

Diferansiyel Denklemler - 9. Uygulama

Örnek 1. $y'' + 4y = 3 \sin(Nx)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = M$ başlangıç değer probleminin çözümü $y = \cos(2x) + \sin(2x) + \sin x$ olarak veriliyor. $M + N$ değerini bulunuz.

Çözüm. Verilen y çözümü diferansiyel denklemi sağlamalıdır. O halde y fonksiyonunun 2 kez türevini alalım.

$$y' = -2 \sin(2x) + 2 \cos(2x) + \cos x$$

Birinci türev için verilen başlangıç değer koşulunu kullanalım:

$$y' = 2 + 1 = 3 = M$$

$$y'' = -4 \cos(2x) - 4 \sin(2x) - \sin x$$

Türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$-4 \cos(2x) - 4 \sin(2x) - \sin x + 4 \cos(2x) + 4 \sin(2x) + 4 \sin x = 3 \sin x = 3 \sin(Nx) \Rightarrow N = 1$$

O halde,

$$M + N = 3 + 1 = 4$$

bulunur.

Örnek 2. $3y''' + 4y'' - 5y' - 2y = 2x \cos\left(\frac{x}{3}\right) - 3e^{-2x} + e^x \sin x$ diferansiyel denkleminin özel çözümü için kullanılacak fonksiyonları bulunuz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem sabit katsayılı yüksek mertebeden sağ taraflı diferansiyel denklemdir. Öncelikle karakteristik denklemin kökleri bulunmalıdır.

$$3r^3 + 4r^2 - 5r - 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -2, r_3 = -\frac{1}{3}$$

Şimdi, sağ taraf için kullanılacak özel çözümler yazılabilir:

$$y_{\ddot{o}_1} = x \left(A \cos\left(\frac{x}{3}\right) + B \sin\left(\frac{x}{3}\right) \right)$$

$$y_{\ddot{o}_2} = Cxe^{-2x} \quad (-2 \text{ kökü için özel durum})$$

$$y_{\ddot{o}_3} = e^x (D \cos x + E \sin x)$$

Örnek 3. $2y''' + 6y'' + 8y' + 4y = 3 \sin(2x) - 4e^{-x} + 8x^2 + 5 + e^{-x} \cos x$ diferansiyel denkleminin özel çözümü için kullanılacak fonksiyonları bulunuz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem sabit katsayılı yüksek mertebeden sağ taraflı diferansiyel

denklemdir. Öncelikle karakteristik denklemin kökleri bulunmalıdır.

$$2r^3 + 6r^2 + 8r + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = -1, r_{2,3} = -1 \mp i$$

Şimdi, sağ taraf için kullanılacak özel çözümler yazılabilir:

$$y_{\ddot{o}_1} = A \cos(2x) + B \sin(2x)$$

$$y_{\ddot{o}_2} = Cxe^{-x} \quad (-1 \text{ kökü için özel durum})$$

$$y_{\ddot{o}_3} = Dx^2 + Ex + F$$

$$y_{\ddot{o}_4} = xe^{-x} (G \cos x + H \sin x) \quad (-1 \mp i \text{ kökü için özel durum})$$

Örnek 4. $y''' - 6y'' + 13y' = e^{3x} \sin(2x) + \cos x + 5x + 4$ diferansiyel denkleminin özel çözümü için kullanılacak fonksiyonları bulunuz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem sabit katsayılı yüksek mertebeden sağ taraflı diferansiyel denklemdir. Öncelikle karakteristik denklemin kökleri bulunmalıdır.

$$r^3 - 6r^2 + 13r = 0 \Rightarrow r(r^2 - 6r + 13) = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_{2,3} = 3 \mp 2i$$

Şimdi, sağ taraf için kullanılacak özel çözümler yazılabilir:

$$y_{\ddot{o}_1} = e^{3x} x (A \cos(2x) + B \sin(2x)) \quad (3 \mp 2i \text{ kökü için özel durum})$$

$$y_{\ddot{o}_2} = C \cos x + D \sin x$$

$$y_{\ddot{o}_3} = x(Ex + F) \quad (0 \text{ kökü için özel durum})$$

Örnek 5. $y^{(iv)} - 16y = e^x$ diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem sabit katsayılı yüksek mertebeden sağ taraflı diferansiyel denklemdir. Öncelikle karakteristik denklemin kökleri bulunmalıdır.

$$r^4 - 16 = 0 \Rightarrow (r^2 - 4)(r^2 + 4) = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \mp 2, r_{3,4} = \mp 2i$$

Bulunan bu karakteristik kökler yardımıyla homojen çözüm şu şekildedir:

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x)$$

Özel çözüm için:

$$y_{\ddot{o}} = Ae^x \Rightarrow y'_{\ddot{o}} = Ae^x \Rightarrow y''_{\ddot{o}} = Ae^x \Rightarrow y'''_{\ddot{o}} = Ae^x \Rightarrow y^{(iv)}_{\ddot{o}} = Ae^x$$

Bu özel çözümü verilen diferansiyel denklemden yerine yazarak A katsayısı bulunabilir.

$$Ae^x - 16Ae^x = e^x \Rightarrow -15A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{15} \Rightarrow y_{\ddot{o}} = -\frac{1}{15}e^x$$

Böylece genel çözüm şu şekildedir:

$$y_g = y_h + y_o = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x) - \frac{1}{15} e^x$$

Örnek 6. $y'' + 3y' + 2y = x e^{-x}$ diferansiyel denklemi veriliyor. Aşağıdakilerden hangisi bu diferansiyel denklemin indirgenmiş şeklidir?

a) $u'' - u' = x$ b) $u'' + u = x$ c) $u'' + u' = x$ d) $u'' - u = x$ e) $u'' + 2u' = x$

Çözüm. Diferansiyel denklemi indirgemek için sağ taraftaki polinom katsayısı yerine bir $u(x)$ fonksiyonu yazalım.

$$y = u(x)e^{-x} \Rightarrow y' = u'(x)e^{-x} - u(x)e^{-x} \Rightarrow y'' = u''(x)e^{-x} - 2u'(x)e^{-x} + u(x)e^{-x}$$

Bu fonksiyonlar verilen diferansiyel denklemde yerine yazılırsa, indirgenmiş diferansiyel denklem elde edilmiş olur:

$$(u'' - 2u' + u + 3u' - 3u + 2u)e^{-x} = x e^{-x} \Rightarrow u'' + u' = x \quad \text{Doğru cevap: c)}$$

Örnek 7. $y''' - 3y'' + 4y = e^{2x} \cos(3x)$ diferansiyel denklemi veriliyor. Aşağıdakilerden hangisi bu diferansiyel denklemin indirgenmiş şeklidir?

a) $u''' - 3u'' = \cos(3x)$ b) $u''' + 3u'' = \cos(3x)$ c) $u''' + 3u' = \cos(3x)$
d) $u'' - 3u' = \cos(3x)$ e) $u'' + 3u' = \cos(3x)$

Çözüm. Diferansiyel denklemi indirgemek için sağ taraftaki trigonometrik katsayı yerine bir $u(x)$ fonksiyonu yazalım.

$$y = u(x)e^{2x} \Rightarrow y' = u'e^{2x} + 2ue^{2x} \Rightarrow y'' = u''e^{2x} + 4u'e^{2x} + 4ue^{2x}$$

$$y''' = u'''e^{2x} + 6u''e^{2x} + 12u'e^{2x} + 8ue^{2x}$$

Bu fonksiyonlar verilen diferansiyel denklemde yerine yazılırsa, indirgenmiş diferansiyel denklem elde edilmiş olur:

$$(u''' + 6u'' + 12u' + 8u - 3u'' - 12u' - 12u + 4u)e^{2x} = e^{2x} \cos(3x) \Rightarrow u''' + 3u'' = \cos(3x)$$

Doğru cevap: b)

Örnek 8. $y'' - 4y' + 3y = 2xe^x$ diferansiyel denkleminde $y = u(x)e^x$ dönüşümü uygulanırsa ortaya çıkacak diferansiyel denklemi bulunuz.

Çözüm.

$$y = u(x)e^x \Rightarrow y' = u'e^x + ue^x \Rightarrow y'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$$

Bu fonksiyonlar verilen diferansiyel denklemde yerine yazılırsa, indirgenmiş diferansiyel denklem elde edilmiş olur:

$$(u'' + 2u' + u - 4u' - 4u + 3u)e^x = 2xe^x \Rightarrow u'' - 2u' = 2x$$

Örnek 9. İkinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklemin parametrelerin değişimi yöntemi ile çözümünde $c_1'e^{3x} + c_2'e^{-5x} = 0$ denklemleri elde edildiğine göre bu diferansiyel denklem ne olabilir?

Çözüm. Verilen denklem sistemin birinci satırından karakteristik denklemin köklerinin 3 ve -5 olduğu görülmektedir. O halde diferansiyel denklemin sol tarafı bulunabilir:

$$r_1 = 3, r_2 = -5 \Rightarrow (r - 3)(r - 5) = r^2 + 2r - 15 \Rightarrow y'' + 2y' - 15y$$

Sistemin ikinci satırının sağ tarafı ise diferansiyel denklemin sağ tarafını vermelidir. O halde diferansiyel denklem şu şekildedir:

$$y'' + 2y' - 15y = \arcsin e^x$$

Örnek 10. $y'' + 3y' - 4y = -5e^x$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $y = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-4x}$ şeklinde ifade edildiğine göre $c_2'(x) = \frac{dc_2}{dx}$ türev fonksiyonu nedir?

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem için genel çözümü kullanarak Lagrange (sabitlerin değişimi) yöntemini uygulayalım.

$$\begin{aligned} c_1'e^x + c_2'e^{-4x} &= 0 \\ c_1'e^x - 4c_2'e^{-4x} &= -5e^x \end{aligned}$$

c_1 i yok etmek için birinci satırdan ikinci satırı çıkartarak c_2' elde edilebilir.

$$5c_2'e^{-4x} = 5e^x \Rightarrow c_2'e^{-4x} = e^x \Rightarrow c_2' = e^{5x}$$

Örnek 11. $x^2y'' - 7xy' + 7y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem Cauchy-Euler diferansiyel denklemdir. Çözüme dönüşüm yaparak başlayalım.

$$x = e^t \quad x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \quad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

Dönüşümü diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 7\frac{dy}{dt} + 7y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 8\frac{dy}{dt} + 7y = 0$$

Diferansiyel denklem sabit katsayılıya dönüştü. O halde, diferansiyel denklemin karakteristik denkleminin karakteristik köklerini bulalım.

$$r^2 - 8r + 7 = 0 \Rightarrow (r - 1)(r - 7) = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 7$$

O halde genel çözüm şu şekildedir:

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{7t} \quad (x = e^t)$$

$$y = c_1 x + c_2 x^7$$

Örnek 12. $y'' + y(y')^2 = 0$ diferansiyel denkleminin $y(1) = -1$, $y'(1) = 1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümündeki c_1 parametresinin değeri nedir?

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem bağımsız değişkeni (x i) içermez. O halde, y' için dönüşüm yapalım.

$$y' = p \quad y'' = p \frac{dp}{dy}$$

Bu dönüşümü, verilen diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$p \frac{dp}{dy} + yp^2 = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dy} = -yp$$

Diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılabilir. Her iki tarafın integralini alalım.

$$\int \frac{dp}{p} = - \int y dy \Rightarrow \ln p = -\frac{y^2}{2} + c_1 \Rightarrow \ln y' = -\frac{y^2}{2} + c_1$$

Başlangıç değer koşullarını yerine yazalım.

$$\ln 1 = -\frac{(-1)^2}{2} + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$$

Örnek 13. $x^3 y'' - y' = x^4 e^{2x}$ diferansiyel denkleminin uygun bir dönüşüm ile lineer diferansiyel denkleme dönüşmüş şeklini bulunuz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem bağımlı değişkeni (y yi) içermez. O halde en düşük mertebeli türev için dönüşüm yapalım.

$$y' = t \quad y'' = t'$$

Bu dönüşümü, verilen diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$x^3 t' - t = x^4 e^{2x}$$

t' ifadesinin katsayısını 1 yapmak için her tarafı x^3 e bölersek lineer diferansiyel denklem hali

elde edilir:

$$t' - \frac{1}{x^3}t = xe^{2x}$$

Örnek 14. $y'y'' - y(y')^3 = (y')^2 y$ diferansiyel denkleminin y' türevinin çözümlerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y' = e^y - 1$ b) $y' = e^y + 1$ c) $y' = e^{\frac{y^2}{2}} - 1$ d) $y' = e^{\frac{y^2}{2}} + 1$ e) $y' = e^{\frac{y}{2}} - 1$

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem bağımsız değişkeni (x i) içermez. O halde, y' için dönüşüm yapalım.

$$y' = p \quad y'' = p \frac{dp}{dy}$$

Bu dönüşümü, verilen diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$p^2 \frac{dp}{dy} - yp^3 = yp^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dy} - yp = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dy} = (p+1)y$$

Diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılabilir. Her iki tarafın integralini alalım.

$$\int \frac{dp}{p+1} = \int y dy \quad \Rightarrow \quad \ln(p+1) = \frac{y^2}{2} \quad \Rightarrow \quad p+1 = e^{\frac{y^2}{2}}$$

$$p = e^{\frac{y^2}{2}} - 1 \quad \Rightarrow \quad y' = e^{\frac{y^2}{2}} - 1$$

Doğru cevap: c)