Diferansiyel Denklemler - 8. Uygulama

Bağımlı Değişken İçermeyen Diferansiyel Denklemler

Örnek 1. $y^{(iv)}.y''' = 1$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem bağımlı değişkeni (y yi) içermez. O halde en düşük mertebeli türev için dönüşüm yapalım.

$$y''' = t \qquad y^{(iv)} = t'$$

Bu dönüşümü, verilen diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$tt' = 1 \quad \Rightarrow \quad t\frac{dt}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int tdt = \int dx \quad \Rightarrow \quad \frac{t^2}{2} = x + c_1 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{2}\,(x + c_1)^{\frac{1}{2}}$$

Şimdi, t yi yerine yazalım ($y''' = t$).

$$y''' = \sqrt{2}\,(x + c_1)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y'' = \sqrt{2}.\frac{2}{3}\,(x + c_1)^{\frac{3}{2}} + c_2 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2\sqrt{2}}{3}.\frac{2}{5}\,(x + c_1)^{\frac{5}{2}} + c_2 x + c_3$$

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{15}.\frac{2}{7}\,(x + c_1)^{\frac{7}{2}} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 = \frac{8\sqrt{2}}{105}\,(x + c_1)^{\frac{7}{2}} + \frac{c_2}{2}x^2 + c_3 x + c_4$$

genel çözümü bulunur.

Örnek 2. $(y''')^2 + xy''' - y'' = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem bağımlı değişkeni (y yi) içermez. O halde en düşük mertebeli türev için dönüşüm yapalım.

$$y'' = t \qquad y''' = t'$$

Bu dönüşümü, verilen diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$(t')^2 + xt' - t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = (t')^2 + xt'$$

Elde edilen form, Clairaut diferansiyel denklemidir. $t' = p$ dönüşümü yapalım. ($t = px + \varphi(p)$)

$$t' = p \quad \Rightarrow \quad t = p^2 + xp$$

Her iki tarafın x e göre türevini alalım.

$$p = 2p\frac{dp}{dx} + p + x\frac{dp}{dx} \quad \Rightarrow \quad (2p + x)\,\frac{dp}{dx} = 0$$

Eğer, çarpımın sonucu sıfırsa en az çarpanlardan biri sıfıra eşittir (Genel çözüm için türevli ifadenin 0 olmasını göz önüne almalıyız.):

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c_1 \quad \left(t = p^2 + xp\right) \Rightarrow t = c_1^2 + c_1 x$$

Şimdi, t yi yerine yazalım ($y'' = t$).

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c_1 x + c_1^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = c_1\frac{x^2}{2} + c_1^2 x + c_2 \quad \Rightarrow \quad y = c_1\frac{x^3}{6} + c_1^2\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

genel çözümü bulunur.

Örnek 3. $(1+x^2)\,y'' + 2xy' = \dfrac{2}{x^3}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem bağımlı değişkeni (y yi) içermez. O halde en düşük mertebeli türev için dönüşüm yapalım.

$$y' = t \qquad y'' = t'$$

Bu dönüşümü, verilen diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$\left(1+x^2\right)t' + 2xt = \frac{2}{x^3} \quad \Rightarrow \quad t' + \frac{2x}{1+x^2}t = \frac{2}{x^3\left(1+x^2\right)}$$

Elde edilen form, lineer diferansiyel denklemdir. İntegrasyon çarpanını bulalım. ($t' + p(x)t = q(x)$)

$$\lambda = e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{\ln\left(1+x^2\right)} = 1 + x^2$$

Diferansiyel denklemin her iki tarafını integrasyon çarpanı ile çarpalım.

$$\left(1+x^2\right)\left(t' + \frac{2x}{1+x^2}t\right) = \left(1+x^2\right)\frac{2}{x^3\left(1+x^2\right)} \quad \Rightarrow \quad \left(1+x^2\right)t' + 2xt = \frac{2}{x^3}$$

Eşitliğin sol tarafı çarpım türevidir. Düzenleyerek her iki tarafın integralini alalım.

$$\int d\left(\left(1+x^2\right)t\right) = \int \frac{2}{x^3}dx \quad \Rightarrow \quad \left(1+x^2\right)t = -\frac{1}{x^2} + c_1 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-1}{x^2\left(1+x^2\right)} + \frac{c_1}{1+x^2}$$

$$\frac{-1}{x^2\left(1+x^2\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$$

$$\left(x^3+x\right)A + \left(x^2+1\right)B + Cx^3 + Dx^2 = -1$$

$$(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B = -1 \quad \Rightarrow \quad A = 0,\ B = -1,\ C = 0,\ D = 1$$

Şimdi, t yi yerine yazalım ($y' = t$).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2} + \frac{1+c_1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x} + (1+c_1)\arctan x + c_2$$

genel çözümü bulunur.

Örnek 4. $x^2y''' - 6xy'' + 6y' = \ln x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem bağımlı değişkeni (y yi) içermez. O halde en düşük mertebeli türev için dönüşüm yapalım.

$$y' = t \qquad y'' = t' \qquad y''' = t''$$

Bu dönüşümü, verilen diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$x^2t'' - 6xt' + 6t = \ln x$$

Elde edilen form, Euler diferansiyel denklemidir. Euler diferansiyel denklemi için tekrar dönüşüm yapalım.

$$x = e^z \qquad x\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dz} \qquad x^2\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{d^2t}{dz^2} - \frac{dt}{dz}$$

Dönüşümü diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$\frac{d^2t}{dz^2} - \frac{dt}{dz} - 6\frac{dt}{dz} + 6t = z \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2t}{dz^2} - 7\frac{dt}{dz} + 6t = z$$

Diferansiyel denklem sabit katsayılıya dönüştü. O halde, diferansiyel denklemin karakteristik denkleminden karakteristik köklerini bulalım.

$$r^2 - 7r + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r-1)(r-6) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1,\ r_2 = 6$$

O halde homojen çözüm,

$$t_h = c_1e^z + c_2e^{6z}$$

şeklinde bulunur. Şimdi, diferansiyel denklemin sağ taraflı çözümü için belirsiz katsayılar yöntemini kullanalım.

$$t_{ö} = Az + B \quad \Rightarrow \quad t'_{ö} = A \quad \Rightarrow \quad t''_{ö} = 0$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$-7A + 6(Az + B) = z \quad \Rightarrow \quad 6Az + (B - 7A) = z$$

denklemi elde edilir. İki tarafın eşitliğinden,

$$6A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad 6B - 7A = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{7}{36}$$

olup, özel çözüm,

$$t_{ö} = \frac{1}{6}z + \frac{7}{36}$$

şeklindedir. Böylece genel çözüm,

$$t_g = t_h + t_{ö} = c_1 e^z + c_2 e^{6z} + \frac{1}{6}z + \frac{7}{36}$$

olarak bulunur. Şimdi z yi geri dönüştürelim. $(x = e^z,\ z = \ln x)$

$$t = c_1 x + c_2 x^6 + \frac{\ln x}{6} + \frac{7}{36}$$

olup, t de geri dönüştürülürse, $(y' = t)$

$$y' = c_1 x + c_2 x^6 + \frac{\ln x}{6} + \frac{7}{36} \quad \Rightarrow \quad y = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 \frac{x^7}{7} + \frac{x \ln x - x}{6} + \frac{7}{36}x + c_3$$

$$y = \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{7}x^7 + \frac{x \ln x}{6} + \frac{1}{36}x + c_3$$

genel çözümü elde edilir.

Bağımsız Değişken İçermeyen Diferansiyel Denklemler

Örnek 5. $y'' = (y')^3 + y'$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem bağımsız değişkeni (x i) içermez. O halde, y' için dönüşüm yapalım.

$$y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

Bu dönüşümü, verilen diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$p\frac{dp}{dy} = p^3 + p \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dy} = p^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p^2+1} = dy$$

Diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılabilirdir. Her iki tarafın integralini alalım.

$$\int \frac{dp}{p^2+1} = \int dy \quad \Rightarrow \quad \arctan p = y + c_1 \quad \Rightarrow \quad p = \tan(y + c_1)$$

p bulunduğuna göre, diferansiyel denklemi geri dönüştürelim.

$$\frac{dy}{dx} = \tan(y + c_1) \quad \Rightarrow \quad \int \cot(y + c_1)dy = \int dx \quad \Rightarrow \quad \ln \sin(y + c_1) = x + \ln c_2$$

$$\sin(y + c_1) = c_2 e^x \quad \Rightarrow \quad y + c_1 = \arcsin(c_2 e^x) \quad \Rightarrow \quad y = \arcsin(c_2 e^x) - c_1$$

genel çözümü bulunur.

Örnek 6. $yy'' = 2(y')^2 - 2y'$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem bağımsız değişkeni (x i) içermez. O halde, y' için dönüşüm yapalım.

$$y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

Bu dönüşümü, verilen diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$yp\frac{dp}{dy} = 2p^2 - 2p \quad \Rightarrow \quad y\frac{dp}{dy} = 2p - 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dy} - \frac{2}{y}p = -\frac{2}{y}$$

Diferansiyel denklem lineerdir. İntegrasyon çarpanını bulalım.

$$\lambda = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln y} = \frac{1}{y^2}$$

Diferansiyel denklemin her iki tarafını bulduğumuz integrasyon çarpanı ile çarpalım.

$$\frac{1}{y^2}\left(\frac{dp}{dy} - \frac{2}{y}p\right) = -\frac{1}{y^2}\frac{2}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y^2}\frac{dp}{dy} - \frac{2}{y^3}p = -\frac{2}{y^3}$$

Eşitliğin sol tarafı çarpım türevidir. Düzenleyerek her iki tarafın integralini alalım.

$$\int d\left(\frac{1}{y^2}.p\right) = -\int \frac{2}{y^3}dy \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{y^2} = \frac{1}{y^2} + c_1 \quad \Rightarrow \quad p = c_1y^2 + 1$$

Diferansiyel denklemde p yalnız bırakıldığına göre, p yi geri dönüştürelim.

$$\frac{dy}{dx} = c_1y^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{c_1y^2+1} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \frac{\arctan\left(\sqrt{c_1}y\right)}{\sqrt{c_1}} = x + c_2$$

$$\sqrt{c_1}y = \tan\left(\sqrt{c_1}x + \sqrt{c_1}c_2\right) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\tan\left(\sqrt{c_1}x + \sqrt{c_1}c_2\right)}{\sqrt{c_1}}$$

genel çözümü bulunur.

Not: Diferansiyel denklem ilk dönüşümden sonra ($y' = p$) değişkenlerine ayrılabilir olarak ele alınıp çözülebilirdi.

Örnek 7. $y'' + (y')^2 + 1 = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem bağımsız değişkeni (x i) içermez. O halde, y' için dönüşüm yapalım.

$$y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

Bu dönüşümü, verilen diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$p\frac{dp}{dy} + p^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p\frac{dp}{dy} = -p^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-p}{p^2+1}dp = dy$$

Diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılabilirdir. Her iki tarafın integralini alalım.

$$-\int \frac{p}{p^2+1}dp = \int dy \quad \Rightarrow \quad -\frac{\ln\left(p^2+1\right)}{2} = y + \ln c_1 \quad \Rightarrow \quad -\ln\left(p^2+1\right) = \ln e^{2y} + \ln c_1^2$$

$$p^2+1 = \frac{1}{c_1^2 e^{2y}} \quad \Rightarrow \quad p^2 = \frac{1-c_1^2 e^{2y}}{c_1^2 e^{2y}} \quad \Rightarrow \quad p = \mp\sqrt{\frac{1-c_1^2 e^{2y}}{c_1^2 e^{2y}}}$$

p bulunduğuna göre, diferansiyel denklemi geri dönüştürelim.

$$\frac{dy}{dx} = \mp\sqrt{\frac{1-c_1^2 e^{2y}}{c_1^2 e^{2y}}} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{c_1 e^y}{\sqrt{1-c_1^2 e^{2y}}}dy = \mp\int dx \quad \Rightarrow \quad \arcsin\left(c_1 e^y\right) = \mp x + c_2$$

$$e^y = \frac{\sin\left(\mp x + c_2\right)}{c_1} \quad \Rightarrow \quad e^y = \frac{\sin\left(x+c_2\right)}{c_1} \quad \Rightarrow \quad y = \ln\left(\frac{\sin\left(x+c_2\right)}{c_1}\right)$$

genel çözümü bulunur.

Örnek 8. $yy'' + \left(y'\right)^2 = y^2$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem bağımsız değişkeni (x i) içermez. O halde, y' için dönüşüm yapalım.

$$y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

Bu dönüşümü, verilen diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$yp\frac{dp}{dy} + p^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dy} = \frac{y^2-p^2}{yp}$$

Diferansiyel denklem homojendir. Homojen diferansiyel denklemi çözmek için dönüşüm yapalım.

$$p = uy \quad \Rightarrow \quad dp = udy + ydu$$

Dönüşümü diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$\frac{udy+ydu}{dy} = \frac{y^2-u^2y^2}{uy^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{udy+ydu}{dy} = \frac{1-u^2}{u} \quad \Rightarrow \quad u^2dy + uydu = \left(1-u^2\right)dy$$

$$uydu = \left(1-2u^2\right)dy \quad \Rightarrow \quad \int \frac{u}{\left(1-2u^2\right)}du = \int \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\ln\left(1-2u^2\right)}{4} = \ln y + \ln c_1$$

$$1-2u^2 = \left(c_1 y\right)^{-4} \quad \left(p = uy \Rightarrow u = \frac{p}{y}\right) \quad 1-\frac{2p^2}{y^2} = \left(c_1 y\right)^{-4} \quad \Rightarrow \quad y^2 - 2p^2 = y^2\left(c_1 y\right)^{-4}$$

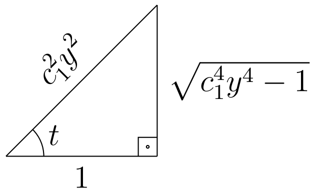
$$\frac{1}{y^2-2p^2} = c_1^4 y^2 \quad \Rightarrow \quad c_1^4 y^4 - 2c_1^4 y^2 p^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad p^2 = \frac{c_1^4 y^4 - 1}{2c_1^4 y^2}$$

Diferansiyel denklemde p yalnız bırakıldığına göre, p yi geri dönüştürelim.

$$(y')^2 = \frac{c_1^4 y^4 - 1}{2c_1^4 y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \mp \frac{\sqrt{c_1^4 y^4 - 1}}{\sqrt{2} c_1^2 y} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int \frac{\sqrt{2} c_1^2 y}{\sqrt{c_1^4 y^4 - 1}} dy}_{I} = \mp \int dx$$

$$I = \int \frac{\sqrt{2} c_1^2 y}{\sqrt{c_1^4 y^4 - 1}} dy \qquad y^2 = \frac{\sec t}{c_1^2} \Rightarrow 2y dy = \frac{\sec t \tan t}{c_1^2} dt$$

$$I = \int \frac{\sec t \tan t dt}{\sqrt{2}\sqrt{\sec^2 t - 1}} = \int \frac{\sec t dt}{\sqrt{2}} = \frac{\ln(\sec t + \tan t)}{\sqrt{2}}$$



$$\frac{\ln\left(c_1^2 y^2 + \sqrt{c_1^4 y^4 - 1}\right)}{\sqrt{2}} = \mp x + c_2$$

genel çözümü bulunur.