

Diferansiyel Denklemler - 2. Uygulama

Homojen Diferansiyel Denklemler

Tanım 1. $f(x, y)$ iki değişkenli fonksiyon olsun. $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ ise $f(x, y)$ fonksiyonuna n . dereceden homojen fonksiyon denir.

Tanım 2. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Eğer $M(x, y)$ ve $N(x, y)$ fonksiyonları aynı dereceden homojen fonksiyonlar ise verilen diferansiyel denklemi homojen diferansiyel denklemdir. Homojen denklemi çözmek için

$$y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$$

dönüşümü yapılır. Homojen diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denkleme dönüşür ve genel çözüm bulunur.

Örnek 1. $\left(x + y \sin \frac{y}{x}\right) dx - x \sin \frac{y}{x} dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Denklem 1. dereceden homojen diferansiyel denklemdir.

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$$

dönüşümü yapalım. Bu dönüşüm diferansiyel denkleme uygulanırsa,

$$(x + ux \sin u) dx - x \sin u (udx + xdu) = 0$$

elde edilir. Diferansiyel denklem dx ve du bileşenlerine göre düzenlenirse,

$$(x + ux \sin u - ux \sin u) dx - x^2 \sin u du = 0 \Rightarrow x dx - x^2 \sin u du = 0$$

bulunur. Böylece denklem,

$$\frac{dx}{x} - \sin u du = 0$$

şeklinde değişkenlerine ayrılır. İntegral alınırsa,

$$\int \frac{dx}{x} - \int \sin u du = c \Rightarrow \ln x + \cos u = c$$

bulunur. Değişken dönüşümü tekrar uygulanırsa $\left(\frac{y}{x} = u\right)$,

$$\ln x + \cos \frac{y}{x} = c$$

genel çözümüne ulaşılır.

Örnek 2. $\left(xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}\right) dx - x^2 dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Denklem 2. dereceden homojen diferansiyel denklemdir.

$$\frac{x}{y} = u \Rightarrow x = uy \Rightarrow dx = udy + ydu$$

dönüşümü yapılır. Bu dönüşüm verilen denklemde yerine yazılırsa,

$$(uy^2 + y^2e^{-u})(udy + ydu) - u^2y^2dy = 0$$

denklemi elde edilir. Denklemin sadeleşmesi için her iki taraf y^2 ile bölünürse,

$$(u + e^{-u})(udy + ydu) - u^2dy = 0$$

denklemi bulunur. dy ve du ifadelerine göre paranteze alınır,

$$(u^2 + ue^{-u} - u^2)dy + y(u + e^{-u})du = 0 \Rightarrow (ue^{-u})dy = -y(u + e^{-u})du$$

şekline gelir. Bu denklem değişkenlerine,

$$\frac{dy}{y} = -\left(e^u + \frac{1}{u}\right)du$$

şeklinde ayrılır. Buradan integrale geçilirse,

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \left(e^u + \frac{1}{u}\right)du \Rightarrow \ln y = -(e^u + \ln u) + c$$

elde edilir. Düzenleme yapılırsa,

$$\ln(uy) + e^u = c \quad \left(u = \frac{x}{y}\right) \Rightarrow \ln x + e^{\frac{x}{y}} = c$$

genel çözümüne ulaşılır.

Örnek 3. $\left(x - y - y\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dx + (x + \sqrt{xy})dy = 0$ denkleminin $y(1) = 1$ olan çözümünü bulunuz.

Çözüm. Denklem 1. dereceden homojen diferansiyel denklemdir.

$$y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$$

dönüşümü yapalım. Bu dönüşüm diferansiyel denkleme uygulanırsa,

$$(x - ux - ux\sqrt{u})dx + (x + \sqrt{ux^2})(udx + xdu) = 0$$

elde edilir. Diferansiyel denklem düzenlenirse,

$$x(1 - u - u\sqrt{u})dx + x(1 + \sqrt{u})(udx + xdu) = 0$$

$$\left(1 - u - u^{\frac{3}{2}}\right) dx + (1 + \sqrt{u}) (udx + xdu) = 0$$

$$dx + x (1 + \sqrt{u}) du = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} + (1 + \sqrt{u}) du = 0$$

şeklinde değişkenlerine ayrılır. Böylece, integral alınırsa,

$$\int \frac{dx}{x} + \int \left(1 + u^{\frac{1}{2}}\right) du = c \Rightarrow \ln x + u + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} = c$$

bulunur. Düzenleme yapılırsa,

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow \ln x + \frac{y}{x} + \frac{2}{3} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}} = c$$

genel çözümü elde edilir. Buradan,

$$x = 1 \text{ ve } y = 1 \Rightarrow \ln 1 + 1 + \frac{2}{3} = c \Rightarrow c = \frac{5}{3}$$

olup,

$$3 \ln x + \frac{3y}{x} + 2 \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}} = 5$$

özel çözümü elde edilir.

Örnek 4. $y\sqrt{x^2 + y^2}dx - x(x + \sqrt{x^2 + y^2})dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Denklem 2. dereceden homojen diferansiyel denklemdir.

$$y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$$

dönüşümü yapılır. Bu dönüşüm verilen denklemde yerine yazılırsa,

$$ux\sqrt{x^2 + u^2x^2}dx - x(x + \sqrt{x^2 + u^2x^2})(udx + xdu) = 0$$

denklemini bulunur. Denklem düzenlenirse (x ler toparlanıp her iki taraf x^2 ye bölünürse),

$$ux^2\sqrt{1 + u^2}dx - x^2(1 + \sqrt{1 + u^2})(udx + xdu) = 0$$

$$u\sqrt{1 + u^2}dx - (1 + \sqrt{1 + u^2})(udx + xdu) = 0$$

denklemini bulunur. dx ve du ifadelerine göre paranteze alınırsa,

$$(u\sqrt{1 + u^2} - u - u\sqrt{1 + u^2})dx - x(1 + \sqrt{1 + u^2})du = 0$$

$$-udx - x(1 + \sqrt{1 + u^2})du = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{(1 + \sqrt{1 + u^2})du}{u} = 0$$

şeklinde değişkenlerine ayrılır. İntegral alınırsa,

$$\int \frac{dx}{x} + \int \left(\frac{1}{u} + \frac{\sqrt{1+u^2}}{u} \right) du = c \Rightarrow \ln x + \ln u + \underbrace{\int \frac{\sqrt{1+u^2}}{u} du}_{I_1} = c$$

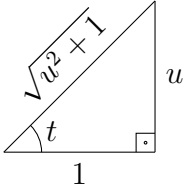
Öncelikle I_1 integralini çözelim. Bunun için trigonometrik dönüşüm yapılmalıdır.

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{1+u^2}}{u} du \Rightarrow u = \tan t, \quad du = \sec^2 t dt \Rightarrow I_1 = \int \frac{\sqrt{1+\tan^2 t}}{\tan t} \sec^2 t dt$$

$$I_1 = \int \frac{\sec t}{\tan t} \sec^2 t dt = \int \csc t \sec^2 t dt \quad \begin{cases} \csc t = a & \sec^2 t dt = db \\ -\cot t \csc t dt = da & \tan t = b \end{cases}$$

$$I_1 = \csc t \tan t + \int \tan t \cot t \csc t dt = \sec t + \int \csc t dt = \sec t - \ln(\csc t + \cot t) + c_1$$

İntegral bulunduğuna göre, değişkenler tekrar dönüştürülmelidir. Trigonometrik dönüşüm kullanıldığından üçgen çizerek açığa karşılık gelen trigonometrik değerler yerlerine yazılır.



$$I_1 = \sqrt{u^2 + 1} - \ln \left(\frac{\sqrt{u^2 + 1}}{u} + \frac{1}{u} \right) + c_1$$

Bulunan I_1 yerine yazılırsa,

$$\ln(ux) + \sqrt{u^2 + 1} - \ln \left(\frac{1 + \sqrt{u^2 + 1}}{u} \right) = c \quad \left(u = \frac{y}{x} \right)$$

elde edilir. Buradan, u için tekrar bir geri dönüşüm yapılsa,

$$\ln y + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} - \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1}}{\frac{y}{x}} \right) = c \Rightarrow \ln y + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} - \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} \right)$$

bulunur ve düzenleme yapılırsa,

$$\ln y + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} - \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} \right) = c$$

veya

$$2x \ln y + \sqrt{x^2 + y^2} - x \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) - cx = 0$$

genel çözümüne ulaşılır.

Homojen Hale Dönüştürülebilen Diferansiyel Denklemler

Tanım 3. $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ formundaki diferansiyel denklemler homojen diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Bu tip denklemleri çözmek için;

1. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ ise $x = u + h, y = v + k$ dönüşümü yapılır. Homojen diferansiyel denklem elde edilir.
2. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ ise $ax + by = t$ dönüşümü yapılır. Homojen diferansiyel denklem elde edilir.

Örnek 5. $(2x - 5y + 5)dx + (4x - y + 1)dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Denklem sabitlerden dolayı homojen değildir. Öncelikle, x ve y değişkenlerinin lineer bağımsızlığını inceleyelim.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 20 = 18 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = u + h & \Rightarrow dx = du \\ y = v + k & \Rightarrow dy = dv \end{cases}$$

Sabitleri yok edebilmek için öncelikle h ve k değerlerini bulalım:

$$\begin{cases} 2h - 5k + 5 = 0 \\ 4h - k + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 0 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u & \Rightarrow u = x \\ y = v + 1 & \Rightarrow v = y - 1 \end{cases}$$

Bu dönüşümler verilen denkleme uygulanırsa,

$$(2u - 5v)du + (4u - v)dv = 0$$

1. dereceden homojen diferansiyel denklemi elde edilmiş olur. Bu denkleme

$$v = ut \Rightarrow dv = tdu + udt$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$(2u - 5ut)du + (4u - ut)(tdu + udt) = 0 \Rightarrow (2 - 5t)du + (4 - t)(tdu + udt) = 0$$

denklemi bulunur. Denklem düzenlenirse,

$$(2 - t - t^2)du + u(4 - t)dt = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} + \frac{4 - t}{2 - t - t^2}dt = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} + \frac{t - 4}{t^2 + t - 2}dt = 0$$

$$\frac{t - 4}{t^2 + t - 2} = \frac{t - 4}{(t - 1)(t + 2)} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t + 2} = \frac{A(t + 2)}{(t - 1)(t + 2)} + \frac{B(t - 1)}{(t - 1)(t + 2)}$$

$$At + 2A + Bt - B = t - 4 \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ 2A - B = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases}$$

Değişkenlerine ayrılmış olan denklemin integrali alınırsa,

$$\int \frac{du}{u} + \int \left(\frac{-1}{t-1} + \frac{2}{t+2} \right) dt = c \Rightarrow \ln u - \ln(t-1) + 2 \ln(t+2) = \ln c$$

$$\ln \left(\frac{u(t+2)^2}{t-1} \right) = \ln c \Rightarrow \frac{u(t+2)^2}{t-1} = c \quad \left(t = \frac{v}{u} \right) \Rightarrow \frac{u \left(\frac{v}{u} + 2 \right)^2}{\frac{v}{u} - 1} = c$$

$$\frac{(2u+v)^2}{v-u} = c \quad \left(\begin{array}{l} u = x \\ v = y-1 \end{array} \right) \Rightarrow \frac{(2x+y-1)^2}{y-x-1} = c$$

genel çözümü elde edilir.

Örnek 6. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y+3}{-2x+y+2}$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Denklem sabitlerden dolayı homojen değildir. Öncelikle, x ve y değişkenlerinin lineer bağımsızlığını inceleyelim.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y = t \Rightarrow 2dx - dy = dt \Rightarrow dy = 2dx - dt$$

Bu dönüşüm verilen denkleme uygulanırsa,

$$\frac{2dx - dt}{dx} = \frac{t+3}{2-t} \Rightarrow (2-t)(2dx - dt) - (t+3)dx = 0 \Rightarrow (1-3t)dx + (t-2)dt = 0$$

1. dereceden homojen diferansiyel denklemi elde edilmiş olur. Bu denklem,

$$dx + \frac{t-2}{1-3t} dt = 0 \quad \left(\begin{array}{l} t-2 \\ t-\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{l} 1-3t \\ -\frac{1}{3} \end{array} \right) \Rightarrow dx + \left(-\frac{1}{3} + \frac{-5}{3(1-3t)} \right) dt = 0$$

şeklinde değişkenlerine ayrılır. İntegral alınırsa,

$$\int dx + \int \left(-\frac{1}{3} + \frac{-5}{3(1-3t)} \right) dt = c \Rightarrow x - \frac{t}{3} + \frac{5}{9} \ln(1-3t) = c$$

denklemi bulunur. Denklem düzenlenirse ($t = 2x - y$),

$$\Rightarrow x - \frac{2x-y}{3} + \frac{5}{9} \ln(1-3(2x-y)) = c \Rightarrow 3x + 3y + 5 \ln(3y - 6x + 1) = c$$

genel çözümü bulunur.

Tam Diferansiyel Denklemler

Tanım 4. $u = u(x, y)$ iki değişkenli bir fonksiyon olsun. $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ ifadesine $u = u(x, y)$ fonksiyonunun tam diferansiyeli denir. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ denklemi tam diferansiyel denkleminde $\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ kısmi türevleri mevcut ve $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ise bu diferansiyel denklem tam diferansiyel denklemdir.

Örnek 7. $(2xy^2 - y \sin x + 2x - 1) dx + \left(2x^2y + \cos x + \frac{1}{y}\right) dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen diferansiyel denklemin tam diferansiyel denklem olup olmadığını kontrol edelim.

$$\left. \begin{array}{l} M(x, y) = 2xy^2 - y \sin x + 2x - 1 \\ N(x, y) = 2x^2y + \cos x + \frac{1}{y} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M_y = 4xy - \sin x \\ N_x = 4xy - \sin x \end{array} \right\} \Rightarrow M_y = N_x$$

Verilen denklem bir tam diferansiyel denklemdir. Yani,

$$(2xy^2 - y \sin x + 2x - 1) dx + \left(2x^2y + \cos x + \frac{1}{y}\right) dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

formundadır. O halde, $M(x, y)$ fonksiyonunu ele alalım. Önce x e göre integral alarak $u(x, y)$ fonksiyonunu bulalım.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^2 - y \sin x + 2x - 1 \Rightarrow \int \partial u = \int (2xy^2 - y \sin x + 2x - 1) dx$$

$$u(x, y) = x^2y^2 + y \cos x + x^2 - x + R(y)$$

Burada, integralden c sabiti yerine $R(y)$ fonksiyonunun varlığına dikkat edilmelidir. Şimdi, elde edilen integrantın (u fonksiyonu) y ye göre türevini almalıyız.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2y + \cos x + \frac{dR}{dy} = 2x^2y + \cos x + \frac{1}{y} = N(x, y) \Rightarrow \frac{dR}{dy} = \frac{1}{y} \Rightarrow R(y) = \ln y + k$$

Elde edilen $R(y)$ fonksiyonunu $u(x, y)$ fonksiyonunda yerine yazarsak,

$$u(x, y) = x^2y^2 + y \cos x + x^2 - x + \ln y = c$$

genel çözümü elde edilir.

Örnek 8. $(e^{xy} + xye^{xy}) dx + x^2e^{xy}dy = 0$ denkleminin $y(1) = 1$ olan özel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Öncelikle verilen diferansiyel denklemin tam diferansiyel denklem olup olmadığını kontrol edelim.

$$\left. \begin{array}{l} M(x, y) = e^{xy} + xye^{xy} \\ N(x, y) = x^2e^{xy} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M_y = xe^{xy} + xe^{xy} + x^2ye^{xy} = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy} \\ N_x = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy} \end{array} \right\} \Rightarrow M_y = N_x$$

Verilen denklem bir tam diferansiyel denklemdir. Yani,

$$(e^{xy} + xy e^{xy}) dx + x^2 e^{xy} dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

formundadır. O halde, $N(x, y)$ fonksiyonunu ele alalım. Önce y ye göre integral alarak $u(x, y)$ fonksiyonunu bulalım.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 e^{xy} \Rightarrow \int \partial u = \int (x^2 e^{xy}) dy$$

$$u(x, y) = \frac{x^2 e^{xy}}{x} + R(x) = x e^{xy} + R(x)$$

Burada, integralden c sabiti yerine $R(x)$ fonksiyonunun varlığına dikkat edilmelidir. Şimdi, elde edilen integrantın (u fonksiyonu) x e göre türevini almalıyız.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{xy} + xy e^{xy} + \frac{dR}{dx} = e^{xy} + xy e^{xy} = M(x, y) \Rightarrow \frac{dR}{dx} = 0 \Rightarrow R(x) = k$$

Elde edilen $R(x)$ fonksiyonunu $u(x, y)$ fonksiyonunda yerine yazarsak,

$$u(x, y) = x e^{xy} = c$$

genel çözümü elde edilir. Özel çözüm,

$$x = 1 \text{ ve } y = 1 \Rightarrow 1e^1 = c \Rightarrow c = e \Rightarrow x e^{xy} = e$$

olarak bulunur.

Örnek 9. $(y^2 e^{xy^2} + 4x^3) dx + (2xy e^{xy^2} - 3y^2) dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen diferansiyel denklemin tam diferansiyel denklem olup olmadığını kontrol edelim.

$$\left. \begin{array}{l} M(x, y) = y^2 e^{xy^2} + 4x^3 \\ N(x, y) = 2xy e^{xy^2} - 3y^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M_y = 2y e^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2} = 2y e^{xy^2} (1 + xy^2) \\ N_x = 2y e^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2} = 2y e^{xy^2} (1 + xy^2) \end{array} \right\} \Rightarrow M_y = N_x$$

Verilen denklem bir tam diferansiyel denklemdir. Yani,

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3) dx + (2xy e^{xy^2} - 3y^2) dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

formundadır. O halde, $N(x, y)$ fonksiyonunu ele alalım. Önce y ye göre integral alarak $u(x, y)$ fonksiyonunu bulalım.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy e^{xy^2} - 3y^2 \Rightarrow \int \partial u = \int (2xy e^{xy^2} - 3y^2) dy = \int \underbrace{2xy e^{xy^2} dy}_{I_1} - \int 3y^2 dy$$

$$I_1 = \int 2xye^{xy^2} dy \quad xy^2 = t \Rightarrow 2xydy = dt \Rightarrow I_1 = \int e^t dt = e^t = e^{xy^2}$$

$$u(x, y) = e^{xy^2} - y^3 + R(x)$$

Burada, integralden c sabiti yerine $R(x)$ fonksiyonunun varlığına dikkat edilmelidir. Şimdi, elde edilen integrantın (u fonksiyonu) x e göre türevini almalıyız.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 e^{xy^2} + \frac{dR}{dx} = y^2 e^{xy^2} + 4x^3 = M(x, y) \Rightarrow \frac{dR}{dx} = 4x^3 \Rightarrow R(x) = x^4 + k$$

Elde edilen $R(x)$ fonksiyonunu $u(x, y)$ fonksiyonunda yerine yazarsak,

$$u(x, y) = e^{xy^2} - y^3 + x^4 = c$$

genel çözümü elde edilir.

İntegral Çarpanı ile Tam Diferansiyel Hale Getirme

Tanım 5. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ denkleminde $M_y \neq N_x$ ise denklem tam diferansiyel denklem değildir. Denklemin her iki yanı $\lambda(x, y)$ ile çarpıldığında, elde edilen $\lambda(x, y)M(x, y)dx + \lambda(x, y)N(x, y)dy = 0$ denklemi tam diferansiyel denklem ise $\lambda(x, y)$ fonksiyonuna integrasyon çarpanı denir.

- İntegrasyon çarpanı x e bağlı ise, $\ln \lambda = \int \frac{M_y - N_x}{N} dx$
- İntegrasyon çarpanı y ye bağlı ise, $\ln \lambda = \int \frac{N_x - M_y}{M} dy$

Örnek 10. $(xy^4 + y) dx + (x^2y^3 - x) dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen diferansiyel denklemin tam diferansiyel denklem olup olmadığını kontrol edelim.

$$\left. \begin{array}{l} M(x, y) = xy^4 + y \\ N(x, y) = x^2y^3 - x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M_y = 4xy^3 + 1 \\ N_x = 2xy^3 - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow M_y \neq N_x$$

Verilen denklem bir tam diferansiyel denklem değildir. O halde, bir integrasyon çarpanı bulmalıyız.

$$\ln \lambda = \int \frac{N_x - M_y}{M} dy = \int \frac{2xy^3 - 1 - 4xy^3 - 1}{xy^4 + y} dy = \int \frac{-2(xy^3 + 1)}{y(xy^3 + 1)} dy = \int \frac{-2}{y} dy$$

$$\ln \lambda = -2 \ln y \Rightarrow \lambda = y^{-2}$$

Verilen denklemi bu integral çarpanı ile çarparsak denklem,

$$(xy^2 + y^{-1}) dx + (x^2y - xy^{-2}) dy = 0$$

haline gelir. Bu denklemin tam diferansiyel olup olmadığını kontrol edelim.

$$\left. \begin{array}{l} M_1(x, y) = xy^2 + y^{-1} \\ N_1(x, y) = x^2y - xy^{-2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M_{1y} = 2xy - y^{-2} \\ N_{1x} = 2xy - y^{-2} \end{array} \right\} \Rightarrow M_{1y} = N_{1x}$$

Denklem bu haliyle bir tam diferansiyeldir. Yani,

$$(xy^2 + y^{-1}) dx + (x^2y - xy^{-2}) dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

formundadır. O halde, $M_1(x, y)$ fonksiyonunu ele alalım. Önce x e göre integral alarak $u(x, y)$ fonksiyonunu bulalım.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xy^2 + y^{-1} \Rightarrow \int \partial u = \int (xy^2 + y^{-1}) dx$$

İntegral alındığında,

$$u(x, y) = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x}{y} + R(y)$$

elde edilir. Burada, integralden c sabiti yerine $R(y)$ fonksiyonunun varlığına dikkat edilmelidir. Şimdi, elde edilen integrantın (u fonksiyonu) y ye göre türevini almalıyız.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2y - \frac{x}{y^2} + \frac{dR}{dy} = x^2y - xy^{-2} = N_1(x, y) \Rightarrow \frac{dR}{dy} = 0 \Rightarrow R(y) = k$$

Elde edilen $R(y)$ fonksiyonunu $u(x, y)$ fonksiyonunda yerine yazarsak,

$$u(x, y) = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x}{y} = c$$

genel çözümü elde edilir.

Örnek 11. $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) dx + (x^2 + y^2) dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen diferansiyel denklemin tam diferansiyel denklem olup olmadığını kontrol edelim.

$$\left. \begin{array}{l} M(x, y) = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \\ N(x, y) = x^2 + y^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M_y = 2x + x^2 + y^2 \\ N_x = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow M_y \neq N_x$$

Verilen denklem bir tam diferansiyel denklem değildir. O halde, bir integrasyon çarpanı

bulmalıyız.

$$\ln \lambda = \int \frac{M_y - N_x}{N} dx = \int \frac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} dx = \int dx \Rightarrow \ln \lambda = x \Rightarrow \lambda = e^x$$

Verilen denklemi bu integral çarpanı ile çarparsak denklem,

$$\left(2xye^x + x^2ye^x + \frac{y^3}{3}e^x \right) dx + (x^2e^x + y^2e^x) dy = 0$$

haline gelir. Bu denklemin tam diferansiyel olup olmadığını kontrol edelim.

$$\left. \begin{array}{l} M_1(x, y) = 2xye^x + x^2ye^x + \frac{y^3}{3}e^x \\ N_1(x, y) = x^2e^x + y^2e^x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M_{1y} = 2xe^x + x^2e^x + y^2e^x \\ N_{1x} = 2xe^x + x^2e^x + y^2e^x \end{array} \right\} \Rightarrow M_{1y} = N_{1x}$$

Denklem bu haliyle bir tam diferansiyeldir. Yani,

$$\left(2xye^x + x^2ye^x + \frac{y^3}{3}e^x \right) dx + (x^2e^x + y^2e^x) dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

formundadır. O halde, $N_1(x, y)$ fonksiyonunu ele alalım. Önce y ye göre integral alarak $u(x, y)$ fonksiyonunu bulalım.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2e^x + y^2e^x \Rightarrow \int \partial u = \int (x^2e^x + y^2e^x) dy$$

İntegral alındığında,

$$u(x, y) = x^2ye^x + \frac{y^3}{3}e^x + R(x)$$

elde edilir. Burada, integralden c sabiti yerine $R(x)$ fonksiyonunun varlığına dikkat edilmelidir. Şimdi, elde edilen integrantın (u fonksiyonu) x e göre türevini almalıyız.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xye^x + x^2ye^x + \frac{y^3}{3}e^x + \frac{dR}{dx} = 2xye^x + x^2ye^x + \frac{y^3}{3}e^x = M_1(x, y) \Rightarrow \frac{dR}{dx} = 0 \Rightarrow R(x) = k$$

Elde edilen $R(x)$ fonksiyonunu $u(x, y)$ fonksiyonunda yerine yazarsak,

$$u(x, y) = x^2ye^x + \frac{y^3}{3}e^x = c$$

genel çözümü elde edilir.

Örnek 12. $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y) dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x) dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen diferansiyel denklemin tam diferansiyel denklem olup olmadığını

kontrol edelim.

$$\left. \begin{aligned} M(x, y) &= 2xy^4e^y + 2xy^3 + y \\ N(x, y) &= x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} M_y &= 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1 \\ N_x &= 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_y \neq N_x$$

Verilen denklem bir tam diferansiyel denklem değildir. O halde, bir integrasyon çarpanı bulmalıyız.

$$\begin{aligned} \ln \lambda &= \int \frac{N_x - M_y}{M} dy = \int \frac{2xy^4e^y - 2xy^2 - 3 - 8xy^3e^y - 2xy^4e^y - 6xy^2 - 1}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y} dy \\ &= \int \frac{-8xy^3e^y - 8xy^2 - 4}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y} dy = \int -\frac{4}{y} dy \Rightarrow \ln \lambda = -4 \ln y \Rightarrow \lambda = y^{-4} \end{aligned}$$

Verilen denklemi bu integral çarpanı ile çarparsak denklem,

$$\left(2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3} \right) dx + \left(x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4} \right) dy = 0$$

haline gelir. Bu denklemin tam diferansiyel olup olmadığını kontrol edelim.

$$\left. \begin{aligned} M_1(x, y) &= 2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3} \\ N_1(x, y) &= x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} M_{1y} &= 2xe^y - \frac{2x}{y^2} - \frac{3}{y^4} \\ N_{1x} &= 2xe^y - \frac{2x}{y^2} - \frac{3}{y^4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_{1y} = N_{1x}$$

Denklem bu haliyle bir tam diferansiyeldir. Yani,

$$\left(2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3} \right) dx + \left(x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4} \right) dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

formundadır. O halde, $M_1(x, y)$ fonksiyonunu ele alalım. Önce x e göre integral alarak $u(x, y)$ fonksiyonunu bulalım.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3} \Rightarrow \int \partial u = \int \left(2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3} \right) dx$$

İntegral alındığında,

$$u(x, y) = x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + R(y)$$

elde edilir. Burada, integralden c sabiti yerine $R(y)$ fonksiyonunun varlığına dikkat edilmelidir. Şimdi, elde edilen integrantın (u fonksiyonu) y ye göre türevini almalıyız.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4} + \frac{dR}{dy} = x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4} = N_1(x, y) \Rightarrow \frac{dR}{dy} = 0 \Rightarrow R(y) = k$$

Elde edilen $R(y)$ fonksiyonunu $u(x, y)$ fonksiyonunda yerine yazarsak,

$$u(x, y) = x^2 e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = c$$

genel çözümü elde edilir.