

Diferansiyel Denklemler - 1. Uygulama

Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Tanım 1. x bağımsız değişkeni ile bu değişkene bağlı fonksiyonu (örneğin $y(x)$) ve bu fonksiyonun çeşitli mertebeden türevlerini içeren denkleme diferansiyel denklem denir.

Tanım 2. Bir diferansiyel denklemde en yüksek mertebeli türev denklemin mertebesidir. En yüksek mertebeli türevin derecesi de diferansiyel denklemin derecesidir.

Tanım 3. Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin hepsi birinci dereceden ise bu diferansiyel denkleme lineer, aksi halde non-lineer (lineer olmayan) diferansiyel denklem denir.

Örnek 1. Aşağıdaki tablo ile verilen diferansiyel denklemleri sınıflandırınız.

Diferansiyel Denklem	Mertebe	Derece	Lineerlik
1) $x(y')^3 + y^2 + 1 = 0$	1	3	Non-lineer
2) $dy = (x^2 + y^3) dx$	1	1	Lineer
3) $yy' + x^3y^2 - 4 = 0$	1	1	Non-lineer
4) $y'' + y' + 1 = e^{-x}$	2	1	Lineer
5) $\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} - 3x^2u = 0$	2	1	Lineer
6) $\frac{dv}{dt} \cdot \frac{d^3v}{dt^3} + 3v = 5$	3	1	Non-lineer
7) $(y')^2 - y^{(iv)} \sin x - x = 0$	4	1	Non-lineer
8) $x(y'')^3 + (y')^5 + y = 0$	2	3	Non-lineer
9) $y''' + y' \tan x = \sin 2x$	3	1	Lineer

Diferansiyel Denklemlerin Genel ve Özel Çözümleri

Tanım 4. Bir diferansiyel denklemi sağlayan $y = f(x)$ ifadesine söz konusu diferansiyel denklemin bir çözümü (veya integrali) denir. Ayrıca, diferansiyel denklemin genel çözümü veya genel integrali (c gibi keyfi sabit içerirse) bir eğri ailesidir.

Örnek 2. $y''' = 1$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Diferansiyel denklemin genel çözümünü bulmak için türevden kurtuluncaya kadar her iki tarafın integralini alırsak (mertebe 3 olduğu için 3 kez integral almalıyız),

$$y'' = x + c_1 \quad (c_1: \text{keyfi değişken})$$

$$y' = \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2 \quad (c_1, c_2: \text{keyfi değişken})$$

$$y = \frac{x^3}{6} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3 \quad (c_1, c_2, c_3: \text{keyfi değişken})$$

Genel çözümü elde edilmiş olur. Bu genel çözüm (keyfi değişken içerdiğinden) bir eğri ailesi oluşturur.

Bu diferansiyel denklem için $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$ ve $y''(1) = 2$ başlangıç değerleri verilmiş olsun. Bu değerler türevlerde yerine yazılırsa c_1, c_2, c_3 sabitleri,

$$y''(1) = 1 + c_1 = 2 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$y'(1) = \frac{1}{2} + c_1 + c_2 = -1 \Rightarrow c_1 + c_2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow 1 + c_2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow c_2 = -\frac{5}{2}$$

$$y(1) = \frac{1}{6} + \frac{c_1}{2} + c_2 + c_3 = 1 \Rightarrow \frac{c_1}{2} + c_2 + c_3 = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + c_3 = \frac{5}{6} \Rightarrow c_3 = \frac{17}{6}$$

olarak bulunur. Böylece diferansiyel denklemin verilen başlangıç koşulları altındaki özel çözümü,

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}x + \frac{17}{6}$$

şeklinde olur.

Not. Diferansiyel denklemin mertebesi 3 olduğu için genel çözüm 3 tane keyfi değişken içermelidir. Özel çözüm için ise (fonksiyonun kendisi, 1. türevi ve 2. türevi için) 3 tane başlangıç şartı verilmelidir. Genel olarak, n . mertebeden diferansiyel denklemin genel çözümü n tane keyfi değişken içerir ve özel çözüm için fonksiyonun kendisinden, $n - 1$. mertebeden türevlerine kadar toplam n tane başlangıç koşulu verilmelidir.

Diferansiyel Denklemlerin Elde Edilmesi

Tanım 5. Genel çözümü $y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ (bağımsız değişken ve n tane keyfi değişken) olan bir diferansiyel denklemi bulmak için fonksiyonun n . mertebeye kadar türevi alınır. Böylece elde edilen (fonksiyonun kendisi ve n tane türevi) $n + 1$ tane denklemden c sabitleri yok edilerek fonksiyon ve türevleri ile n . mertebeden diferansiyel denklem oluşturulur.

Örnek 3. Genel çözümü $y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$ olan diferansiyel denklemi elde ediniz.

Çözüm. Genel çözüm 2 tane keyfi değişkendenden oluştuu için 2 kez türev almalıyız.

$$y' = -\frac{c_1}{x} \sin(\ln x) + \frac{c_2}{x} \cos(\ln x)$$

$$y'' = \frac{c_1}{x^2} \sin(\ln x) - \frac{c_1}{x^2} \cos(\ln x) - \frac{c_2}{x^2} \cos(\ln x) - \frac{c_2}{x^2} \sin(\ln x)$$

Keyfi deęişkenleri yok etmek için 2. mertebeden türevi fonksiyonun kendisi ve türevi ile ifade edebiliriz.

$$y'' = \frac{-1}{x^2} [c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)] - \frac{1}{x} \left[-\frac{c_1}{x} \sin(\ln x) + \frac{c_2}{x} \cos(\ln x) \right]$$

y ve y' denklemlerini yerine yazarsak, diferansiyel denklem

$$y'' = \frac{-1}{x^2} y - \frac{1}{x} y'$$

olarak bulunur.

Örnek 4. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$ eğri ailesinin sağladığı diferansiyel denklemi bulunuz.

Çözüm. Öncelikle 3 tane keyfi değişken olduğuna dikkat ederek 3 kez türev alalım.

$$y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 2c_3 e^{2x}$$

$$y'' = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 4c_3 e^{2x}$$

$$y''' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 8c_3 e^{2x}$$

Burada, fonksiyonun ve türevlerinin sadece sabit katsayılarının farklı olduğunu göz önüne alırsak, fonksiyon ve türevlerini toplayarak veya çıkararak keyfi sabitleri yok edebiliriz. (c_1 ve c_2 için türevlerde sadece işaretler değişiyor. O halde toplama veya çıkarma işlemi yaparak bunları yok edebiliriz.)

$$y'' - y = 3c_3 e^{2x}$$

$$y''' - y' = 6c_3 e^{2x}$$

Bu denklemlerin sağ taraflarına dikkat edersek, bir ifadeyi diğerinin katı olarak yazabiliriz.

$$y''' - y' = 2(y'' - y)$$

Böylece,

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilmiş olur.

Örnek 5. Genel çözümü $y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ olan diferansiyel denklemi elde ediniz.

Çözüm. Genel çözüm 3 tane keyfi sabit içerdiği için 3 kez türev alalım.

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x$$

$$y''' = 6c_3$$

Dikkat edilirse, 3. mertebeden türev denkleminde c_3 sabit değişkeni kolaylıkla yalnız bırakılabilir. Böylece,

$$c_3 = \frac{y'''}{6}$$

bulunur ve 2. mertebeden türevde c_3 yerine yazılırsa ve benzer şekilde c_2 yalnız bırakılırsa,

$$y'' = 2c_2 + xy''' \Rightarrow c_2 = \frac{y'' - xy'''}{2}$$

bulunup 1. mertebeden türevde de c_1 ve c_2 değiştirilirse ve c_1 yalnız bırakılırsa,

$$y' = c_1 + x(y'' - xy''') + x^2 \frac{y'''}{2} \Rightarrow c_1 = y' - xy'' + x^2 \frac{y'''}{2}$$

elde edilir. Son olarak keyfi değişkenler genel çözümde yerine yazılırsa,

$$y = \left(y' - xy'' + x^2 \frac{y'''}{2} \right) x + \left(\frac{y'' - xy'''}{2} \right) x^2 + \frac{y'''}{6} x^3$$

denklemini elde edilir ve bu denklemde keyfi sabit yoktur. Düzenlenirse,

$$\frac{x^3}{6} y''' - \frac{x^2}{2} y'' + xy' - y = 0$$

veya

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

Not. Diferansiyel denklemi elde ederken (1) fonksiyonu veya türevlerini birbirleri cinsinden yazma (2) fonksiyon ve türevleri arasında aynı (veya işaret farkıyla aynı) katsayılardan yararlanarak bağıntılar yazma (3) keyfi sabitleri yalnız bırakarak fonksiyonda ve türevlerinde yerine yazma yöntemlerinden uygun olan kullanılabilir.

Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Değişkenlerine Ayrılabilen Diferansiyel Denklemler

Tanım 6. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ denklemi; $M(x)dx + N(y)dy = 0$ şeklinde yazılabilirse değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklemdir. Buradan; $\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$ yazılır. Genel çözüm: $F(x, y, c) = 0$ şeklinde elde edilir.

Örnek 6. $e^x y' + y - y^2 = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen denklem,

$$e^x \frac{dy}{dx} + (y - y^2) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y(1-y)} + e^{-x} dx = 0$$

şeklinde değişkenlerine ayrılır. Buradan,

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} + \int e^{-x} dx = c \Rightarrow \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \right) dy + \int e^{-x} dx = c$$

olup integral alındığında,

$$\ln|y| - \ln|1-y| - e^{-x} = c$$

elde edilir. Böylece genel çözüm,

$$\ln \left| \frac{y}{1-y} \right| - e^{-x} = c$$

şeklinde bulunur.

Örnek 7. $2x(1+y^2)dx - y(1+2x^2)dy = 0$ diferansiyel denkleminin $y(0) = 1$ olan çözümünü elde ediniz.

Çözüm. Verilen denklem,

$$\frac{2x}{1+2x^2} dx - \frac{y}{1+y^2} dy = 0$$

şeklinde değişkenlerine ayrılır. Buradan,

$$\int \frac{2x}{1+2x^2} dx - \int \frac{y}{1+y^2} dy = c_1$$

olup integral alındığında,

$$\frac{1}{2} \ln(1+2x^2) - \frac{1}{2} \ln(1+y^2) = c_1$$

elde edilir. Böylece,

$$\ln \left(\frac{1+2x^2}{1+y^2} \right) = 2c_1 = \ln c \Rightarrow \frac{1+2x^2}{1+y^2} = c$$

genel çözümü elde edilir. $x = 0$ için $y = 1$ başlangıç koşulundan $c = \frac{1}{2}$ değerine ulaşılır. O halde,

$$y^2 = 4x^2 + 1$$

özel çözümü elde edilir.

Örnek 8. $(2xy + 4x + y + 2) dx = (yx^2 + xy + 2y) dy$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen denklem düzenlenirse,

$$[y(2x + 1) + 2(2x + 1)] dx = y(x^2 + x + 2) dy$$

şekline gelir ve tekrar bir düzenleme ile,

$$(y + 2)(2x + 1) dx = y(x^2 + x + 2) dy$$

olup,

$$\frac{2x + 1}{x^2 + x + 2} dx = \frac{y dy}{y + 2}$$

şeklinde değişkenlerine ayrılır. Buradan integrale geçilirse,

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{y + 2}\right) dy$$

olup

$$\ln|x^2 + x + 2| = y - \ln|y + 2| + c_1$$

genel çözümüne ulaşılır. Logaritmik ifadeden kurtulmak için düzenleme yapılırsa,

$$\ln|x^2 + x + 2| + \ln|y + 2| = y + c_1$$

logaritma özelliği yardımıyla,

$$\ln|(x^2 + x + 2)(y + 2)| = y + c_1$$

bulunur ve her iki taraf e üssü olarak yazılırsa,

$$(x^2 + x + 2)(y + 2) = e^{y+c_1} = e^y \cdot e^{c_1} \quad (e^{c_1} = c)$$

olup,

$$(x^2 + x + 2)(y + 2) = c \cdot e^y$$

genel çözümü elde edilir.

Değişkenlerine Ayrılabilen Diferansiyel Denklemlere Dönüştürülebilen Diferansiyel Denklemler

Tanım 7. $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ (a, b, c : sabit) diferansiyel denklemini ele alalım. Bu denklem, $ax + by + c = u$ dönüşümü ile değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denkleme dönüştürülebilir.

Örnek 9. $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{x+y+1}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Bu diferansiyel denklem kök operatöründen dolayı mevcut haliyle değişkenlerine ayırlanamamaktadır.

$$x + y + 1 = u$$

dönüşümü uygulayalım. Dönüşümde her iki tarafın x bağımsız değişkenine göre türevini alalım.

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1 = 2\sqrt{u}$$

$$du = (1 + 2\sqrt{u}) dx \Rightarrow \frac{du}{1 + 2\sqrt{u}} = dx$$

olup integrale geçilirse,

$$\int \frac{du}{1 + 2\sqrt{u}} = \int dx$$

olur. u değişkenine bağlı integralin alınabilmesi için değişken dönüşümü yapılmalıdır.

$$u = t^2, du = 2t dt \Rightarrow \int \left(\frac{2t}{2t + 1} \right) dt = x + c_1 \Rightarrow \int \left(1 - \frac{1}{2t + 1} \right) dt = x + c_1$$

$$t - \frac{1}{2} \ln|2t + 1| = x + c_1 \quad \left(t = \sqrt{u} \text{ ve } u = x + y + 1 \Rightarrow t = \sqrt{x + y + 1} \right)$$

$$\sqrt{x + y + 1} - \frac{1}{2} \ln \left(2\sqrt{x + y + 1} + 1 \right) = x + c_1$$

veya

$$2\sqrt{x + y + 1} - \ln \left(2\sqrt{x + y + 1} + 1 \right) = 2x + c \quad (c = 2c_1)$$

genel çözümü elde edilir.

Örnek 10. $(x + 2y + 1) dx + (2x + 4y + 3) dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm.

$$x + 2y = u$$

dönüşümü uygulayalım. Dönüşümde her iki tarafın x bağımsız değişkenine göre türevini alalım.

$$1 + 2\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} - 1 \right)$$

Verilen diferansiyel denklemde dx ve dy bileşenlerinin ayrı olarak verildiği göz önüne alınırsa,

$$dy = \frac{1}{2} du - \frac{1}{2} dx$$

olup diferansiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$(u + 1) dx + (2u + 3) \left(\frac{1}{2} du - \frac{1}{2} dx \right) = 0$$

olur. Parantezlerin içi düzenlenerek,

$$dx = (2u + 3) du$$

diferansiyel denkleme ulaşılır. Buradan, integrale geçilirse,

$$\int dx = \int (2u + 3) du \Rightarrow x + c = u^2 + 3u$$

elde edilir. Böylece, $x + 2y = u$ dönüşümü ele alınarak,

$$x + c = (x + 2y)^2 + 3(x + 2y) \Rightarrow (x + 2y)^2 + 2x + 6y = c$$

genel çözümü elde edilir.