Diferansiyel Denklemler - Son Uygulama

Diferansiyel Denklemlerin Laplace Dönüşümü ile Çözümü

Örnek 1. $y'' + 16y = 5\sin t$ diferansiyel denklemini $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ başlangıç koşulları altında Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.

Çözüm. Her iki tarafa Laplace dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{L}\{y''\} + 16\mathcal{L}\{y\} = 5\mathcal{L}\{\sin t\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 16Y(s) = \frac{5}{s^2+1}$$

Başlangıç değerlerini yerine yazıp $Y(s)$ ifadesini yalnız bırakalım.

$$\left(s^2+16\right)Y(s) = \frac{5}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{5}{(s^2+1)(s^2+16)}$$

$$\frac{5}{(s^2+1)(s^2+16)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+16}$$

$$(A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (16A+C)s + 16B + D = 5$$

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{3}$$

$$Y(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{s^2+16}$$

Şimdi, ters Laplace dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+16}\right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{12}\sin(4t)$$

Örnek 2. $y'' + 2y' + y = te^{-t}$ diferansiyel denklemini $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ başlangıç koşulları altında Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.

Çözüm. Her iki tarafa Laplace dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = 5\mathcal{L}\left\{te^{-t}\right\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2sY(s) - 2y(0) + Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Başlangıç değerlerini yerine yazıp $Y(s)$ ifadesini yalnız bırakalım.

$$\left(s^2+2s+1\right)Y(s)=\frac{1}{(s+1)^2}+s+4 \quad \Rightarrow \quad Y(s)=\frac{1}{(s+1)^4}+\frac{s+1+3}{(s+1)^2}$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s+1)^4}+\frac{1}{(s+1)}+\frac{3}{(s+1)^2}$$

Şimdi, ters Laplace dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^4}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}$$

$$y(t)=\frac{1}{3!}t^3e^{-t}+e^{-t}+3te^{-t}=\frac{1}{6}e^{-t}\left(t^3+18t+6\right)$$

Örnek 3. $y''+2y'+5y=e^{-t}\sin t$ diferansiyel denklemini $y(0)=0$, $y'(0)=1$ başlangıç koşulları altında Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.

Çözüm. Her iki tarafa Laplace dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{L}\left\{y''\right\}+2\mathcal{L}\left\{y'\right\}+5\mathcal{L}\left\{y\right\}=\mathcal{L}\left\{e^{-t}\sin t\right\}$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2sY(s)-2y(0)+5Y(s)=\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

Başlangıç değerlerini yerine yazıp $Y(s)$ ifadesini yalnız bırakalım.

$$\left(s^2+2s+5\right)Y(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}+1 \quad \Rightarrow \quad Y(s)=\frac{s^2+2s+3}{\left(s^2+2s+2\right)\left(s^2+2s+5\right)}$$

$$\frac{s^2+2s+3}{\left(s^2+2s+2\right)\left(s^2+2s+5\right)}=\frac{As+B}{s^2+2s+2}+\frac{Cs+D}{s^2+2s+5}$$

$$(A+C)s^3+(2A+B+2C+D)s^2+(2A+2B+5C+2D)s+2B+5D=s^2+2s+3$$

$$A=0, \quad B=\frac{2}{3}, \quad C=0, \quad D=\frac{1}{3}$$

$$Y(s)=\frac{2}{3}\frac{1}{\left(s^2+2s+2\right)}+\frac{1}{3}\frac{1}{\left(s^2+2s+5\right)}$$

Şimdi, ters Laplace dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}=\frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}+\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\}$$

$$y(t)=\frac{2}{3}e^{-t}\sin t+\frac{1}{6}e^{-t}\sin(2t)$$

Örnek 4. $y'' - 3y' + 2y = 4t - 6$ diferansiyel denklemini $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ başlangıç koşulları altında Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.

Çözüm. Her iki tarafa Laplace dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = 4\mathcal{L}\{t\} - 6\mathcal{L}\{1\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3sY(s) + 3y(0) + 2Y(s) = \frac{4}{s^2} - \frac{6}{s}$$

Başlangıç değerlerini yerine yazıp $Y(s)$ ifadesini yalnız bırakalım.

$$\left(s^2 - 3s + 2\right)Y(s) = \frac{4}{s^2} - \frac{6}{s} + s \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{s^3 - 6s + 4}{s^2\left(s^2 - 3s + 2\right)}$$

$$\frac{s^3 - 6s + 4}{s^2(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s-2}$$

$$(s-1)(s-2)A + s(s-1)(s-2)B + s^2(s-2)C + s^2(s-1)D = s^3 - 6s + 4$$

$$s = 0 \Rightarrow 2A = 4 \Rightarrow A = 2 \qquad s = 1 \Rightarrow -C = -1 \Rightarrow C = 1 \qquad s = 2 \Rightarrow 4D = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$(B + C + D)s^3 = s^3 \quad \Rightarrow \quad B + 1 + 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s-1}$$

Şimdi, ters Laplace dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$y(t) = 2t + e^t$$

Örnek 5. $y'' - 2y' + 2y = 3e^t\cos(2t)$ diferansiyel denklemini $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ başlangıç koşulları altında Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.

Çözüm. Her iki tarafa Laplace dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = 3\mathcal{L}\left\{e^t\cos(2t)\right\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2sY(s) + 2y(0) + 2Y(s) = 3\frac{s-1}{(s-1)^2 + 4}$$

Başlangıç değerlerini yerine yazıp $Y(s)$ ifadesini yalnız bırakalım.

$$\left(s^2 - 2s + 2\right)Y(s) = \frac{3(s-1)}{s^2 - 2s + 5} + 1 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{s^2 + s + 2}{\left(s^2 - 2s + 5\right)\left(s^2 - 2s + 2\right)}$$

$$\frac{s^2+s+2}{(s^2-2s+5)(s^2-2s+2)}=\frac{As+B}{s^2-2s+5}+\frac{Cs+D}{s^2-2s+2}$$

$$(A+C)s^3+(-2A+B-2C+D)s^2+(2A-2B+5C-2D)s+2B+5D=s^2+s+2$$

$$A=-1,\quad B=1,\quad C=1,\quad D=0$$

$$Y(s)=-\frac{s-1}{(s-1)^2+4}+\frac{s}{(s-1)^2+1}=-\frac{s-1}{(s-1)^2+4}+\frac{s-1}{(s-1)^2+1}+\frac{1}{(s-1)^2+1}$$

Şimdi, ters Laplace dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}=-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+1}\right\}$$

$$y(t)=-e^t\cos(2t)+e^t\cos t+e^t\sin t$$

Örnek 6. $y''+y'-2y=3\cos(3t)-11\sin(3t)$ diferansiyel denklemini $y(0)=0$, $y'(0)=6$ başlangıç koşulları altında Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.

Çözüm. Her iki tarafa Laplace dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{L}\left\{y''\right\}+\mathcal{L}\left\{y'\right\}-2\mathcal{L}\left\{y\right\}=3\mathcal{L}\left\{\cos(3t)\right\}-11\mathcal{L}\left\{\sin(3t)\right\}$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+sY(s)-y(0)-2Y(s)=3\frac{s}{s^2+9}-11\frac{3}{s^2+9}$$

Başlangıç değerlerini yerine yazıp $Y(s)$ ifadesini yalnız bırakalım.

$$\left(s^2+s-2\right)Y(s)=\frac{3s-33}{s^2+9}+6\quad\Rightarrow\quad Y(s)=\frac{6s^2+3s+21}{(s^2+9)(s^2+s-2)}$$

$$\frac{6s^2+3s+21}{(s^2+9)(s+2)(s-1)}=\frac{As+B}{s^2+9}+\frac{C}{s+2}+\frac{D}{s-1}$$

$$(s+2)(s-1)(As+B)+\left(s^2+9\right)(s-1)C+\left(s^2+9\right)(s+2)D=6s^2+3s+21$$

$$s=-2\Rightarrow-39C=39\Rightarrow C=-1\qquad s=1\Rightarrow30D=30\Rightarrow D=1$$

$$s=0\Rightarrow-2B-9C+18D=21\Rightarrow-2B+9+18=21\Rightarrow-2B=-6\Rightarrow B=3$$

$$s=2\Rightarrow8A+4B+13C+52D=51\Rightarrow8A+12-13+52=51\Rightarrow8A=0\Rightarrow A=0$$

$$Y(s)=\frac{3}{s^2+9}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s-1}$$

Şimdi, ters Laplace dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$y(t) = \sin(3t) - e^{-2t} + e^{t}$$

Örnek 7. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 20\sin t$ diferansiyel denklemini $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$ başlangıç koşulları altında Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.

Çözüm. Her iki tarafa Laplace dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{L}\left\{y'''\right\} - 5\mathcal{L}\left\{y''\right\} + 7\mathcal{L}\left\{y'\right\} - 3\mathcal{L}\left\{y\right\} = 20\mathcal{L}\left\{\sin t\right\}$$

$$s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) - 5s^2Y(s) + sy(0) + y'(0) + 7sY(s) - 7y(0) - 3Y(s) = 20\frac{1}{s^2+1}$$

Başlangıç değerlerini yerine yazıp $Y(s)$ ifadesini yalnız bırakalım.

$$\left(s^3 - 5s^2 + 7s - 3\right)Y(s) = \frac{20}{s^2+1} - 2 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{-2s^2+18}{\left(s^2+1\right)\left(s^3-5s^2+7s-3\right)}$$

$$Y(s) = \frac{-2\left(s-3\right)\left(s+3\right)}{\left(s^2+1\right)\left(s-1\right)^2\left(s-3\right)} = \frac{-2s-6}{\left(s^2+1\right)\left(s-1\right)^2}$$

$$\frac{-2s-6}{\left(s^2+1\right)\left(s-1\right)^2} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{\left(s-1\right)^2}$$

$$(s-1)^2(As+B) + \left(s^2+1\right)(s-1)C + \left(s^2+1\right)D = -2s-6$$

$$s = 1 \Rightarrow 2D = -8 \Rightarrow D = -4$$

$$(s-1)^2(As+B) + \left(s^2+1\right)(s-1)C = 4s^2 - 2s - 2$$

$$\left.\begin{array}{l} s = 0 \Rightarrow B - C = -2 \qquad (B = C - 2) \\ s = -1 \Rightarrow -4A + 4B - 4C = 4 \Rightarrow -A + B - C = 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A = -3$$

$$s = 2 \Rightarrow -6 + B + 5C = 10 \Rightarrow 6C = 18 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow B = 1$$

$$Y(s) = \frac{-3s+1}{s^2+1} + \frac{3}{s-1} + \frac{-4}{\left(s-1\right)^2} = -3\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{3}{s-1} + \frac{-4}{\left(s-1\right)^2}$$

Şimdi, ters Laplace dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = -3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s-1\right)^2}\right\}$$

$$y(t) = -3\cos t + \sin t + 3e^{t} - 4te^{t}$$

Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü

Örnek 8.

$$\left.\begin{aligned}(D-1)x + Dy &= 2t+1 \\ (2D+1)x + 2Dy &= t\end{aligned}\right\}\ \text{denklem sistemini çözünüz.}$$

Çözüm. Birinci denklemi 2 ile çarparak ikinci denklemden çıkaralım.

$$3x = -3t - 2 \quad \Rightarrow \quad x = -t - \frac{2}{3}$$

Şimdi, bu x çözümünü birinci denklemde yerine yazalım ve y için bir çözüm bulalım.

$$-1 + t + \frac{2}{3} + Dy = 2t + 1 \quad \Rightarrow \quad Dy = t + \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{t^2}{2} + \frac{4}{3}t + c_1$$

O halde sistemin çözümü şu şekildedir.

$$\begin{cases} x = -t - \dfrac{2}{3} \\[2ex] y = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{4}{3}t + c_1 \end{cases}$$

Örnek 9.

$$\left.\begin{aligned}(D+2)x + 3y &= 0 \\ 4x + (D-2)y &= e^t\end{aligned}\right\}\ \text{denklem sistemini çözünüz.}$$

Çözüm. Birinci denklemin t ye göre türevini alalım ve türetme yok-etme yöntemiyle çözelim.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 4x - 6y - 12x + 6y + 3e^t = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 16x = -3e^t \quad \Rightarrow \quad r^2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 4,\ r_2 = -4 \quad \Rightarrow \quad x_h = c_1e^{4t} + c_2e^{-4t}$$

Şimdi, belirsiz katsayılar yöntemini kullanalım.

$$x_ö = Ae^t \quad \Rightarrow \quad x'_ö = Ae^t \quad \Rightarrow \quad x''_ö = Ae^t$$

$$Ae^t - 16Ae^t = -3e^t \quad \Rightarrow \quad -15A = -3 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{5}$$

$$x = c_1e^{4t} + c_2e^{-4t} + \frac{1}{5}e^t \quad \Rightarrow \quad x' = 4c_1e^{4t} - 4c_2e^{-4t} + \frac{1}{5}e^t$$

Şimdi, x çözümü yardımıyla y bağımlı değişkenini bulmaya çalışalım.

$$\frac{dx}{dt} + 2x + 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y = -4c_1e^{4t} + 4c_2e^{-4t} - \frac{1}{5}e^t - 2c_1e^{4t} - 2c_2e^{-4t} - \frac{2}{5}e^t$$

$$y = -2c_1e^{4t} + \frac{2}{3}c_2e^{-4t} - \frac{1}{5}e^t$$

O halde, diferansiyel denklem sisteminin çözümü şu şekildedir:

$$\begin{cases} x = c_1e^{4t} + c_2e^{-4t} + \dfrac{1}{5}e^t \\ \\ y = -2c_1e^{4t} + \dfrac{2}{3}c_2e^{-4t} - \dfrac{1}{5}e^t \end{cases}$$

Örnek 10.

$$\left.\begin{aligned} &(D-1)x + (D-3)y = e^t \\ &(D+1)x + Dy = e^{3t} \end{aligned}\right\} \text{ denklem sistemini çözünüz.}$$

Çözüm. Katsayılar determinantını hesaplayalım.

$$\Delta = \begin{vmatrix} D-1 & D-3 \\ D+1 & D \end{vmatrix} = D^2 - D - D^2 + 2D + 3 = D + 3$$

Birinci dereceden ifade elde edildiği için 1 tane keyfi değişken olacağı görülür. Öncelikle, x bağımlı değişkenini bulmaya çalışalım.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} e^t & D-3 \\ e^{3t} & D \end{vmatrix} = De^t - (D-3)e^{3t} = e^t - 3e^{3t} + 3e^{3t} = e^t$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{e^t}{D+3} \quad \Rightarrow \quad (D+3)x = e^t$$

Lineer diferansiyel denklem elde edilmiştir. İntegrasyon çarpanı bulalım, diferansiyel denklemin her iki tarafını çarpalım ve her iki tarafın integralini alalım.

$$\lambda = e^{\int 3dt} = e^{3t} \quad \Rightarrow \quad e^{3t}x = \frac{e^{4t}}{4} + c_1 \quad \Rightarrow \quad x = c_1e^{-3t} + \frac{e^t}{4}$$

Şimdi, y bağımlı değişkenini bulmaya çalışalım.

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} D-1 & e^t \\ D+1 & e^{3t} \end{vmatrix} = (D-1)e^{3t} - (D+1)e^t = 3e^{3t} - e^{3t} - e^t - e^t = 2e^{3t} - 2e^t$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2e^{3t} - 2e^t}{D+3} \quad \Rightarrow \quad (D+3)y = 2e^{3t} - 2e^t$$

Lineer diferansiyel denklem elde edilmiştir. İntegrasyon çarpanı bulalım, diferansiyel denklemin her iki tarafını çarpalım ve her iki tarafın integralini alalım.

$$\lambda = e^{\int 3dt} = e^{3t} \quad \Rightarrow \quad e^{3t}y = \frac{e^{6t}}{3} - \frac{e^{4t}}{2} + c_2 \quad \Rightarrow \quad y = c_2e^{-3t} + \frac{e^{3t}}{3} - \frac{e^t}{2}$$

O halde sistemin çözümü şu şekildedir.

$$\begin{cases} x = c_1 e^{-3t} + \dfrac{e^t}{4} \\[2ex] y = c_2 e^{-3t} + \dfrac{e^{3t}}{3} - \dfrac{e^t}{2} \end{cases}$$

Örnek 11.

$$\left.\begin{aligned} (2D+1)x + (D+1)y &= t^2 + 4t \\ (D+2)x + (D+2)y &= 2t^2 - 2t \end{aligned}\right\} \text{ denklem sistemini çözünüz.}$$

Çözüm. Katsayılar determinantını hesaplayalım.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2D+1 & D+1 \\ D+2 & D+2 \end{vmatrix} = 2D^2 + 5D + 2 - D^2 - 3D - 2 = D^2 + 2D$$

İkinci dereceden ifade elde edildiği için 2 tane keyfi değişken olacağı görülür. Öncelikle, x bağımlı değişkenini bulmaya çalışalım.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} t^2+4t & D+1 \\ 2t^2-2t & D+2 \end{vmatrix} = 2t + 4 + 2t^2 + 8t - 4t + 2 - 2t^2 + 2t = 8t + 6$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{8t+6}{D^2+2D} \quad \Rightarrow \quad (D^2+2D)x = 8t + 6$$

İkinci mertebeden, sabit katsayılı, lineer diferansiyel denklem elde edilmiştir. Karakteristik denklemini bulalım ve belirsiz katsayılar yöntemini kullanalım.

$$r^2 + 2r = 0 \quad \Rightarrow \quad r(r+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 0,\ r_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_h = c_1 + c_2 e^{-2t}$$

$$x_ö = At^2 + Bt \quad \Rightarrow \quad x'_ö = 2At + B \quad \Rightarrow \quad x''_ö = 2A$$

$$2A + 4At + 2B = 8t + 6 \quad \Rightarrow \quad A = 2,\ B = 1 \quad \Rightarrow \quad x_ö = 2t^2 + t$$

Şimdi, y bağımlı değişkenini bulmaya çalışalım.

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2D+1 & t^2+4t \\ D+2 & 2t^2-2t \end{vmatrix} = 8t - 4 + 2t^2 - 2t - 2t - 4 - 2t^2 - 8t = -4t - 8$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-4t-8}{D^2+2D} \quad \Rightarrow \quad (D^2+2D)y = -4t - 8$$

İkinci mertebeden, sabit katsayılı, lineer diferansiyel denklem elde edilmiştir. Karakteristik denklemini bulalım ve belirsiz katsayılar yöntemini kullanalım.

$$r^2 + 2r = 0 \quad \Rightarrow \quad r(r+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 0,\ r_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad y_h = c_3 + c_4 e^{-2t}$$

$$y_ö = At^2 + Bt \quad \Rightarrow \quad y'_ö = 2At + B \quad \Rightarrow \quad y''_ö = 2A$$

$$2A + 4At + 2B = -4t - 8 \quad \Rightarrow \quad A = -1,\ B = -3 \quad \Rightarrow \quad y_ö = -t^2 - 3t$$

$$\begin{cases} x = c_1 + c_2 e^{-2t} + 2t^2 + t \\ y = c_3 + c_4 e^{-2t} - t^2 - 3t \end{cases}$$

Şimdi, c_3 ve c_4 keyfi sabitlerinin c_1 ve c_2 cinsinden yazılışlarını bulmak için, x ve y çözümlerini birinci ve ikinci denklemde yerine yazalım.

$$(2D+1)x + (D+1)y = t^2 + 4t \quad \Rightarrow \quad c_4 = -3c_2$$

$$(D+2)x + (D+2)y = 2t^2 - 2t \quad \Rightarrow \quad c_3 = 1 - c_1$$

O halde, diferansiyel denklem sisteminin çözümü şu şekildedir:

$$\begin{cases} x = c_1 + c_2 e^{-2t} + 2t^2 + t \\ y = -c_1 - 3c_2 e^{-2t} - t^2 - 3t + 1 \end{cases}$$

Örnek 12.

$$\left.\begin{aligned} (D-3)x + 2Dy &= \sin t \\ (2D-1)x + (D-2)y &= 2\cos t \end{aligned}\right\} \text{ denklem sistemini çözünüz.}$$

Çözüm. Katsayılar determinantını hesaplayalım.

$$\Delta = \begin{vmatrix} D-3 & 2D \\ 2D-1 & D-2 \end{vmatrix} = D^2 - 5D + 6 - 4D^2 + 2D = -3D^2 - 3D + 6$$

İkinci dereceden ifade elde edildiği için 2 tane keyfi değişken olacağı görülür. Öncelikle, x bağımlı değişkenini bulmaya çalışalım.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \sin t & 2D \\ 2\cos t & D-2 \end{vmatrix} = \cos t - 2\sin t + 4\sin t = \cos t + 2\sin t$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\cos t + 2\sin t}{-3D^2 - 3D + 6} \quad \Rightarrow \quad (-3D^2 - 3D + 6)x = \cos t + 2\sin t$$

İkinci mertebeden, sabit katsayılı, lineer diferansiyel denklem elde edilmiştir. Karakteristik denklemini bulalım ve belirsiz katsayılar yöntemini kullanalım.

$$-3r^2 - 3r + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1,\ r_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_h = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$$

$$x_ö = A\cos t + B\sin t \quad \Rightarrow \quad x'_ö = -A\sin t + B\cos t \quad \Rightarrow \quad x''_ö = -A\cos t - B\sin t$$

$$3A\cos t + 3B\sin t + 3A\sin t - 3B\cos t + 6A\cos t + 6B\sin t = \cos t + 2\sin t$$

$$(9A-3B)\cos t+(3A+9B)\sin t=\cos t+2\sin t \quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{6},\ B=\frac{1}{6}$$

Şimdi, y bağımlı değişkenini bulmaya çalışalım.

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} D-3 & \sin t \\ 2D-1 & 2\cos t \end{vmatrix}=-2\sin t-6\cos t-2\cos t+\sin t=-8\cos t-\sin t$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-8\cos t-\sin t}{-3D^2-3D+6} \quad\Rightarrow\quad (-3D^2-3D+6)y=-8\cos t-\sin t$$

İkinci mertebeden, sabit katsayılı, lineer diferansiyel denklem elde edilmiştir. Karakteristik denklemini bulalım ve belirsiz katsayılar yöntemini kullanalım.

$$-3r^2-3r+6=0 \quad\Rightarrow\quad r^2+r-2=0 \quad\Rightarrow\quad r_1=1,\ r_2=-2 \quad\Rightarrow\quad y_h=c_3e^t+c_4e^{-2t}$$

$$y_ö=A\cos t+B\sin t \quad\Rightarrow\quad y_ö'=-A\sin t+B\cos t \quad\Rightarrow\quad y_ö''=-A\cos t-B\sin t$$

$$(9A-3B)\cos t+(3A+9B)\sin t=-8\cos t-\sin t \quad\Rightarrow\quad A=-\frac{5}{6},\ B=\frac{1}{6}$$

$$\begin{cases} x=c_1e^t+c_2e^{-2t}+\dfrac{1}{6}\cos t+\dfrac{1}{6}\sin t \\ y=c_3e^t+c_4e^{-2t}-\dfrac{5}{6}\cos t+\dfrac{1}{6}\sin t \end{cases}$$

Şimdi, c_3 ve c_4 keyfi sabitlerinin c_1 ve c_2 cinsinden yazılışlarını bulmak için, x ve y çözümlerini birinci ve ikinci denklemde yerine yazalım.

$$\left.\begin{aligned} (D-3)x+2Dy&=\sin t \\ (2D-1)x+(D-2)y&=2\cos t \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad c_3=c_1,\ c_4=-\frac{5}{4}c_2$$

O halde, diferansiyel denklem sisteminin çözümü şu şekildedir:

$$\begin{cases} x=c_1e^t+c_2e^{-2t}+\dfrac{1}{6}\cos t+\dfrac{1}{6}\sin t \\ y=c_1e^t-\dfrac{5}{4}c_2e^{-2t}-\dfrac{5}{6}\cos t+\dfrac{1}{6}\sin t \end{cases}$$