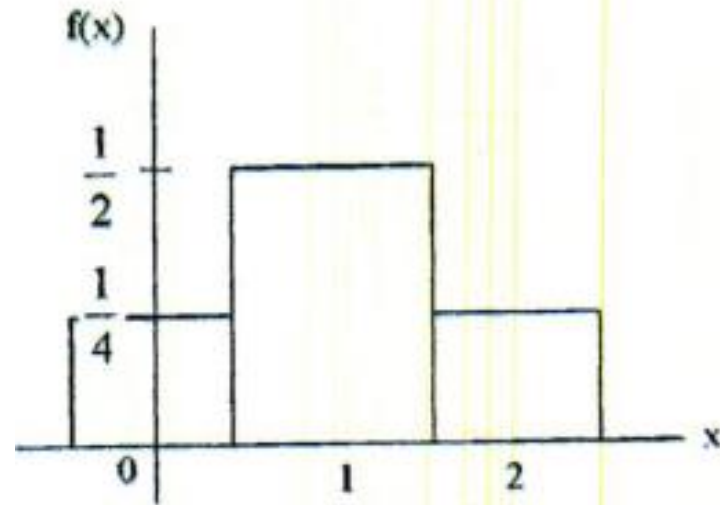
$$P(X=2) = P(TT) = \frac{1}{4}$$

|      |     |     |     |
|------|-----|-----|-----|
| x    | 0   | 1   | 2   |
| f(x) | 1/4 | 1/2 | 1/4 |

→ Olasılık Fonksiyonu



Çubuk (Bar) Diyagramı



Histogram Gösterim

**Örnek:** X kesikli rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\frac{2}{5}\right)^{1-x} & ; x = 0;1 \\ 0 & ; \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Şeklinde verildiğine göre;

$P(X=0)$ ,  $P(X=1)$  ve  $P(X \leq 1)$  olasılıklarını hesaplayınız.

$$P(X=0) = f(0) = \left(\frac{3}{5}\right)^0 \left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{2}{5}$$

$$P(X=1) = f(1) = \left(\frac{3}{5}\right)^1 \left(\frac{2}{5}\right)^0 = \frac{3}{5}$$

$$P(X \leq 1) = P\{x = 0 \text{ veya } x = 1\} = P(X=0) + P(X=1) = f(0) + f(1) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

## Kesikli Rasgele Değişken – Dağılım Fonksiyonları

$X: S \rightarrow A$  ,  $A_1 = \{t \mid t \leq x\}$  ve  $A \subset R$  olduğu zaman,  
 $P\{X \in A_1\} = P\{X \leq x\} = F(x)$  ilişkisine karşılık gelen  $F(x)$ 'e  $X$ 'in dağılım fonksiyonu (birikimli dağılım fonksiyonu) denir, ve

$X$ 'in verilen bir değere eşit veya küçük çıkma olasılığı istendiğinde;

$$P(X \leq x) = F(x)$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ f(x_1) + \dots + f(x_n) & x_n \leq x < \infty \end{cases}$$

**Örnek:** Bir para iki kez atılsın. X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunu bulunuz. Dağılım fonksiyonunun grafiğini oluşturunuz.

$$S=\{TT, TY, YT, YY\}$$

X  $\longrightarrow$  gelecek tura sayısı

| Örnek nokta | TT | TY | YT | YY |
|-------------|----|----|----|----|
| X           | 2  | 1  | 1  | 0  |

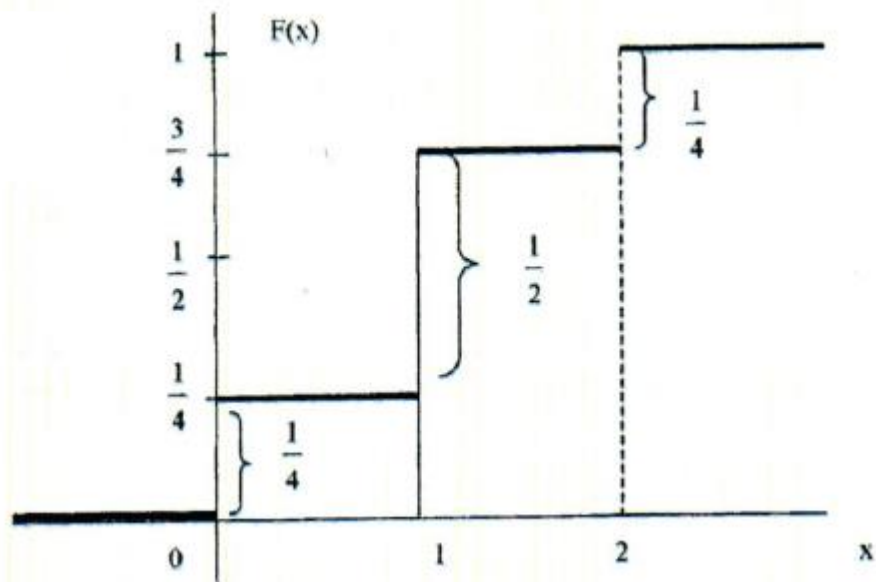
$$P(TT) = \frac{1}{4} \quad P(TY) = \frac{1}{4} \quad P(YT) = \frac{1}{4} \quad P(YY) = \frac{1}{4}$$

$$P(X=0) = P(YY) = \frac{1}{4}$$

$$P(X=1) = P(TY \cup YT) = P(TY) + P(YT) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=2) = P(TT) = \frac{1}{4}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x < \infty \end{cases}$$



**Örnek:** X kesikli rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

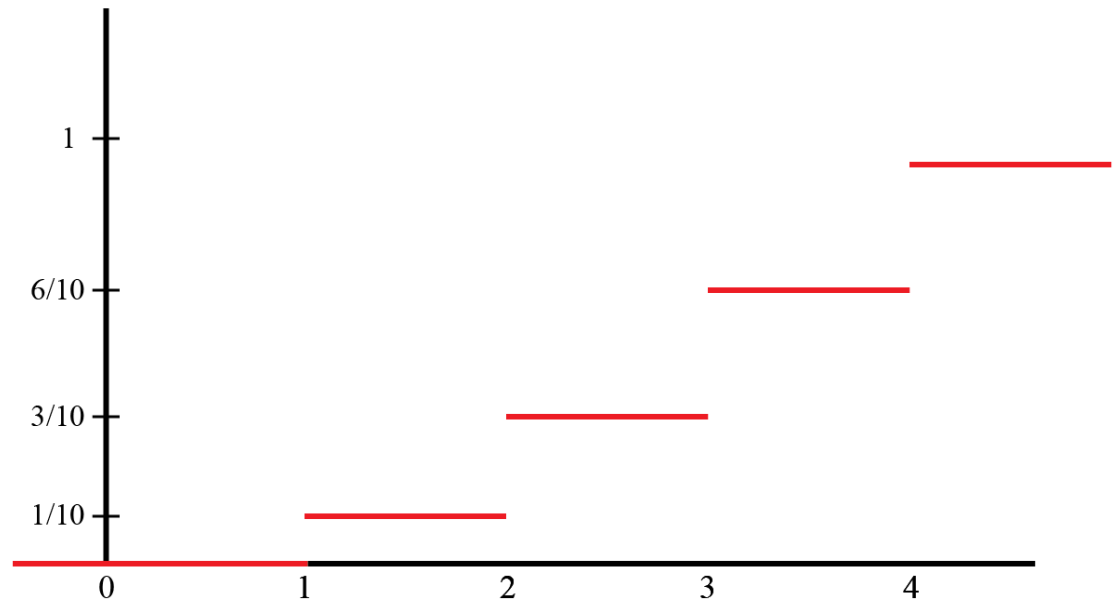
$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; -\infty < x < 1 \\ \frac{x(x+1)}{20} & ; 1 \leq x < 4 \\ 1 & ; 4 \leq x < \infty \end{cases}$$

olduğuna göre;

- a)  $P(X \leq 3)$  olasılığını hesaplayınız.
- b) Dağılım fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$$a) P(x \leq 3) = F(x = 3) = \frac{3(3+1)}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ \frac{1}{10} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{10} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{6}{10} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & 4 \leq x < +\infty \end{cases}$$



**Örnek:** X kesikli rasgele değişkeni için dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; -\infty < x < 1 \\ \frac{x(x+1)}{20} & ; 1 \leq x < 4 \\ 1 & ; 4 \leq x < \infty \end{cases}$$

olduğuna göre;

$$P(1 < x \leq 3) ; P(1 \leq x \leq 3) ; P(1 \leq x < 3)$$

olasılıklarını hesaplayınız.

$$P(1 < x \leq 3) = F(3) - F(1) = \frac{3(3+1)}{20} - \frac{1(1+1)}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$P(1 \leq x \leq 3) = P(0 < x \leq 3) = F(3) - F(0) = \frac{3(3+1)}{20} - 0 = \frac{3}{5}$$

$$P(1 \leq x < 3) = P(0 < x \leq 2) = F(2) - F(0) = \frac{2(2+1)}{20} - 0 = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

**Örnek:** Aşağıdaki fonksiyonun, X kesikli rasgele değişkeninin bir olasılık dağılımı olabilmesi için c katsayısını hesaplayınız.

$$f(x) = c(x^2 + 4) \quad , \quad x = 0; 1; 2; 3$$

$$\sum_x f(x) = 1 \qquad \sum_{x=0}^3 c(x^2 + 4) = 1$$

$$c(0^2 + 4) + c(1^2 + 4) + c(2^2 + 4) + c(3^2 + 4) = 1$$

$$4c + 5c + 8c + 13c = 1$$

$$30c = 1$$

$$c = \frac{1}{30}$$

**Örnek:**

Bir fabrikada üretilen 7 televizyondan 2'si bozuktur. Bir otel bu televizyonlardan 3 tanesini rasgele seçerek satın almaktadır.  $X$  otelin satın aldığı bozuk televizyonların sayısı olduğuna göre  $X$ 'in olasılık dağılımını bulunuz. Sonuçları bir de olasılık histogramı ile grafik olarak gösteriniz.

$X$  : bozuk televizyon sayısı

$$f(0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{2}{7}$$

$$f(1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{7}$$

$$f(2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{5}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{7}$$

$$f(x) = \frac{\binom{2}{x}\binom{5}{3-x}}{\binom{7}{3}}$$

| x    | 0             | 1             | 2             |
|------|---------------|---------------|---------------|
| f(x) | $\frac{2}{7}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{1}{7}$ |

