

Diferansiyel Denklemler - 3. Uygulama

Lineer Diferansiyel Denklemler

Tanım 1. $y' + p(x)y = q(x)$ şeklindeki birinci mertebe denkleme lineer diferansiyel denklem denir.

Sabitin Değişimi Yöntemi

Örnek 1. $xy' + y = \sqrt{x}$, $x > 0$ denklemini sabitin değişimi yöntemiyle çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen denklemde y' türevini yalnız bırakalım. Bunun için her tarafı x e bölelim.

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Bu diferansiyel denklem 1. mertebeden lineer bir diferansiyel denklemdir. O halde, denklemin homojen halini göz önüne alırsak,

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

olur. Bu denklemi değişkenlerine ayırarak integral alırsak,

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = \ln c \Rightarrow \ln y + \ln x = \ln c \Rightarrow \ln(xy) = \ln c \Rightarrow xy = c \Rightarrow y = \frac{c}{x}$$

bulunur. Şimdi $c = c(x)$ olduğunu kabul ederek, her iki tarafın türevini alırsak,

$$y' = \frac{c'}{x} - \frac{c}{x^2}$$

elde edilir. Bulunan bu y ve y' fonksiyonlarını başta verilen diferansiyel denklemde yerine yazarsak,

$$\frac{c'}{x} - \frac{c}{x^2} + \frac{c}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{c'}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dc}{dx} = \sqrt{x} \Rightarrow \int dc = \int x^{\frac{1}{2}} dx \Rightarrow c = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$$

bulunur. Bu c yi homojen denklem için bulduğumuz y fonksiyonunda yerine yazarsak,

$$y = \frac{\frac{2}{3}x\sqrt{x} + k}{x} = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{k}{x}$$

genel çözümü elde edilir.

Örnek 2. $y' - \frac{2}{x}y = x^2 \cos(3x)$ denkleminin $y(\pi) = 1$ özel çözümünü sabitin değişimi yöntemiyle bulunuz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem 1. mertebeden lineer bir diferansiyel denklemdir. O

halde, denklemin homojen halini göz önüne alırsak,

$$y' - \frac{2}{x}y = 0 \text{ veya } y' = \frac{2}{x}y$$

olur. Bu denklemi değişkenlerine ayırarak integral alırsak,

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x}dx \Rightarrow \ln y = 2 \ln x + \ln c \Rightarrow \ln y - \ln x^2 = \ln c$$

$$\ln \frac{y}{x^2} = \ln c \Rightarrow \frac{y}{x^2} = c \Rightarrow y = cx^2$$

bulunur. Şimdi $c = c(x)$ olduğunu kabul ederek, her iki tarafın türevini alırsak,

$$y' = c'x^2 + 2cx$$

elde edilir. Bulunan bu y ve y' fonksiyonlarını başta verilen diferansiyel denklemde yerine yazarsak,

$$c'x^2 + 2cx - \frac{2cx^2}{x} = x^2 \cos(3x) \Rightarrow c' + \frac{2c}{x} - \frac{2c}{x} = \cos(3x) \Rightarrow c' = \cos(3x)$$

bulunur. Bu diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılıp integral alınır,

$$\frac{dc}{dx} = \cos(3x) \Rightarrow dc = \cos(3x)dx \Rightarrow \int dc = \int \cos(3x)dx \Rightarrow c = \frac{\sin(3x)}{3} + k$$

Bu c yi homojen denklem için bulduğumuz y fonksiyonunda yerine yazarsak,

$$y = \left(\frac{\sin(3x)}{3} + k \right) x^2 = \frac{x^2 \sin(3x)}{3} + kx^2$$

genel çözümü elde edilir. Özel çözüm,

$$x = \pi \text{ ve } y = 1 \Rightarrow 1 = \frac{\pi^2 \sin(3\pi)}{3} + k\pi^2 \Rightarrow 1 = k\pi^2 \Rightarrow k = \frac{1}{\pi^2} \Rightarrow y = \frac{x^2 \sin(3x)}{3} + \frac{x^2}{\pi^2}$$

olarak elde edilir.

İntegrasyon Çarpanı Yöntemi

Örnek 3. $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x}$ denkleminin $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4$ olan çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklem lineer diferansiyel denklemdir.

$$p(x) = \cot x \quad (q(x) = 5e^{\cos x})$$

olup, integrasyon çarpanı

$$\lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \cot x dx} = e^{\ln \sin x} = \sin x$$

şeklinde bulunur. O halde verilen denklemin her iki tarafını integrasyon çarpanı ile çarparsak

$$\sin x \left(\frac{dy}{dx} + y \cot x \right) = 5 \sin x e^{\cos x} \Rightarrow \sin x \frac{dy}{dx} + y \cos x = 5 \sin x e^{\cos x}$$

olup, sol tarafın bir çarpım türevi olduğunu göz önüne alırsak ve integral alırsak,

$$\frac{d}{dx} (y \cdot \sin x) = 5 \sin x e^{\cos x} \Rightarrow \int d(y \cdot \sin x) = \int (5 \sin x e^{\cos x}) dx$$

olup genel çözüm,

$$y \cdot \sin x = -5e^{\cos x} + c \Rightarrow y = -\frac{5e^{\cos x} + c}{\sin x}$$

şeklindedir. Özel çözüm ise,

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ ve } y = -4 \Rightarrow -4 = -\frac{5e^{\cos \frac{\pi}{2}} + c}{\sin \frac{\pi}{2}} \Rightarrow 4 = 5 + c \Rightarrow c = -1 \Rightarrow y = \frac{1 - 5e^{\cos x}}{\sin x}$$

olarak elde edilir.

Örnek 4. $y' + y \tan x = \cos^2 x$ denkleminin $y(0) = 1$ olan çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklem lineer diferansiyel denklemdir.

$$p(x) = \tan x \quad (q(x) = \cos^2 x)$$

olup, integrasyon çarpanı

$$\lambda = e^{\int p(x) dx} = e^{\int \tan x dx} = e^{-\ln \cos x} = \cos^{-1} x = \frac{1}{\cos x}$$

şeklinde bulunur. O halde verilen denklemin her iki tarafını integrasyon çarpanı ile çarparsak

$$\frac{1}{\cos x} (y' + y \tan x) = \frac{1}{\cos x} \cos^2 x \Rightarrow \frac{1}{\cos x} \frac{dy}{dx} + y \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \cos x$$

olup, sol tarafın bir çarpım türevi olduğunu göz önüne alırsak ve integral alırsak,

$$\frac{d}{dx} \left(y \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \cos x \Rightarrow \int d \left(y \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \int \cos x dx \Rightarrow y \cdot \frac{1}{\cos x} = \sin x + c$$

olup genel çözüm,

$$y = \cos x (\sin x + c)$$

şeklindedir. Özel çözüm ise,

$$x = 0 \text{ ve } y = 1 \Rightarrow 1 = \cos 0 (\sin 0 + c) \Rightarrow 1 = c \Rightarrow y = \cos x (\sin x + 1)$$

olarak elde edilir.

Örnek 5. $(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + 4xy = x$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen denklemde y' ifadesinin katsayısını 1 yapalım:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{4xy}{x^2 + 1} = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Böylece diferansiyel denklemin lineer olduğu görülür.

$$p(x) = \frac{4x}{x^2 + 1} \quad \left(q(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \right)$$

olup, integrasyon çarpanı

$$\lambda = e^{\int p(x) dx} = e^{\int \frac{4x}{x^2+1} dx} = e^{2 \ln(x^2+1)} = (x^2 + 1)^2$$

şeklinde bulunur. O halde verilen denklemin her iki tarafını integrasyon çarpanı ile çarparsak

$$(x^2 + 1)^2 \left(\frac{dy}{dx} + \frac{4xy}{x^2 + 1} \right) = (x^2 + 1)^2 \cdot \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow (x^2 + 1)^2 \frac{dy}{dx} + y \cdot 4x (x^2 + 1) = x (x^2 + 1)$$

olup, sol tarafın bir çarpım türevi olduğunu göz önüne alırsak ve integral alırsak,

$$\frac{d}{dx} \left(y \cdot (x^2 + 1)^2 \right) = x^3 + x \Rightarrow \int d \left(y \cdot (x^2 + 1)^2 \right) = \int (x^3 + x) dx$$

$$y \cdot (x^2 + 1)^2 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c$$

olup,

$$y = \frac{\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c}{x^2 + 1} = \frac{x^4 + 2x^2 + c}{4x^2 + 4}$$

genel çözümü bulunur.

Örnek 6. $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + y = \arctan x$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen denklemde y' ifadesinin katsayısını 1 yapalım:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1 + x^2} = \frac{\arctan x}{1 + x^2}$$

Böylece diferansiyel denklemin lineer olduğu görülür.

$$p(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad \left(q(x) = \frac{\arctan x}{1 + x^2} \right)$$

olup, integrasyon çarpanı

$$\lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{1+x^2}dx} = e^{\arctan x}$$

şeklinde bulunur. O halde verilen denklemin her iki tarafını integrasyon çarpanı ile çarparsak

$$e^{\arctan x} \left(\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1+x^2} \right) = e^{\arctan x} \frac{\arctan x}{1+x^2} \Rightarrow e^{\arctan x} \frac{dy}{dx} + \frac{y \cdot e^{\arctan x}}{1+x^2} = \frac{e^{\arctan x} \cdot \arctan x}{1+x^2}$$

olup, sol tarafın bir çarpım türevi olduğunu göz önüne alırsak ve integral alırsak,

$$\frac{d}{dx} (y \cdot e^{\arctan x}) = \frac{e^{\arctan x} \cdot \arctan x}{1+x^2} \Rightarrow \int d(y \cdot e^{\arctan x}) = \underbrace{\int \frac{e^{\arctan x} \cdot \arctan x}{1+x^2} dx}_{I_1}$$

$$\arctan x = t \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = dt \Rightarrow I_1 = \int t e^t dt$$

$$\left. \begin{array}{l} t = u \Rightarrow dt = du \\ e^t dt = dv \Rightarrow e^t = v \end{array} \right\} \Rightarrow I_1 = t e^t - \int e^t dt = t e^t - e^t + c = e^t (t - 1) + c$$

olup,

$$y \cdot e^{\arctan x} = e^{\arctan x} (\arctan x - 1) + c \Rightarrow y = \arctan x - 1 + c e^{-\arctan x}$$

genel çözümü bulunur.

Bernoulli Diferansiyel Denklemleri

Tanım 2. $y' + p(x)y = q(x)y^n$ diferansiyel denklemi Bernoulli diferansiyel denklemdir. Bu denklemi çözmek için y^n ile bölme işlemi ve $y^{1-n} = z$ dönüşümü ile Bernoulli diferansiyel denkleminin lineer diferansiyel denkleme dönüştürülmesiyle bulunur.

Örnek 7. $y' + 2y \tan x = y^2 \cot x$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen denklem Bernoulli diferansiyel denklemdir ve öncelikle bölme yapılarak sağ taraftaki y^2 sadeleştirilmelidir.

$$n = 2 \Rightarrow \frac{y'}{y^2} + \frac{2y \tan x}{y^2} = \frac{y^2 \cot x}{y^2} \Rightarrow y^{-2} y' + 2y^{-1} \tan x = \cot x$$

Şimdi, uygun dönüşüm yapılarak lineer diferansiyel denklem elde edilir.

$$z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2} y'$$

Dönüşüm, verilen denklemde yerine yazılırsa,

$$-z' + 2z \tan x = \cot x \Rightarrow z' - 2z \tan x = -\cot x$$

lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemde,

$$p(x) = -2 \tan x$$

olup, integrasyon çarpanı

$$\lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -2 \tan x dx} = e^{2 \ln(\cos x)} = \cos^2 x$$

şeklinde bulunur. O halde verilen denklemin her iki tarafını integrasyon çarpanı ile çarparsak

$$\cos^2 x \left(\frac{dz}{dx} - 2z \tan x \right) = -\cos^2 x \cot x \Rightarrow \cos^2 x \frac{dz}{dx} - 2z \sin x \cos x = -\frac{\cos^3 x}{\sin x}$$

olup, sol tarafın bir çarpım türevi olduğunu göz önüne alırsak ve integral alırsak,

$$\frac{d}{dx} (z \cdot \cos^2 x) = -\frac{\cos^3 x}{\sin x} \Rightarrow \int d(z \cdot \cos^2 x) = \underbrace{\int -\frac{\cos^3 x}{\sin x} dx}_{I_1}$$

$$I_1 = - \int \frac{\cos x (1 - \sin^2 x)}{\sin x} dx \Rightarrow \sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$$

$$I_1 = - \int \frac{1 - t^2}{t} dt = \int \frac{t^2 - 1}{t} dt = \int \left(t - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{t^2}{2} - \ln t + c = \frac{\sin^2 x}{2} - \ln(\sin x) + c$$

olup,

$$z \cdot \cos^2 x = \frac{\sin^2 x}{2} - \ln(\sin x) + c \Rightarrow z = \frac{\tan^2 x}{2} - \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} + \frac{c}{\cos^2 x}$$

bulunur. $z = y^{-1}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$y^{-1} = \frac{\tan^2 x}{2} - \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} + \frac{c}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{y \tan^2 x}{2} - \frac{y \ln(\sin x)}{\cos^2 x} + \frac{cy}{\cos^2 x} - 1 = 0$$

genel çözümü elde edilir.

Örnek 8. $y' - 2y \sin x = -2y^{\frac{3}{2}} \sin x$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen denklem Bernoulli diferansiyel denklemdir ve öncelikle bölme yapılarak sağ taraftaki $y^{\frac{3}{2}}$ sadeleştirilmelidir.

$$n = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{y'}{y^{\frac{3}{2}}} - \frac{2y \sin x}{y^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2y^{\frac{3}{2}} \sin x}{y^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow y^{-\frac{3}{2}} y' - 2y^{-\frac{1}{2}} \sin x = -2 \sin x$$

Şimdi, uygun dönüşüm yapılarak lineer diferansiyel denklem elde edilir.

$$z = y^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow z' = -\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}y' \quad \left(-2z' = y^{-\frac{3}{2}}y'\right)$$

Dönüşüm, verilen denklemde yerine yazılırsa,

$$-2z' - 2z \sin x = -2 \sin x \Rightarrow z' + z \sin x = \sin x$$

lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemde,

$$p(x) = \sin x$$

olup, integrasyon çarpanı

$$\lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \sin x dx} = e^{-\cos x}$$

şeklinde bulunur. O halde verilen denklemin her iki tarafını integrasyon çarpanı ile çarparsak

$$e^{-\cos x} \left(\frac{dz}{dx} + z \sin x \right) = e^{-\cos x} \sin x \Rightarrow e^{-\cos x} \frac{dz}{dx} + z e^{-\cos x} \sin x = e^{-\cos x} \sin x$$

olup, sol tarafın bir çarpım türevi olduğunu göz önüne alırsak ve integral alırsak,

$$\frac{d}{dx} (z.e^{-\cos x}) = e^{-\cos x} \sin x \Rightarrow \int d(z.e^{-\cos x}) = \int e^{-\cos x} \sin x dx$$

olup,

$$z.e^{-\cos x} = e^{-\cos x} + c \Rightarrow z = \frac{e^{-\cos x}}{e^{-\cos x}} + \frac{c}{e^{-\cos x}} = 1 + ce^{\cos x}$$

bulunur. $z = y^{-\frac{1}{2}}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$y^{-\frac{1}{2}} = 1 + ce^{\cos x}$$

genel çözümü elde edilir.

Örnek 9. $y' + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen denklem Bernoulli diferansiyel denklemdir ve öncelikle bölme yapılarak sağ taraftaki $\sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$ sadeleştirilmelidir.

$$n = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y'}{y^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{(1-x^2)y^{\frac{1}{2}}}y = \frac{x\sqrt{y}}{y^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow y^{-\frac{1}{2}}y' + \frac{xy^{\frac{1}{2}}}{1-x^2} = x$$

Şimdi, uygun dönüşüm yapılarak lineer diferansiyel denklem elde edilir.

$$z = y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow z' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' \quad \left(2z' = y^{-\frac{1}{2}}y'\right)$$

Dönüşüm, verilen denklemde yerine yazılırsa,

$$2z' + \frac{x}{1-x^2}z = x \Rightarrow z' + \frac{x}{2(1-x^2)}z = \frac{x}{2}$$

lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemde,

$$p(x) = \frac{x}{2(1-x^2)}$$

olup, integrasyon çarpanı

$$\lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{x}{2(1-x^2)}dx} = e^{-\frac{\ln(1-x^2)}{4}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{4}}$$

şeklinde bulunur. O halde verilen denklemin her iki tarafını integrasyon çarpanı ile çarparsak

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{dz}{dx} + z \frac{x}{2(1-x^2)} \right) = (1-x^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{x}{2}$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{dz}{dx} + z \frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{4}} x}{2(1-x^2)} = (1-x^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{x}{2}$$

olup, sol tarafın bir çarpım türevi olduğunu göz önüne alırsak ve integral alırsak,

$$\frac{d}{dx} \left(z \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{4}} \right) = (1-x^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{x}{2} \Rightarrow \int d \left(z \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{4}} \right) = \int \left((1-x^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{x}{2} \right) dx$$

olup,

$$z \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{4}} + c \Rightarrow z = -\frac{1}{3} (1-x^2) + c (1-x^2)^{\frac{1}{4}}$$

bulunur. $z = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$3\sqrt{y} = (x^2 - 1) + c (1-x^2)^{\frac{1}{4}}$$

genel çözümü elde edilir.

Riccati Diferansiyel Denklemi

Tanım 3. $y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$ diferansiyel denklemi Riccati diferansiyel denklemdir. Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümü, bir özel çözümünün bilinmesi durumunda bulunabilir. Bu özel çözüm y_1 olmak üzere,

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$$

dönüşümü ile verilen denklem lineer denkleme dönüştürülerek Riccati diferansiyel denkleminin genel çözüm bulunur.

Örnek 10. $y' = (y - x) + e^{-x}(y - x)^2 + 1$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = x$ olmak üzere, denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklem Riccati diferansiyel denklemi olup,

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = x + \frac{1}{u} \quad \left(y - x = \frac{1}{u} \right) \Rightarrow y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$$

dönüşümü yapılırsa,

$$1 - \frac{u'}{u^2} = \frac{1}{u} + e^{-x} \left(\frac{1}{u} \right)^2 + 1 \Rightarrow u' = u + e^{-x} \Rightarrow u' - u = e^{-x}$$

lineer diferansiyel denkleme dönüşür. O halde,

$$p(x) = -1$$

olup, integrasyon çarpanı

$$\lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -1dx} = e^{-x}$$

şeklinde bulunur. O halde verilen denklemin her iki tarafını integrasyon çarpanı ile çarparsak

$$e^{-x} \left(\frac{du}{dx} - u \right) = e^{-x} e^{-x} \Rightarrow e^{-x} \frac{du}{dx} - e^{-x} u = e^{-2x}$$

olup, sol tarafın bir çarpım türevi olduğunu göz önüne alırsak ve integral alırsak,

$$\frac{d}{dx} (u \cdot e^{-x}) = e^{-2x} \Rightarrow \int d(u \cdot e^{-x}) = \int e^{-2x} dx$$

olup,

$$u \cdot e^{-x} = -\frac{e^{-2x}}{2} + c \Rightarrow u = -\frac{e^{-x}}{2} + ce^x$$

bulunur. $u = \frac{1}{y - x}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{1}{y - x} = -\frac{e^{-x}}{2} + ce^x$$

genel çözümü elde edilir.

Örnek 11. $y' + e^{-x}y^2 - 3y + e^x = 0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = e^x$ olmak üzere, denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklem Riccati diferansiyel denklemi olup,

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = e^x + \frac{1}{u} \quad \left(y - e^x = \frac{1}{u} \right) \Rightarrow y' = e^x - \frac{u'}{u^2}$$

dönüşümü yapılırsa,

$$e^x - \frac{u'}{u^2} + e^{-x} \left(e^x + \frac{1}{u} \right)^2 - 3 \left(e^x + \frac{1}{u} \right) + e^x = 0$$

$$e^x - \frac{u'}{u^2} + e^{-x} \left(e^{2x} + \frac{2e^x}{u} + \frac{1}{u^2} \right) - 3e^x - \frac{3}{u} + e^x = 0$$

$$-\frac{u'}{u^2} - \frac{1}{u} + \frac{e^{-x}}{u^2} = 0 \Rightarrow u' + u = e^{-x}$$

lineer diferansiyel denkleme dönüşür. O halde,

$$p(x) = 1$$

olup, integrasyon çarpanı

$$\lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 1dx} = e^x$$

şeklinde bulunur. O halde verilen denklemin her iki tarafını integrasyon çarpanı ile çarparsak

$$e^x \left(\frac{du}{dx} + u \right) = e^x e^{-x} \Rightarrow e^x \frac{du}{dx} + u e^x = 1$$

olup, sol tarafın bir çarpım türevi olduğunu göz önüne alırsak ve integral alırsak,

$$\frac{d}{dx} (u \cdot e^x) = 1 \Rightarrow \int d(u \cdot e^x) = \int dx$$

olup,

$$u \cdot e^x = x + c \Rightarrow u = x e^{-x} + c e^{-x}$$

bulunur. $u = \frac{1}{y - e^x}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{1}{y - e^x} = x e^{-x} + c e^{-x}$$

genel çözümü elde edilir.

Örnek 12. $(1 - x^3) y' - y^2 + x^2 y + 2x = 0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = -x^2$ olmak üzere, denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklem Riccati diferansiyel denklemi olup,

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = -x^2 + \frac{1}{u} \quad \left(y + x^2 = \frac{1}{u} \right) \Rightarrow y' = -2x - \frac{u'}{u^2}$$

dönüşümü yapılırsa,

$$(1 - x^3) \left(-2x - \frac{u'}{u^2} \right) - \left(-x^2 + \frac{1}{u} \right)^2 + x^2 \left(-x^2 + \frac{1}{u} \right) + 2x = 0$$

gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$u' + \frac{3x^2}{x^3 - 1}u = \frac{1}{x^3 - 1}$$

lineer diferansiyel denkleme dönüşür. O halde,

$$p(x) = \frac{3x^2}{x^3 - 1}$$

olup, integrasyon çarpanı

$$\lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{3x^2}{x^3-1}dx} = e^{\ln(x^3-1)} = x^3 - 1$$

şeklinde bulunur. O halde verilen denklemin her iki tarafını integrasyon çarpanı ile çarparsak

$$(x^3 - 1) \left(\frac{du}{dx} + \frac{3x^2}{x^3 - 1}u \right) = (x^3 - 1) \frac{1}{x^3 - 1} \Rightarrow (x^3 - 1) \frac{du}{dx} + 3x^2u = 1$$

olup, sol tarafın bir çarpım türevi olduğunu göz önüne alırsak ve integral alırsak,

$$\frac{d}{dx} (u \cdot (x^3 - 1)) = 1 \Rightarrow \int d(u \cdot (x^3 - 1)) = \int dx$$

olup,

$$u \cdot (x^3 - 1) = x + c \Rightarrow u = \frac{x}{x^3 - 1} + \frac{c}{x^3 - 1}$$

bulunur. $u = \frac{1}{y + x^2}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{1}{y + x^2} = \frac{x}{x^3 - 1} + \frac{c}{x^3 - 1} \Rightarrow (y + x^2)(x + c) - x^3 + 1 = 0$$

genel çözümü elde edilir.