Diferansiyel Denklemler - 7. Uygulama

Sabitin Değişimi (Lagrange) Yöntemi

Örnek 1. $y'' + 9y = 3\sec(3x)$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen diferansiyel denklemi sağ tarafsız olarak ele alalım ve karakteristik köklerini bulalım.

$$r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow r_{1,2} = \mp 3i$$

O halde homojen çözüm,

$$y = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$$

şeklinde bulunur. Şimdi, diferansiyel denklemin çözümü için sabitin değişimi yöntemini kullanalım ve türev alalım.

$$\begin{aligned} c_1' \cos(3x) + \quad & c_2' \sin(3x) = 0 \\ -3c_1' \sin(3x) + 3 \quad & c_2' \cos(3x) = 3\sec(3x) \end{aligned}$$

Birinci satırı $3\sin(3x)$ ile, ikinci satırı $\cos(3x)$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned} 3c_1' \sin(3x)\cos(3x) + 3 \quad & c_2' \sin^2(3x) = 0 \\ -3c_1' \sin(3x)\cos(3x) + 3 \quad & c_2' \cos^2(3x) = 3\sec(3x)\cos(3x) = 3 \end{aligned}$$

İki denklemi taraf tarafa toplayalım.

$$3c_2' \underbrace{\left[\sin^2(3x) + \cos^2(3x)\right]}_{1} = 3c_2' = 3 \Rightarrow c_2' = 1$$

O halde, değişkenlerine ayırıp integral alırsak,

$$\frac{dc_2}{dx} = 1 \Rightarrow \int dc_2 = \int dx \Rightarrow c_2 = x + k_2$$

bulunur. Bu sabitin üslü ifadesini verilen denklemlerden birine yazıp diğer sabiti bulabiliriz.

$$c_1' \cos(3x) + c_2' \sin(3x) = 0 \Rightarrow c_1' \cos(3x) + 1\sin(3x) = 0 \Rightarrow \frac{dc_1}{dx}\cos(3x) = -\sin(3x)$$

Değişkenlerine ayırıp, integral alalım.

$$\int dc_1 = -\int \tan(3x)dx \Rightarrow c_1 = \frac{\ln(\cos(3x))}{3} + k_1$$

Böylece, c_1 ve c_2 değerleri yerine yazılırsa genel çözüm,

$$\begin{aligned}
y = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) &\Rightarrow \left(\frac{\ln(\cos(3x))}{3} + k_1\right)\cos(3x) + (x+k_2)\sin(3x) \\
&= k_1\cos(3x) + k_2\sin(3x) + \frac{\cos(3x)\ln(\cos(3x))}{3} + x\sin(3x)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 2. $y'' - 3y' + 2y = \sin(e^{-x})$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen diferansiyel denklemi sağ tarafsız olarak ele alalım ve karakteristik köklerini bulalım.

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow (r-1)(r-2) = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 2$$

O halde homojen çözüm,

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

şeklinde bulunur. Şimdi, diferansiyel denklemin çözümü için sabitin değişimi yöntemini kullanalım ve türev alalım.

$$\begin{aligned}
c_1'e^x + \ \ c_2'e^{2x} \quad &= 0 \\
c_1'e^x + \ \ c_2'2e^{2x} \quad &= \sin\left(e^{-x}\right)
\end{aligned}$$

Birinci satırı -2 ile çarpalım.

$$\begin{aligned}
-2c_1'e^x - \ \ 2c_2'e^{2x} \quad &= 0 \\
c_1'e^x + \ \ 2c_2'e^{2x} \quad &= \sin\left(e^{-x}\right)
\end{aligned}$$

İki denklemi taraf tarafa toplayalım.

$$-c_1'e^x = \sin\left(e^{-x}\right) \Rightarrow c_1' = -e^{-x}\sin\left(e^{-x}\right)$$

O halde, değişkenlerine ayırıp integral alırsak,

$$\frac{dc_1}{dx} = -e^{-x}\sin\left(e^{-x}\right) \Rightarrow \int dc_1 = -\int e^{-x}\sin\left(e^{-x}\right)dx$$

$$e^{-x} = t \Rightarrow -e^{-x}dx = dt$$

$$c_1 = \int \sin t\,dt = -\cos t + k_1 = -\cos\left(e^{-x}\right) + k_1$$

bulunur. Bu sabitin üslü ifadesini verilen denklemlerden birine yazıp diğer sabiti bulabiliriz.

$$c_1'e^x + c_2'e^{2x} = 0 \Rightarrow -e^{-x}\sin\left(e^{-x}\right)e^x + c_2'e^{2x} = 0 \Rightarrow \frac{dc_2}{dx}e^{2x} = \sin\left(e^{-x}\right)$$

Değişkenlerine ayırıp, integral alalım.

$$\int dc_2 = \underbrace{\int e^{-2x} \sin\left(e^{-x}\right) dx}_{I_1}$$

$$I_1 = \int e^{-x} e^{-x} \sin\left(e^{-x}\right) dx \qquad e^{-x} = t \Rightarrow -e^{-x} dx = dt$$

$$I_1 = -\int t \sin t dt \Rightarrow \begin{cases} t = u \Rightarrow & dt = du \\ -\sin t dt = dv \Rightarrow & \cos t = v \end{cases}$$

$$I_1 = t \cos t - \int \cos t dt = t \cos t - \sin t + k_2$$

$$c_2 = e^{-x} \cos\left(e^{-x}\right) - \sin\left(e^{-x}\right) + k_2$$

Böylece, c_1 ve c_2 değerleri yerine yazılırsa genel çözüm,

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^x + c_2 e^{2x} \\ &= \left(-\cos\left(e^{-x}\right) + k_1\right) e^x + \left(e^{-x} \cos\left(e^{-x}\right) - \sin\left(e^{-x}\right) + k_2\right) e^{2x} \\ &= k_1 e^x + k_2 e^{2x} - e^{2x} \sin\left(e^{-x}\right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \arctan x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle verilen diferansiyel denklemi sağ tarafsız olarak ele alalım ve karakteristik köklerini bulalım.

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r-2)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 2$$

O halde homojen çözüm,

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

şeklinde bulunur. Şimdi, diferansiyel denklemin çözümü için sabitin değişimi yöntemini kullanalım ve türev alalım.

$$\begin{aligned} c_1' e^{2x} + \quad & c_2' x e^{2x} && = 0 \\ 2c_1' e^{2x} + \quad & c_2' (2x+1) e^{2x} && = e^{2x} \arctan x \end{aligned}$$

Birinci satırı -2 ile çarpalım.

$$\begin{aligned}
-2c_1'e^{2x} + \quad & c_2'(-2x)e^{2x} && = 0 \\
2c_1'e^{2x} + \quad & c_2'(2x+1)e^{2x} && = e^{2x}\arctan x
\end{aligned}$$

İki denklemi taraf tarafa toplayalım.

$$c_2'e^{2x} = e^{2x}\arctan x \Rightarrow c_2' = \arctan x$$

O halde, değişkenlerine ayırıp integral alırsak,

$$\frac{dc_2}{dx} = \arctan x \Rightarrow \int dc_2 = \underbrace{\int \arctan x dx}_{I_1}$$

$$I_1 = \int \arctan x dx \Rightarrow \begin{cases} \arctan x = u \Rightarrow & \dfrac{1}{1+x^2}dx = du \\ dx = dv \Rightarrow & x = v \end{cases}$$

$$I_1 = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + k_2$$

$$c_2 = x\arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + k_2$$

bulunur. Bu sabitin üslü ifadesini verilen denklemlerden birine yazıp diğer sabiti bulabiliriz.

$$c_1'e^{2x} + c_2'xe^{2x} = 0 \Rightarrow c_1'e^{2x} + xe^{2x}\arctan x = 0 \Rightarrow \frac{dc_1}{dx}e^{2x} = -xe^{2x}\arctan x$$

Değişkenlerine ayırıp, integral alalım.

$$\int dc_1 = -\underbrace{\int x\arctan x dx}_{I_2}$$

$$I_2 = \int x\arctan x dx \Rightarrow \begin{cases} \arctan x = u \Rightarrow & \dfrac{1}{1+x^2}dx = du \\ xdx = dv \Rightarrow & \dfrac{x^2}{2} = v \end{cases}$$

$$I_2 = \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)}dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$c_1 = -\frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{\arctan x}{2} + \frac{x}{2} + k_1$$

Böylece, c_1 ve c_2 değerleri yerine yazılırsa genel çözüm,

$$\begin{aligned}
y &= c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} \\
&= \left(-\frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{\arctan x}{2} + \frac{x}{2} + k_1\right) e^{2x} + \left(x\arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + k_2\right) x e^{2x} \\
&= k_1 e^{2x} + k_2 x e^{2x} + \frac{x^2 e^{2x}\arctan x}{2} - \frac{e^{2x}\arctan x}{2} - \frac{x e^{2x}\ln(1+x^2)}{2}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Euler Diferansiyel Denklemi

Örnek 4. $x^3 y''' + x^2 y'' - 6xy' + 6y = 12x^2 + 7 + 6\ln x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem Euler diferansiyel denklemidir. Çözüme dönüşüm yaparak başlayalım.

$$x = e^t \qquad x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \qquad x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}$$

Dönüşümü diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 6\frac{dy}{dt} + 6y = 12e^{2t} + 6t + 7$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 12e^{2t} + 6t + 7$$

Diferansiyel denklem sabit katsayılıya dönüştü. O halde, diferansiyel denklemin karakteristik denkleminden karakteristik köklerini bulalım.

$$r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow (r-1)(r+2)(r-3) = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -2,\ r_3 = 3$$

O halde homojen çözüm,

$$y_h = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t}$$

şeklinde bulunur. Şimdi, diferansiyel denklemin sağ taraflı çözümü için belirsiz katsayılar yöntemini kullanalım.

$$y_{ö_1} = Ae^{2t}, \qquad y'_{ö_1} = 2Ae^{2t}, \qquad y''_{ö_1} = 4Ae^{2t}, \qquad y'''_{ö_1} = 8Ae^{2t}$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$8Ae^{2t}-8Ae^{2t}-10Ae^{2t}+6Ae^{2t}=12e^{2t}$$

denklemi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-4Ae^{2t}=12e^{2t}\Rightarrow A=-3$$

bulunur ve özel çözüm,

$$y_{ö_1}=-3e^{2t}$$

şeklindedir. Yine, özel çözüm için belirsiz katsayılar kullanılırsa,

$$y_{ö_2}=Bt+C,\qquad y'_{ö_2}=B,\qquad y''_{ö_2}=0,\qquad y'''_{ö_2}=0$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$-5B+6(Bt+C)=6t+7\Rightarrow 6Bt+(-5B+6C)=6t+7$$

denklemi elde edilir. İki tarafın eşitliğinden,

$$\begin{cases}6B=6\Rightarrow B=1\\ -5B+6C=7\Rightarrow -5+6C=7\Rightarrow C=2\end{cases}$$

olup, özel çözüm,

$$y_{ö_2}=t+2$$

şeklindedir. Böylece genel çözüm,

$$y_g=y_h+y_ö=c_1e^t+c_2e^{-2t}+c_3e^{3t}-3e^{2t}+t+2\qquad \big(x=e^t,t=\ln x\big)$$

$$y_g=c_1x+c_2x^{-2}+c_3x^3-3x^2+\ln x+2$$

olarak elde edilir.

Örnek 5. $x^2y''-3xy'+5y=8\cos(\ln x)+34x^{-2}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem Euler diferansiyel denklemidir. Çözüme dönüşüm yaparak başlayalım.

$$x=e^t\qquad x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$$

Dönüşümü diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 3\frac{dy}{dt} + 5y = 8\cos t + 34e^{-2t}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 5y = 8\cos t + 34e^{-2t}$$

Diferansiyel denklem sabit katsayılıya dönüştü. O halde, diferansiyel denklemin karakteristik denkleminden karakteristik köklerini bulalım.

$$r^2 - 4r + 5 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \mp \sqrt{16 - 20}}{2} \Rightarrow r_{1,2} = 2 \mp i$$

O halde homojen çözüm,

$$y_h = c_1 e^{2t}\cos t + c_2 e^{2t}\sin t$$

şeklinde bulunur. Şimdi, diferansiyel denklemin sağ taraflı çözümü için belirsiz katsayılar yöntemini kullanalım.

$$y_{ö_1} = A\cos t + B\sin t, \qquad y'_{ö_1} = B\cos t - A\sin t, \qquad y''_{ö_1} = -A\cos t - B\sin t$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$-A\cos t - B\sin t - 4\left(B\cos t - A\sin t\right) + 5\left(A\cos t + B\sin t\right) = 8\cos t$$

denklemi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$(4A - 4B)\cos t + (4A + 4B)\sin t = 8\cos t$$

denklemi elde edilir. İki tarafın eşitliğinden,

$$\left.\begin{aligned} 4A - 4B &= 8 \\ 4A + 4B &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 8A = 8 \Rightarrow A = 1, \quad B = -1$$

olup, özel çözüm,

$$y_{ö_1} = \cos t - \sin t$$

şeklindedir. Yine, özel çözüm için belirsiz katsayılar kullanılırsa,

$$y_{ö_2} = Ce^{-2t}, \qquad y'_{ö_2} = -2Ce^{-2t}, \qquad y''_{ö_2} = 4Ce^{-2t}$$

Bu özel çözüm ve türevlerini verilen diferansiyel denklemde ilgili sağ taraf ile birlikte yerine yazarsak,

$$4Ce^{-2t}+8Ce^{-2t}+5Ce^{-2t}=34e^{-2t}\Rightarrow 17Ce^{-2t}=34e^{-2t}\Rightarrow C=2$$

elde edilir. O halde özel çözüm,

$$y_{ö_2}=2e^{-2t}$$

şeklindedir. Böylece genel çözüm,

$$y_g=y_h+y_ö=c_1e^{2t}\cos t+c_2e^{2t}\sin t+\cos t-\sin t+2e^{-2t}\qquad \left(x=e^t, t=\ln x\right)$$

$$y_g=c_1x^2\cos(\ln x)+c_2x^2\sin(\ln x)+\cos(\ln x)-\sin(\ln x)+2x^{-2}$$

olarak elde edilir.

Örnek 6. $x^2y''+2xy'=\dfrac{1}{x}+x\arctan x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem Euler diferansiyel denklemidir. Çözüme dönüşüm yaparak başlayalım.

$$x=e^t\qquad x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$$

Dönüşümü diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+2\frac{dy}{dt}=e^{-t}+e^t\arctan\left(e^t\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=e^{-t}+e^t\arctan\left(e^t\right)$$

Diferansiyel denklem sabit katsayılıya dönüştü. O halde, diferansiyel denklemin karakteristik denkleminden karakteristik köklerini bulalım.

$$r^2+r=0\Rightarrow r(r+1)=0\Rightarrow r_1=0,\ r_2=-1$$

O halde homojen çözüm,

$$y=c_1+c_2e^{-t}$$

şeklinde bulunur. Şimdi, diferansiyel denklemin çözümü için sabitin değişimi yöntemini kullanalım ve türev alalım.

$$\begin{aligned} c_1'+\ c_2'e^{-t}&=0\\ -\ c_2'e^{-t}&=e^{-t}+e^t\arctan\left(e^t\right)\end{aligned}$$

İki denklemi taraf tarafa toplayalım.

$$c_1' = e^{-t} + e^t \arctan\left(e^t\right)$$

O halde, değişkenlerine ayırıp integral alırsak,

$$\frac{dc_1}{dt} = e^{-t} + e^t \arctan\left(e^t\right) \Rightarrow \int dc_1 = \int \left(e^{-t} + e^t \arctan\left(e^t\right)\right) dt = -e^{-t} + \underbrace{\int e^t \arctan\left(e^t\right) dt}_{I_1}$$

$$I_1 = \int e^t \arctan\left(e^t\right) dt \Rightarrow \begin{cases} \arctan\left(e^t\right) = u \Rightarrow & \dfrac{e^t}{1+e^{2t}} dt = du \\ e^t dt = dv \Rightarrow & e^t = v \end{cases}$$

$$I_1 = e^t \arctan\left(e^t\right) - \int \frac{e^{2t}}{1+e^{2t}} dt = e^t \arctan\left(e^t\right) - \frac{\ln\left(1+e^{2t}\right)}{2} + k_1$$

$$c_1 = -e^{-t} + e^t \arctan\left(e^t\right) - \frac{\ln\left(1+e^{2t}\right)}{2} + k_1$$

bulunur. Bu sabitin üslü ifadesini verilen denklemlerden birine yazıp diğer sabiti bulabiliriz.

$$c_1' + c_2' e^{-t} = 0 \Rightarrow e^{-t} + e^t \arctan\left(e^t\right) + c_2' e^{-t} = 0 \Rightarrow c_2' e^{-t} = -e^{-t} - e^t \arctan\left(e^t\right)$$

Değişkenlerine ayırıp, integral alalım.

$$\int dc_2 = \int \left(-1 - e^{2t} \arctan\left(e^t\right)\right) dt = -t - \underbrace{\int \left(e^{2t} \arctan\left(e^t\right)\right) dt}_{I_2}$$

$$I_2 = \int \left(e^{2t} \arctan\left(e^t\right)\right) dt \Rightarrow \begin{cases} \arctan\left(e^t\right) = u \Rightarrow & \dfrac{e^t}{1+e^{2t}} dt = du \\ e^{2t} dt = dv \Rightarrow & \dfrac{e^{2t}}{2} = v \end{cases}$$

$$I_2 = \frac{e^{2t}}{2} \arctan\left(e^t\right) - \frac{1}{2} \int \frac{e^{3t} dt}{1+e^{2t}} = \frac{e^{2t}}{2} \arctan\left(e^t\right) - \frac{1}{2} \int \left(e^t - \frac{e^t}{1+e^{2t}}\right) dt$$

$$c_2 = -t - \frac{e^{2t}}{2} \arctan\left(e^t\right) + \frac{e^t}{2} - \frac{\arctan\left(e^t\right)}{2} + k_2$$

Böylece, c_1 ve c_2 değerleri yerine yazılırsa genel çözüm,

$$\begin{aligned} y =& -e^{-t} + e^t \arctan\left(e^t\right) - \frac{\ln\left(1+e^{2t}\right)}{2} + k_1 \\ &+ \left(-t - \frac{e^{2t}}{2}\arctan\left(e^t\right) + \frac{e^t}{2} - \frac{\arctan\left(e^t\right)}{2} + k_2\right) e^{-t} \\ =& k_1 + k_2 e^{-t} + \frac{e^t}{2}\arctan\left(e^t\right) - \frac{e^{-t}}{2}\arctan\left(e^t\right) - \frac{\ln\left(1+e^{2t}\right)}{2} - te^{-t} \end{aligned}$$

$$y = k_1 + \frac{k_2}{x} + \frac{x\arctan x}{2} - \frac{\arctan x}{2x} - \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{2} - \frac{\ln x}{x}$$

olarak elde edilir.