

Diferansiyel Denklemler - 5. Uygulama

Belirsiz Katsayılar Yöntemi

Örnek 1. $y'' - 3y' + 2y = 4xe^{3x} + 5 \sin 2x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen diferansiyel denklemi sağ tarafsız olarak ele alalım ve karakteristik köklerini bulalım.

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow (r - 1)(r - 2) = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 2$$

Böylece homojen kısmın çözümü,

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

şeklinde bulunur. Şimdi, diferansiyel denklemin sağ taraflı çözümü için belirsiz katsayılar yöntemini kullanalım.

$$y_{\ddot{o}_1} = (Ax + B)e^{3x} \Rightarrow y'_{\ddot{o}_1} = (3Ax + A + 3B)e^{3x} \Rightarrow y''_{\ddot{o}_1} = (9Ax + 6A + 9B)e^{3x}$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$(9Ax + 6A + 9B)e^{3x} - 3(3Ax + A + 3B)e^{3x} + 2(Ax + B)e^{3x} = 4xe^{3x}$$

denklemi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$(2Ax + 3A + 2B)e^{3x} = 4xe^{3x}$$

bulunur ve iki tarafın eşitliğinden,

$$\begin{cases} 2A = 4 \Rightarrow A = 2 \\ 3A + 2B = 0 \Rightarrow 6 + 2B = 0 \Rightarrow B = -3 \end{cases}$$

olup, özel çözüm,

$$y_{\ddot{o}_1} = (2x - 3)e^{3x} = 2xe^{3x} - 3e^{3x}$$

şeklindedir. Yine, özel çözüm için belirsiz katsayılar kullanılırsa,

$$y_{\ddot{o}_2} = C \cos 2x + D \sin 2x \Rightarrow y'_{\ddot{o}_2} = -2C \sin 2x + 2D \cos 2x \Rightarrow y''_{\ddot{o}_2} = -4C \cos 2x - 4D \sin 2x$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine

yazarsak,

$$-4C \cos 2x - 4D \sin 2x - 3(-2C \sin 2x + 2D \cos 2x) + 2(C \cos 2x + D \sin 2x) = 5 \sin 2x$$

denklemini elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılrırsa,

$$(-2C - 6D) \cos 2x + (6C - 2D) \sin 2x = 5 \sin 2x$$

bulunur ve iki tarafın eşitliğinden,

$$\begin{cases} -2C - 6D = 0 \\ 6C - 2D = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6C - 18D = 0 \\ 6C - 2D = 5 \end{cases} \Rightarrow -20D = 5 \Rightarrow D = -\frac{1}{4} \Rightarrow C = \frac{3}{4}$$

olup, özel çözüm,

$$y_{\ddot{o}2} = \frac{3}{4} \cos 2x + -\frac{1}{4} \sin 2x$$

şeklindedir. Böylece genel çözüm,

$$y_g = y_h + y_{\ddot{o}} = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 2x e^{3x} - 3e^{3x} + \frac{3}{4} \cos 2x + -\frac{1}{4} \sin 2x$$

olarak elde edilir.

Örnek 2. $y''' - 2y'' + y' = 6x^2 - 2x + 4 \cos x + 3 \sin x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen diferansiyel denklemini sağ tarafsız olarak ele alalım ve karakteristik köklerini bulalım.

$$r^3 - 2r^2 + r = 0 \Rightarrow r(r^2 - 2r + 1) = 0 \Rightarrow r(r - 1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_{2,3} = 1$$

Böylece homojen kısmın çözümü,

$$y_h = c_1 + (c_2 + c_3 x) e^x$$

şeklinde bulunur. Şimdi, diferansiyel denklemin sağ taraflı çözümü için belirsiz katsayılar yöntemini kullanalım. Burada, karakteristik denklemin $r^p(\dots) = 0$ formunda yazılabilmesinin sağ taraftaki polinom için getirdiği özel duruma dikkat edelim.

$$y_{\ddot{o}1} = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$y'_{\ddot{o}1} = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y''_{\ddot{o}1} = 6Ax + 2B$$

$$y'''_{\ddot{o}1} = 6A$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denkleminde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine

yazarsak,

$$6A - 2(6Ax + 2B) + 3Ax^2 + 2Bx + C = 6x^2 - 2x$$

denklemini elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$3Ax^2 + (-12A + 2B)x + 6A - 4B + C = 6x^2 - 2x$$

bulunur ve iki tarafın eşitliğinden,

$$\begin{cases} 3A = 6 \Rightarrow A = 2 \\ -12A + 2B = -2 \Rightarrow -24 + 2B = -2 \Rightarrow B = 11 \\ 6A - 4B + C = 0 \Rightarrow 12 - 44 + C = 0 \Rightarrow C = 32 \end{cases}$$

olup, özel çözüm,

$$y_{\ddot{o}_1} = 2x^3 + 11x^2 + 32x$$

şeklinde. Yine, özel çözüm için belirsiz katsayılar kullanılırsa,

$$y_{\ddot{o}_2} = D \cos x + E \sin x$$

$$y'_{\ddot{o}_2} = E \cos x - D \sin x$$

$$y''_{\ddot{o}_2} = -D \cos x - E \sin x$$

$$y'''_{\ddot{o}_2} = -E \cos x + D \sin x$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$-E \cos x + D \sin x - 2(-D \cos x - E \sin x) + E \cos x - D \sin x = 4 \cos x + 3 \sin x$$

denklemini elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$2D \cos x + 2E \sin x = 4 \cos x + 3 \sin x$$

bulunur ve iki tarafın eşitliğinden,

$$\begin{cases} 2D = 4 \Rightarrow D = 2 \\ 2E = 3 \Rightarrow E = \frac{3}{2} \end{cases}$$

olup, özel çözüm,

$$y_{\ddot{o}_2} = 2 \cos x + \frac{3}{2} \sin x$$

şeklindedir. Böylece genel çözüm,

$$y_g = y_h + y_{\check{o}} = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x + 2x^3 + 11x^2 + 32x + 2 \cos x + \frac{3}{2} \sin x$$

olarak elde edilir.

Örnek 3. $y''' + y'' - 2y = 4x^2 + 5e^x \cos 5x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen diferansiyel denklemin sağ tarafsız olarak ele alalım ve karakteristik köklerini bulalım.

$$r^3 + r^2 - 2 = 0 \Rightarrow (r - 1)(r^2 + 2r + 2) = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_{2,3} = -1 \mp i$$

Böylece homojen kısmın çözümü,

$$y_h = c_1 e^x + e^{-x} (c_2 \cos x + c_3 \sin x)$$

şeklinde bulunur. Şimdi, diferansiyel denklemin sağ taraflı çözümü için belirsiz katsayılar yöntemini kullanalım.

$$y_{\check{o}_1} = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow y'_{\check{o}_1} = 2Ax + B \Rightarrow y''_{\check{o}_1} = 2A \Rightarrow y'''_{\check{o}_1} = 0$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$2A - 2(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2$$

denklemin elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılsa,

$$-2Ax^2 - 2Bx + 2A - 2C = 4x^2$$

bulunur ve iki tarafın eşitliğinden,

$$\begin{cases} -2A = 4 \Rightarrow A = -2 \\ -2B = 0 \Rightarrow B = 0 \\ 2A - 2C = 0 \Rightarrow -4 - 2C = 0 \Rightarrow C = -2 \end{cases}$$

olup, özel çözüm,

$$y_{\check{o}_1} = -2x^2 - 2$$

şeklindedir. Yine, özel çözüm için belirsiz katsayılar kullanılırsa,

$$y_{\ddot{o}2} = (D \cos 5x + E \sin 5x) e^x$$

$$y'_{\ddot{o}2} = ((D + 5E) \cos 5x + (-5D + E) \sin 5x) e^x$$

$$y''_{\ddot{o}2} = ((-24D + 10E) \cos 5x + (-10D - 24E) \sin 5x) e^x$$

$$y'''_{\ddot{o}2} = ((-74D - 110E) \cos 5x + (110D - 74E) \sin 5x) e^x$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} &((-74D - 110E) \cos 5x + (110D - 74E) \sin 5x) e^x \\ &+ ((-24D + 10E) \cos 5x + (-10D - 24E) \sin 5x) e^x \\ &- 2(D \cos 5x + E \sin 5x) e^x = 5e^x \cos 5x \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$((-100D - 100E) \cos 5x + (100D - 100E) \sin 5x) e^x = 5e^x \cos 5x$$

bulunur ve iki tarafın eşitliğinden,

$$\begin{cases} -100D - 100E = 5 \\ 100D - 100E = 0 \end{cases} \Rightarrow -200E = 5 \Rightarrow E = -\frac{1}{40} \Rightarrow D = -\frac{1}{40}$$

olup, özel çözüm,

$$y_{\ddot{o}2} = \left(-\frac{1}{40} \cos 5x - \frac{1}{40} \sin 5x \right) e^x$$

şeklindedir. Böylece genel çözüm,

$$y_g = y_h + y_{\ddot{o}} = c_1 e^x + e^{-x} (c_2 \cos x + c_3 \sin x) - 2x^2 - 2 - \frac{1}{40} e^x \cos 5x - \frac{1}{40} e^x \sin 5x$$

olarak elde edilir.

Örnek 4. $y'' + 4y' + 4y = 5e^{2x} - xe^{-2x}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen diferansiyel denklemi sağ tarafsız olarak ele alalım ve karakteristik köklerini bulalım.

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r + 2)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -2$$

Böylece homojen kısmın çözümü,

$$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

şeklinde bulunur. Şimdi, diferansiyel denklemin sağ tarafı çözümü için belirsiz katsayılar yöntemini kullanalım.

$$y_{\ddot{o}_1} = Ae^{2x} \Rightarrow y'_{\ddot{o}_1} = 2Ae^{2x} \Rightarrow y''_{\ddot{o}_1} = 4Ae^{2x}$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$4Ae^{2x} + 4.2Ae^{2x} + 4Ae^{2x} = 5e^{2x}$$

denklemini elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$16Ae^{2x} = 5e^{2x}$$

bulunur ve iki tarafın eşitliğinden,

$$16A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{16}$$

olup, özel çözüm,

$$y_{\ddot{o}_1} = \frac{5}{16}e^{2x}$$

şeklinde. Sağ tarafı çözüm için ikinci defa belirsiz katsayılar kullanalım. Fakat burada, 2 katlı reel kökle e^{ax} fonksiyonundaki a sayısının eşit olmasının getirdiği özel duruma dikkat edelim.

$$y_{\ddot{o}_2} = Bx^2.xe^{-2x} = Bx^3e^{-2x}$$

$$y'_{\ddot{o}_2} = 3Bx^2e^{-2x} - 2Bx^3e^{-2x} = (-2Bx^3 + 3Bx^2)e^{-2x}$$

$$y''_{\ddot{o}_2} = (-6Bx^2 + 6Bx)e^{-2x} - 2(-2Bx^3 + 3Bx^2)e^{-2x} = (4Bx^3 - 12Bx^2 + 6Bx)e^{-2x}$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$(4Bx^3 - 12Bx^2 + 6Bx)e^{-2x} + 4(-2Bx^3 + 3Bx^2)e^{-2x} + 4Bx^3e^{-2x} = -xe^{-2x}$$

denklemini elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$6Bxe^{-2x} = -xe^{-2x}$$

bulunur ve iki tarafın eşitliğinden,

$$6B = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{6}$$

olup, özel çözüm,

$$y_{\ddot{o}2} = -\frac{1}{6}x^3e^{-2x}$$

şeklindedir. Böylece genel çözüm,

$$y_g = y_h + y_{\ddot{o}} = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + \frac{5e^{2x}}{16} - \frac{x^3}{6e^{2x}}$$

olarak elde edilir.

Örnek 5. $4y^{(iv)} + 4y'' + y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen diferansiyel denklemi sağ tarafsız olarak ele alalım ve karakteristik köklerini bulalım.

$$4r^4 + 4r^2 + 1 = 0 \Rightarrow (2r^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2,3,4} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

Böylece homojen kısmın çözümü,

$$y_h = c_1 \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c_2 \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + x \left(c_3 \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c_4 \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

şeklinde bulunur. Şimdi, diferansiyel denklemin sağ taraflı çözümü için belirsiz katsayılar yöntemini kullanalım.

$$y_{\ddot{o}1} = Ae^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \Rightarrow y'_{\ddot{o}1} = \frac{1}{\sqrt{2}}Ae^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \Rightarrow y''_{\ddot{o}1} = \frac{1}{2}Ae^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \Rightarrow y'''_{\ddot{o}1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}Ae^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \Rightarrow y^{(iv)}_{\ddot{o}1} = \frac{1}{4}Ae^{\frac{x}{\sqrt{2}}}$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemden ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$4\frac{A}{4}e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} + 4\frac{A}{2}e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} + Ae^{\frac{x}{\sqrt{2}}} = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}$$

denklemini elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılsa,

$$4Ae^{\frac{x}{\sqrt{2}}} = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}$$

bulunur ve iki tarafın eşitliğinden,

$$4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

olup, özel çözüm,

$$y_{\ddot{o}1} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}$$

şeklindedir. Yine, özel çözüm için belirsiz katsayılar kullanılırsa,

$$\begin{aligned}y_{\ddot{o}_2} &= B \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\y'_{\ddot{o}_2} &= \frac{1}{2}C \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}B \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\y''_{\ddot{o}_2} &= -\frac{1}{4}B \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{4}C \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\y'''_{\ddot{o}_2} &= -\frac{1}{8}C \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{8}B \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\y^{(iv)}_{\ddot{o}_2} &= \frac{1}{16}B \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{16}C \sin\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}4\left(\frac{1}{16}B \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{16}C \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) + 4\left(-\frac{1}{4}B \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{4}C \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\+ B \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılsa,

$$\left(\frac{B}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{C}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

bulunur ve iki tarafın eşitliğinden,

$$\begin{cases} \frac{B}{4} = 2 \Rightarrow B = 8 \\ \frac{C}{4} = -1 \Rightarrow C = -4 \end{cases}$$

olup, özel çözüm,

$$y_{\ddot{o}_2} = 8 \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 4 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

şeklindedir. Böylece genel çözüm,

$$\begin{aligned}y_g = y_h + y_{\ddot{o}} &= c_1 \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c_2 \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c_3 x \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c_4 x \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \\&+ \frac{1}{4}e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} + 8 \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 4 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 6. $y^{(iv)} - 4y''' + 5y'' = 15x^2 - 4x + 15 + 4 \cos x + 5 \sin x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen diferansiyel denklemi sağ tarafsız olarak ele alalım ve karakteristik köklerini bulalım.

$$r^4 - 4r^3 + 5r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r^2 - 4r + 5) = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 0, r_{3,4} = 2 \mp i$$

Böylece homojen kısmın çözümü,

$$y_h = c_1 + c_2x + e^{2x}(c_3 \cos x + c_4 \sin x)$$

şeklinde bulunur. Şimdi, diferansiyel denklemin sağ tarafı çözümü için belirsiz katsayılar yöntemini kullanalım. Burada, karakteristik denklemin $r^p(\dots) = 0$ formunda yazılabildiğinin sağ taraftaki polinom için getirdiği özel duruma dikkat edelim.

$$y_{\ddot{o}_1} = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$$

$$y'_{\ddot{o}_1} = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx$$

$$y''_{\ddot{o}_1} = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$$

$$y'''_{\ddot{o}_1} = 24Ax + 6B$$

$$y^{(iv)}_{\ddot{o}_1} = 24A$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$24A - 4(24Ax + 6B) + 5(12Ax^2 + 6Bx + 2C) = 15x^2 - 4x + 15$$

denklemi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılsa,

$$60Ax^2 + (-96A + 30B)x + 24A - 24B + 10C = 15x^2 - 4x + 15$$

bulunur ve iki tarafın eşitliğinden,

$$\begin{cases} 60A = 15 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \\ -96A + 30B = -4 \Rightarrow -24 + 30B = -4 \Rightarrow B = \frac{2}{3} \\ 24A - 24B + 10C = 15 \Rightarrow 6 - 16 + 10C = 15 \Rightarrow C = \frac{5}{2} \end{cases}$$

olup, özel çözüm,

$$y_{\ddot{o}_1} = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}$$

şeklindedir. Tekrardan, özel çözüm için belirsiz katsayılar kullanalım.

$$y_{\ddot{o}_2} = D \cos x + E \sin x$$

$$y'_{\ddot{o}_2} = E \cos x - D \sin x$$

$$y''_{\ddot{o}_2} = -D \cos x - E \sin x$$

$$y'''_{\ddot{o}_2} = -E \cos x + D \sin x$$

$$y^{(iv)}_{\ddot{o}_2} = D \cos x + E \sin x$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$D \cos x + E \sin x - 4(-E \cos x + D \sin x) + 5(-D \cos x - E \sin x) = 4 \cos x + 5 \sin x$$

denklemi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$(-4D + 4E) \cos x + (-4D - 4E) \sin x = 4 \cos x + 5 \sin x$$

bulunur ve iki tarafın eşitliğinden,

$$\begin{cases} -4D + 4E = 4 \\ -4D - 4E = 5 \end{cases} \Rightarrow -8D = 9 \Rightarrow D = -\frac{9}{8} \Rightarrow \frac{9}{2} + 4E = 4 \Rightarrow E = -\frac{1}{8}$$

olup, özel çözüm,

$$y_{\ddot{o}2} = -\frac{9}{8} \cos x - \frac{1}{8} \sin x$$

şeklindedir. Böylece genel çözüm,

$$y_g = y_h + y_{\ddot{o}} = c_1 + c_2 x + e^{2x}(c_3 \cos x + c_4 \sin x) + \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - \frac{9 \cos x}{8} - \frac{\sin x}{8}$$

olarak elde edilir.

Örnek 7. $y''' + 3y'' - 4y = 2e^{-x} + 2x^2 - 4x + 5$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen diferansiyel denklemi sağ tarafsız olarak ele alalım ve karakteristik köklerini bulalım.

$$r^3 + r^2 - 2 = 0 \Rightarrow (r - 1)(r + 2)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = r_3 = -2$$

Böylece homojen kısmın çözümü,

$$y_h = c_1 e^x + e^{-2x}(c_2 + c_3 x)$$

şeklinde bulunur. Şimdi, diferansiyel denklemin sağ taraflı çözümü için belirsiz katsayılar yöntemini kullanalım.

$$y_{\ddot{o}1} = Ae^{-x} \Rightarrow y'_{\ddot{o}1} = -Ae^{-x} \Rightarrow y''_{\ddot{o}1} = Ae^{-x} \Rightarrow y'''_{\ddot{o}1} = -Ae^{-x}$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$(-A + 3A - 4A)e^{-x} = 2e^{-x}$$

denklemi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-2Ae^{-x} = 2e^{-x}$$

bulunur ve iki tarafın eşitliğinden,

$$-2A = 2 \Rightarrow A = -1$$

olup, özel çözüm,

$$y_{\ddot{o}_1} = -e^{-x}$$

şeklindedir. Yine, özel çözüm için belirsiz katsayılar kullanılırsa,

$$y_{\ddot{o}_2} = Bx^2 + Cx + D \Rightarrow y'_{\ddot{o}_2} = 2Bx + C \Rightarrow y''_{\ddot{o}_2} = 2B \Rightarrow y'''_{\ddot{o}_2} = 0$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$6B - 4(Bx^2 + Cx + D) = 2x^2 - 4x + 5$$

denklemi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-4Bx^2 - 4Cx + 6B - 4D = 2x^2 - 4x + 5$$

bulunur ve iki tarafın eşitliğinden,

$$\begin{cases} -4B = 2 \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \\ -4C = -4 \Rightarrow C = 1 \\ 6B - 4D = 5 \Rightarrow -3 - 4D = 5 \Rightarrow D = -2 \end{cases}$$

olup, özel çözüm,

$$y_{\ddot{o}_2} = -\frac{x^2}{2} + x - 2$$

şeklindedir. Böylece genel çözüm,

$$y_g = y_h + y_{\ddot{o}} = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3xe^{-2x} - e^{-x} - \frac{x^2}{2} + x - 2$$

olarak elde edilir.

Örnek 8. $y'' + 4y = 8 \cos 2x + 3 \sin x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen diferansiyel denklemi sağ tarafsız olarak ele alalım ve karakteristik

köklerini bulalım.

$$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \mp 2i$$

Böylece homojen kısmın çözümü,

$$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

şeklinde bulunur. Şimdi, diferansiyel denklemin sağ tarafı çözümü için belirsiz katsayılar yöntemini kullanalım. Burada, $\lambda = 2$ ifadesinin hem karakteristik köklerdeki (reel kısmı olmayan) kompleks sayının imajiner kısmında hem de trigonometrik ifadenin katsayısında olmasının getirdiği özel duruma dikkat edelim.

$$y_{\ddot{o}_1} = x (A \cos 2x + B \sin 2x)$$

$$y'_{\ddot{o}_1} = (A + 2Bx) \cos 2x + (-2Ax + B) \sin 2x$$

$$y''_{\ddot{o}_1} = (-4Ax + 4B) \cos 2x + (-4A - 4Bx) \sin 2x$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$(-4Ax + 4B) \cos 2x + (-4A - 4Bx) \sin 2x + 4x (A \cos 2x + B \sin 2x) = 8 \cos 2x$$

denklemini elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$4B \cos 2x - 4A \sin 2x = 8 \cos 2x$$

bulunur ve iki tarafın eşitliğinden,

$$\begin{cases} 4B = 8 \Rightarrow B = 2 \\ -4A = 0 \Rightarrow A = 0 \end{cases}$$

olup, özel çözüm,

$$y_{\ddot{o}_1} = 2x \sin 2x$$

şeklindedir. Yine, özel çözüm için belirsiz katsayılar kullanılırsa,

$$y_{\ddot{o}_2} = C \cos x + D \sin x$$

$$y'_{\ddot{o}_2} = -C \sin x + D \cos x$$

$$y''_{\ddot{o}_2} = -C \cos x - D \sin x$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine

yazarsak,

$$-C \cos x - D \sin x + 4(C \cos x + D \sin x) = 3 \sin x$$

denklemini elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılsa,

$$3C \cos x + 3D \sin x = 3 \sin x$$

bulunur ve iki tarafın eşitliğinden,

$$\begin{cases} 3C = 0 \Rightarrow C = 0 \\ 3D = 3 \Rightarrow D = 1 \end{cases}$$

olup, özel çözüm,

$$y_{\text{ö}_2} = \sin x$$

şeklindedir. Böylece genel çözüm,

$$y_g = y_h + y_{\text{ö}} = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + 2x \sin 2x + \sin x$$

olarak elde edilir.

Örnek 9. $y^{(iv)} - 2y''' + y'' - 2y' = x^2 - 4x + 3 + 8e^{2x} + 5 \cos x - 4 \sin x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen diferansiyel denklemini sağ tarafsız olarak ele alalım ve karakteristik köklerini bulalım.

$$r^4 - 2r^3 + r^2 - 2r = 0 \Rightarrow r(r-2)(r^2+1) = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 2, r_{3,4} = \mp i$$

Böylece homojen kısmın çözümü,

$$y_h = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

şeklinde bulunur. Şimdi, diferansiyel denklemin sağ tarafı çözümü için belirsiz katsayılar yöntemini kullanalım. Burada, karakteristik denklemin $r^p(\dots) = 0$ formunda yazılabilmesinin sağ taraftaki polinom için getirdiği özel duruma dikkat edelim.

$$y_{\text{ö}_1} = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$y'_{\text{ö}_1} = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y''_{\text{ö}_1} = 6Ax + 2B$$

$$y'''_{\text{ö}_1} = 6A$$

$$y^{(iv)}_{\text{ö}_1} = 0$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$-2(6A) + 6Ax + 2B - 2(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 - 4x + 3$$

denklemi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-6Ax^2 + (6A - 4B)x - 12A + 2B - 2C = x^2 - 4x + 3$$

bulunur ve iki tarafın eşitliğinden,

$$\begin{cases} -6A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{6} \\ 6A - 4B = -4 \Rightarrow -1 - 4B = -4 \Rightarrow B = \frac{3}{4} \\ -12A + 2B - 2C = 3 \Rightarrow 2 + \frac{3}{2} - 2C = 3 \Rightarrow C = \frac{1}{4} \end{cases}$$

olup, özel çözüm,

$$y_{\ddot{o}_1} = -\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{4} + \frac{x}{4}$$

şeklinde. Sağ taraflı çözüm için ikinci defa belirsiz katsayılar kullanalım. Fakat burada, bir reel kökle e^{ax} fonksiyonundaki a sayısının eşit olmasının getirdiği özel duruma dikkat edelim.

$$\begin{aligned} y_{\ddot{o}_2} &= Dxe^{2x} \\ y'_{\ddot{o}_2} &= De^{2x} + 2Dxe^{2x} = (2Dx + D)e^{2x} \\ y''_{\ddot{o}_2} &= 2De^{2x} + 2D(2x + 1)e^{2x} = (4Dx + 4D)e^{2x} \\ y'''_{\ddot{o}_2} &= 4De^{2x} + 2D(4x + 4)e^{2x} = (8Dx + 12D)e^{2x} \\ y^{(iv)}_{\ddot{o}_2} &= 8De^{2x} + 2D(8x + 12)e^{2x} = (16Dx + 32D)e^{2x} \end{aligned}$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$(16Dx + 32D)e^{2x} - 2(8Dx + 12D)e^{2x} + (4Dx + 4D)e^{2x} - 2(2Dx + D)e^{2x} = 8e^{2x}$$

denklemi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$10De^{2x} = 8e^{2x}$$

bulunur ve iki tarafın eşitliğinden,

$$10D = 8 \Rightarrow D = \frac{4}{5}$$

olup, özel çözüm,

$$y_{\ddot{o}2} = \frac{4xe^{2x}}{5}$$

şeklindedir. Tekrardan, özel çözüm için belirsiz katsayılar kullanalım. Burada, $\lambda = 1$ ifadesinin hem karakteristik köklerdeki (reel kısmı olmayan) kompleks sayının imajiner kısmında hem de trigonometrik ifadelerin katsayısında olmasının getirdiği özel duruma dikkat edelim.

$$\begin{aligned} y_{\ddot{o}3} &= x(E \cos x + F \sin x) \\ y'_{\ddot{o}3} &= (E + Fx) \cos x + (-Ex + F) \sin x \\ y''_{\ddot{o}3} &= (-Ex + 2F) \cos x + (-2E - Fx) \sin x \\ y'''_{\ddot{o}3} &= (-3E - Fx) \cos x + (Ex - 3F) \sin x \\ y^{(iv)}_{\ddot{o}3} &= (Ex - 4F) \cos x + (4E + Fx) \sin x \end{aligned}$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} &(Ex - 4F) \cos x + (4E + Fx) \sin x - 2((-3E - Fx) \cos x + (Ex - 3F) \sin x) \\ &+ (-Ex + 2F) \cos x + (-2E - Fx) \sin x - 2((E + Fx) \cos x + (-Ex + F) \sin x) \\ &= 5 \cos x - 4 \sin x \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılrısa,

$$(4E - 2F) \cos x + (2E + 4F) \sin x = 5 \cos x - 4 \sin x$$

bulunur ve iki tarafın eşitliğinden,

$$\begin{cases} 4E - 2F = 5 \\ 2E + 4F = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4E - 2F = 5 \\ E + 2F = -2 \end{cases} \Rightarrow 5E = 3 \Rightarrow E = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{3}{5} + 2F = -2 \Rightarrow F = \frac{-13}{10}$$

olup, özel çözüm,

$$y_{\ddot{o}3} = \frac{3x \cos x}{5} - \frac{13x \sin x}{10}$$

şeklindedir. Böylece genel çözüm,

$$y_g = y_h + y_{\ddot{o}} = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{4} + \frac{x}{4} + \frac{4xe^{2x}}{5} + \frac{3x \cos x}{5} - \frac{13x \sin x}{10}$$

olarak elde edilir.