

Diferansiyel Denklemler - 6. Uygulama

Örnek 1. $y^{(6)} + 4y^{(4)} + 3y'' = 0$ diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem yüksek mertebeden homojen diferansiyel denklemdir. Genel çözüm, karakteristik denklemin kökleri yardımıyla yazılır.

$$r^6 + 4r^4 + 3r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r^4 + 4r^2 + 3) = 0 \Rightarrow r^2(r^2 + 1)(r^2 + 3) = 0$$

$$r_{1,2} = 0, r_{3,4} = \mp i, r_{5,6} = \mp \sqrt{3}i$$

Bulunan bu karakteristik kökler yardımıyla genel çözüm şu şekildedir:

$$y = c_1 + c_2x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + c_5 \cos(\sqrt{3}x) + c_6 \sin(\sqrt{3}x)$$

Örnek 2. $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$ diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem yüksek mertebeden homojen diferansiyel denklemdir. Genel çözüm, karakteristik denklemin kökleri yardımıyla yazılır.

$$r^5 + 2r^3 + r = 0 \Rightarrow r(r^4 + 2r^2 + 1) = 0 \Rightarrow r(r^2 + 1)^2 = 0$$

$$r_1 = 0, r_{2,3,4,5} = \mp i \quad (r_{2,3} = i, r_{4,5} = -i)$$

Bulunan bu karakteristik kökler yardımıyla genel çözüm şu şekildedir:

$$y = c_1 + (c_2x + c_3) \cos x + (c_4x + c_5) \sin x$$

Örnek 3. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$ diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem yüksek mertebeden homojen diferansiyel denklemdir. Genel çözüm, karakteristik denklemin kökleri yardımıyla yazılır.

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0 \Rightarrow (r^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1, r_{3,4} = -1$$

Bulunan bu karakteristik kökler yardımıyla genel çözüm şu şekildedir:

$$y = (c_1x + c_2)e^x + (c_3x + c_4)e^{-x}$$

Örnek 4. $y''' + 3y'' - 10y' = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 70$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem yüksek mertebeden homojen diferansiyel denklemdir. Genel çözüm, karakteristik denklemin kökleri yardımıyla yazılır.

$$r^3 + 3r^2 - 10r = 0 \Rightarrow r(r^2 + 3r - 10) = 0 \Rightarrow r(r + 5)(r - 2) = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = -5, r_3 = 2$$

Bulunan bu karakteristik kökler yardımıyla genel çözüm şu şekildedir:

$$y = c_1 + c_2 e^{-5x} + c_3 e^{2x}$$

Şimdi özel çözüm için 2 defa türev alınmalıdır.

$$y = c_1 + c_2 e^{-5x} + c_3 e^{2x} \Rightarrow y(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 7$$

$$y' = -5c_2 e^{-5x} + 2c_3 e^{2x} \Rightarrow y'(0) = -5c_2 + 2c_3 = 0$$

$$y'' = 25c_2 e^{-5x} + 4c_3 e^{2x} \Rightarrow y''(0) = 25c_2 + 4c_3 = 70$$

Böylece, c sabitleri şu şekilde bulunur:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 5$$

Buradan, özel çözüm şu şekildedir:

$$y = 2e^{-5x} + 5e^{2x}$$

Örnek 5. $y^{(4)} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0$ diferansiyel denklemi ile ilgili aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- a) Karakteristik denklemi çakışık köke sahiptir.
- b) Karakteristik denklemi kompleks köke sahiptir.
- c) Genel çözümünde 3 tane sabit vardır.
- d) Karakteristik denkleminin reel kökü yoktur.
- e) Karakteristik denkleminin köklerinden birisi 2 dir.

Çözüm. Öncelikle, karakteristik denklemi yazarak kökleri bulalım.

$$r^4 - r^3 - 3r^2 + 5r - 2 = 0 \Rightarrow (r - 1)^3(r + 2) = 0 \Rightarrow r_{1,2,3} = 1, \quad r_4 = -2$$

- a) $r = 1$ kökü çakışık köktür. ($\checkmark$)
- b) Karakteristik denklemde kompleks kök yoktur. ($\times$)
- c) Diferansiyel denklem 4. mertebeden olup, 4 tane sabit içermelidir. ($\times$)
- d) Karakteristik denkleminin tüm kökleri reeldir. ($\times$)
- e) Karakteristik denkleminin köklerinde 2 yoktur. ($\times$)

Örnek 6. Sabit katsayılı $y'' + ay' + by = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$ olduğuna göre, $a + b$ değerini bulunuz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem ikinci mertebeden homojen diferansiyel denklemdir. Genel çözüm, karakteristik denklemin kökleri yardımıyla yazılır. Verilen genel çözümden, karakteristik denklemin köklerinin 2 ve -3 olduğu açıktır.

$$r^2 + ar + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2 & \Rightarrow 4 + 2a + b = 0 \\ r_2 = -3 & \Rightarrow 9 - 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -6 \Rightarrow a + b = -5$$

Örnek 7. a ve b gerçel sayılar olmak üzere $ay'' + by' + 3y = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü $y = -2xe^{-3x}$ olduğuna göre, $a + b$ değerini bulunuz.

Çözüm. Diferansiyel denklemin bir özel çözümü bilindiğine göre, bu özel çözüm denklemini sağlamalıdır. Dolayısıyla, diferansiyel denklemde türevli ifadelerde yerine yazmak üzere özel çözümün türevlerini alalım.

$$y' = -2e^{-3x} + 6xe^{-3x} = (6x - 2)e^{-3x}$$

$$y'' = 6e^{-3x} - 3(6x - 2)e^{-3x} = (-18x + 12)e^{-3x}$$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + 3y &= a((-18x + 12)e^{-3x}) + b((6x - 2)e^{-3x}) - 6xe^{-3x} = 0 \\ &= ((6b - 18a - 6)x + 12a - 2b)e^{-3x} = 0 \end{aligned}$$

İki tarafın eşitliğinden, e içeren ifade 0 olamayacağından, katsayılar 0 olmalıdır:

$$\left. \begin{aligned} 6b - 18a - 6 &= 0 \Rightarrow 6b - 18a = 6 \\ 12a - 2b &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = 2 \Rightarrow a + b = \frac{7}{3}$$

Örnek 8. Aşağıdakilerden hangisi 3. mertebeden diferansiyel denklemin genel çözümünü oluşturan çözüm fonksiyonu grubudur?

$y_1 = 3x^2 + 2$	$y_1 = e^{3x}$	$y_1 = 1$	$y_1 = e^{3x}$	$y_1 = \cos x$
a) $y_2 = x^2$	b) $y_2 = 4e^{3x}$	c) $y_2 = \sin x$	d) $y_2 = xe^{3x}$	e) $y_2 = e^x$
$y_3 = 1$	$y_3 = e^{-x}$	$y_3 = 3 \sin x$	$y_3 = e^{-x}$	$y_3 = 2 \cos x$

Çözüm.

- a) y_1 fonksiyonu, y_2 ve y_3 fonksiyonlarının lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir ancak genel çözüm lineer bağımlı fonksiyonlardan oluşamaz. (×)
- b) y_1 fonksiyonu ile y_2 fonksiyonu (biri diğerinin katı formunda yazılabildiğinden) lineer bağımlıdır ancak genel çözüm lineer bağımlı fonksiyonlardan oluşamaz. (×)
- c) y_2 fonksiyonu ile y_3 fonksiyonu (biri diğerinin katı formunda yazılabildiğinden) lineer bağımlıdır ancak genel çözüm lineer bağımlı fonksiyonlardan oluşamaz. (×)
- d) Verilen fonksiyon grubu açıkça lineer bağımsızdır, genel çözümü oluşturabilir. (İspat: Wronskian determinantı $\neq 0$ olur.) (✓)

e) y_1 fonksiyonu ile y_3 fonksiyonu (biri diğ erinin katı formunda yazılabildiğ inden) lineer bağımlıdır ancak genel çözüm lineer bağımlı fonksiyonlardan oluşamaz. (×)

Örnek 9. Aşağıdaki dönüşümlerden hangisi $y' = \left(\frac{x - y + 7}{2x - 2y + 8} \right)$ diferansiyel denklemini değışkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklem şekline getirecek dönüşümlerden değıldir?

a) $u = x - y$ b) $u = 2x - 2y$ c) $u = -3x - 3y$ d) $u = \frac{1}{2}(y - x)$ e) $u = 3y - 3x$

Çözüm. Değışkenlerin katsayılarının determinantına bakalım (lineer bağımsızlıklarını inceleyelim):

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad u = k.(x - y), \quad k \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0$$

Pay ve paydadaki değışkenlerin katsayıları lineer bağımlı olduğı için yapılacak dönüşüm katsayılardan herhangi birinin (sıfır hariç) herhangi katı şeklinde seçilmelidir.

- a) Dönüşüm, paydaki değışkenlerin katsayıları ile yazılmış, değışkenlerine ayrılabilir diferansiyel denkleme çevirir. (✓)
- b) Dönüşüm, paydadaki değışkenlerin katsayıları ile yazılmış, değışkenlerine ayrılabilir diferansiyel denkleme çevirir. (✓)
- c) Dönüşüm, pay (veya paydadaki) değışkenlerin katsayısının katı formunda yazılamaz. O halde, bu dönüşüm değışkenlerine ayrılabilir diferansiyel denkleme çevirmez. (×)
- d) Dönüşüm, paydaki (veya paydadaki) değışkenlerin katsayılarının skaler katı şeklinde yazılmış, değışkenlerine ayrılabilir diferansiyel denkleme çevirir. (✓)
- e) Dönüşüm, paydaki (veya paydadaki) değışkenlerin katsayılarının skaler katı şeklinde yazılmış, değışkenlerine ayrılabilir diferansiyel denkleme çevirir. (✓)

Örnek 10. $y' = \left(\frac{2x - y - 7}{3x + y - 7} \right)$ diferansiyel denklemini homojen diferansiyel denkleme dönüştürecek dönüşüm aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\begin{matrix} x = x_1 + 2 \\ y = y_1 - 1 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} x = x_1 - 2 \\ y = y_1 - 1 \end{matrix}$ c) $\begin{matrix} x = x_1 - 2 \\ y = y_1 + 1 \end{matrix}$ d) $\begin{matrix} x = x_1 + 2 \\ y = y_1 + 1 \end{matrix}$ e) $\begin{matrix} x = x_1 + 1 \\ y = y_1 + 2 \end{matrix}$

Çözüm. Değışkenlerin katsayılarının determinantına bakalım (lineer bağımsızlıklarını inceleyelim).

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \quad \begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k \end{cases}$$

$$y' = \left(\frac{2x - y - 7}{3x + y - 7} \right) \Rightarrow (-2x + y + 3)dx + (3x + y - 7)dy = 0$$

Sabitleri yok etmemizi sağlayacak h ve k değerlerini bulalım.

$$\left. \begin{array}{l} -2h + k + 3 = 0 \\ 3h + k - 7 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2h + k + 3 = 0 \\ -3h - k + 7 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -5h + 10 = 0 \Rightarrow h = 2 \Rightarrow k = 1$$

O halde, verilen diferansiyel denklemi homojen diferansiyel denkleme dönüştürecek dönüşüm şu şekilde olur:

$$x = x_1 + 2, \quad y = y_1 + 1 \quad \text{Doğru cevap: d)}$$

Örnek 11. $xy' - \frac{1}{2}y = 4x^3\sqrt{y}$ diferansiyel denklemi uygun bir dönüşüm ile lineer diferansiyel denklem haline getirilmiş şeklini bulunuz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem Bernoulli diferansiyel denklemdir. Öncelikle y' ifadesini yalnız bırakmak için denklemin her iki tarafını x e bölelim.

$$y' - \frac{1}{2x}y = 4x^2y^{\frac{1}{2}}, \quad n = \frac{1}{2}$$

Bernoulli diferansiyel denklemini lineer diferansiyele çevirecek dönüşümü bulalım.

$$z = y^{1-n} \Rightarrow z = y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow z' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' \Rightarrow y' = 2y^{\frac{1}{2}}z' \Rightarrow y' = 2zz'$$

Bu dönüşümü verilen diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$2zz' - \frac{1}{2x}z^2 = 4x^2z \Rightarrow \frac{dz}{dx} - \frac{z}{4x} = 2x^2$$

Örnek 12. $y' = -e^x + 3y - e^{-x}y^2$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1 = e^x$ olduğuna göre, bu diferansiyel denklemin uygun bir dönüşüm ile Bernoulli diferansiyel denklem formuna getirilmiş halini bulunuz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem Riccati diferansiyel denklemdir. O halde, Bernoulli diferansiyel denklemine şu şekilde dönüştürülebilir:

$$y = y_1 + u = e^x + u \Rightarrow y' = e^x + u'$$

Bu dönüşümü verilen diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$e^x + u' = -e^x + 3(e^x + u) - e^{-x}(e^x + u)^2 \Rightarrow e^x + u' = -e^x + 3(e^x + u) - e^{-x}(e^{2x} + 2e^xu + u^2)$$

$$e^x + u' = -e^x + 3e^x + 3u - e^{-x}e^{2x} - 2e^{-x}e^xu - e^{-x}u^2 \Rightarrow u' = u - e^{-x}u^2$$

Veya, Bernoulli diferansiyel denklemi formatında yazarsak, $(u' + p(x)u = q(x)u^n)$

$$u' - u = -e^{-x}u^2 \quad \text{veya} \quad \frac{du}{dx} - u = -e^{-x}u^2$$

Örnek 13. $y' = \frac{3}{x^2}(1-xy) - y^2$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1 = \frac{1}{x}$ olduğuna göre, bu diferansiyel denklemin uygun bir dönüşüm ile lineer diferansiyel denklem formuna getirilmiş halini bulunuz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem Riccati diferansiyel denklemdir. O halde, lineer diferansiyel denklemine şu şekilde dönüştürülebilir:

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = \frac{1}{x} + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{u'}{u^2}$$

Bu dönüşümü verilen diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{u'}{u^2} = \frac{3}{x^2} \left(1 - x \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{u}\right)\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{u}\right)^2 = -\frac{3}{ux} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{ux} - \frac{1}{u^2}$$

$$-\frac{u'}{u^2} = -\frac{5}{ux} - \frac{1}{u^2} \Rightarrow u' = \frac{5}{x}u + 1$$

Veya, lineer diferansiyel denklemi formatında yazarsak, $(u' + p(x)u = q(x))$

$$u' - \frac{5}{x}u = 1 \quad \text{veya} \quad \frac{du}{dx} - \frac{5}{x}u = 1$$

Örnek 14. $y = 5xy' + \frac{1}{y'}$ diferansiyel denklemini gerekli işlemler ile (türetme yaparak) lineer diferansiyel denklem haline getirilmiş şekli aşağıdakilerden hangisidir?

$$\text{a) } \frac{dx}{dp} + \frac{x}{5} = \frac{5}{4p^2} \quad \text{b) } \frac{dx}{dp} + \frac{x}{4p} = \frac{4}{p^2} \quad \text{c) } \frac{dx}{dp} - \frac{4}{5}x = \frac{1}{4p^2}$$

$$\text{d) } \frac{dx}{dp} + \frac{5}{4p}x = \frac{1}{4p^3} \quad \text{e) } \frac{dx}{dp} - \frac{5}{4}x = \frac{1}{5p^2}$$

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem Lagrange diferansiyel denklemdir. $(y = xf(y') + \varphi(y'))$

$$y' = p \Rightarrow y = 5xp + \frac{1}{p}$$

Her iki tarafın x e göre türevini alalım.

$$y' = 5p + 5xp' - \frac{p'}{p^2} \Rightarrow p = 5p + 5xp' - \frac{p'}{p^2} \Rightarrow -4p = \left(5x - \frac{1}{p^2}\right) \frac{dp}{dx}$$

Her iki tarafı $\frac{dx}{dp}$ ile çarpalım.

$$-4p \frac{dx}{dp} = 5x - \frac{1}{p^2} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = -\frac{5}{4p}x + \frac{1}{4p^3}$$

Veya, lineer diferansiyel denklemi formatında yazarsak, $(x' + r(p)x = s(p))$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{5}{4p}x = \frac{1}{4p^3}$$

Örnek 15. $y = 3e^{-2x}$ fonksiyonu, $\frac{dy}{dx} + cy = 0$, $y(0) = 3$ başlangıç değeri probleminin çözümü ise c sayısı nedir?

Çözüm. Verilen y fonksiyonunu kullanarak $\frac{dy}{dx}$ türevini diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$\frac{dy}{dx} = -6e^{-2x} \Rightarrow -6e^{-2x} + cy = 0$$

Şimdi, başlangıç değeri koşulunu kullanarak c sayısını bulalım.

$$-6e^0 + 3c = 0 \Rightarrow 3c = 6 \Rightarrow c = 2$$

Örnek 16. $y' - (y''')^2 = \sqrt{(y'')^3 - x}$ diferansiyel denklemi için derece ve mertebe bilgisi nedir?

Çözüm. Verilen diferansiyel denklemde mertebesi en yüksek olan türev y''' olup diferansiyel denklemin mertebesi 3 tür. En yüksek mertebeli türevin (en büyük) kuvveti 2 olup diferansiyel denklemin derecesi ise 2 dir.

Örnek 17. $y = Ae^{Bx} + C$ ($A, B, C \in \mathbb{R}$) eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm. Verilen eğri ailesi 3 adet keyfi sabit içermektedir. Dolayısıyla, 3. mertebeye kadar türevi alınmalıdır.

$$y = Ae^{Bx} + C$$

$$y' = AB e^{Bx}$$

$$y'' = AB^2 e^{Bx}$$

$$y''' = AB^3 e^{Bx}$$

Şimdi, y fonksiyonu ve türevleri arasında bağıntı bularak sabitleri yok etmeliyiz.

$$y'.y''' = A^2 B^4 e^{Bx} = (y'')^2 \Rightarrow y'.y''' = (y'')^2$$

Örnek 18. $y = y'x + \frac{a}{y'}$ diferansiyel denkleminin tekil çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem Clairaut diferansiyel denklemdir. ($y = xy' + \varphi(y')$)

$$y' = p \Rightarrow y = xp + \frac{a}{p}$$

Her iki tarafın x e göre türevini alalım.

$$y' = p + xp' - \frac{a}{p^2}p' \Rightarrow p = p + xp' - \frac{a}{p^2}p' \Rightarrow \left(x - \frac{a}{p^2}\right) \frac{dp}{dx} = 0$$

Tekil çözüme ulaşmak için parantezin içerisindeki ifadenin 0 olmasını göz önüne alalım.

$$x - \frac{a}{p^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{p^2} \Rightarrow p^2 = \frac{a}{x} \Rightarrow p = \pm \sqrt{\frac{a}{x}} \quad \left(y = xp + \frac{a}{p} \right)$$

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a}{x}} \mp a \sqrt{\frac{x}{a}} = \pm \sqrt{ax} \mp \sqrt{ax} = \mp 2\sqrt{ax} \Rightarrow y^2 = 4ax$$

Örnek 19. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$ diferansiyel denkleminin çözümü için mümkün olan integrasyon çarpanını bulunuz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem lineer diferansiyel denklemdir $y' + p(x)y = q(x)$. İntegral çarpanı bulabilmek için y' ifadesinin katsayısını 1 yapalım.

$$y' + \frac{x+1}{x}y = 3xe^{-x}$$

Şimdi, y ifadesinin katsayısı ile integral çarpanını hesaplayabiliriz.

$$\lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{x+1}{x}dx} = e^{\int (1+\frac{1}{x})dx} = e^{x+\ln x} = e^x \cdot e^{\ln x} = xe^x$$

Örnek 20. $x^2 \ln x dy + (xy - 1)dx = 0$ diferansiyel denklemini çözmek için aşağıdaki fonksiyonların hangisini integrasyon çarpanı olarak kullanabiliriz?

a) $\frac{1}{x^2}$ b) $\frac{1}{y^2}$ c) xy d) x^2 e) y^2

Çözüm. I. Yol: İntegrasyon çarpanını hesaplamak.

$$\begin{cases} M = xy - 1 \Rightarrow M_y = x \\ N = x^2 \ln x \Rightarrow N_x = 2x \ln x + x \end{cases}$$

$$\ln \lambda = \int \frac{M_y - N_x}{N} dx = \int \frac{x - 2x \ln x - x}{x^2 \ln x} dx = \int \frac{-2x \ln x}{x^2 \ln x} dx = \int \frac{-2}{x} dx = -2 \ln x$$

$$\ln \lambda = -2 \ln x \Rightarrow \lambda = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

II. Yol: Şıkları denemek.

Örnek 21. $\frac{dy}{dx} = 3 \cos^2 x - y \tan x$ diferansiyel denkleminin integral çarpanı $\frac{1}{\cos x}$ ise diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Diferansiyel denklem lineer diferansiyel denklemdir.

$$\frac{dy}{dx} + y \tan x = 3 \cos^2 x$$

Diferansiyel denklemin her iki tarafını integrasyon çarpanı ile çarpalım.

$$\frac{1}{\cos x} \left(\frac{dy}{dx} + y \tan x \right) = 3 \cos^2 x \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} \frac{dy}{dx} + y \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 3 \cos x$$

Denklemin sol tarafı çarpım türevidir, o halde düzenleyip integral alalım.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot y \right) = 3 \cos x \Rightarrow \int d \left(\frac{1}{\cos x} \cdot y \right) = \int 3 \cos x dx$$

$$\frac{1}{\cos x} \cdot y = 3 \sin x + c \Rightarrow y = \cos x (3 \sin x + c)$$

Örnek 22. Aşağıdaki ifadelerden hangisi $3x^2 dx - 2xy dy = y^2 dx$ diferansiyel denklemi için söylenebilecek diferansiyel denklem türlerinin tümünü içerir?

- a) Homojen ve Tam
- b) Bernoulli, Homojen, Lagrange
- c) Bernoulli ve Homojen
- d) Bernoulli, Homojen ve Tam
- e) Bernoulli, Lineer ve Lagrange

Çözüm. Öncelikle diferansiyel denklemi dx ve dy ifadelerine göre ve $\frac{dy}{dx}$ olacak şekilde düzenleyelim.

$$(3x^2 - y^2)dx - 2xy dy = 0 \Rightarrow \begin{cases} M(x, y) = 3x^2 - y^2 \\ N(x, y) = -2xy \end{cases}$$

$$(3x^2 - y^2)dx - 2xy dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y^2}{2xy}$$

i) Homojen mi:

$$\begin{cases} M(\lambda x, \lambda y) = 3\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2 = \lambda^2(3x^2 - y^2) = \lambda^2 M(x, y) \\ N(\lambda x, \lambda y) = -2\lambda x \lambda y = -2\lambda^2 xy = \lambda^2 N(x, y) \end{cases}$$

Diferansiyel denklem 2. dereceden homojendir.

ii) Tam mı:

$$\begin{cases} M_y = -2y \\ N_x = -2y \end{cases} \Rightarrow M_y = N_x$$

Diferansiyel denklem tamdır.

iii) Bernoulli mi:

$$y' = \frac{3x}{2y} - \frac{y}{2x} \Rightarrow y' + \frac{1}{2x} y = \frac{3x}{2} y^{-1}$$

$n = -1$ olup Bernoulli diferansiyel denklemdir.

iv) Lagrange mı:

$$2xyy' = 3x^2 - y^2 \Rightarrow y^2 = 3x^2 - 2xyy'$$

$$y = xf(y') + \varphi(y')$$

Lagrange diferansiyel denklemi değildir.

v) Lineer mi:

$$y' + \frac{1}{2x}y = \frac{3x}{2}y^{-1}$$

Bernoulli diferansiyel denklemi olduğundan lineer değildir. $(y' + p(x)y = q(x))$

a) Homojen (✓) ve Tam (✓)

b) Bernoulli (✓), Homojen (✓), Lagrange (×)

c) Bernoulli (✓) ve Homojen (✓)

d) Bernoulli (✓), Homojen (✓) ve Tam (✓)

e) Bernoulli (✓), Lineer (×) ve Lagrange (×)

Doğru cevap: **d)** (Açıklama: **a)** ve **c)** şıkları tüm türleri içermemektedir.)

Örnek 23. $[f(y)]^2 \frac{dx}{dy} + 3f(y)f'(y)x = f'(y)$ diferansiyel denkleminin genel çözümü bulunuz.

Çözüm. Öncelikle diferansiyel denklemde $\frac{dx}{dy}$ ifadesinin katsayısını 1 yapalım.

$$\frac{dx}{dy} + \frac{3f'(y)}{f(y)}x = \frac{f'(y)}{[f(y)]^2}$$

Diferansiyel denklem lineer diferansiyel denklemdir. Ancak, bağımlı değişkenin x , bağımsız değişkenin y olduğuna dikkat edilmelidir. O halde, integrasyon çarpanını hesaplayalım.

$$\lambda = e^{\int \frac{3f'(y)}{f(y)} dy} = e^{3 \ln[f(y)]} = [f(y)]^3$$

Diferansiyel denklemin her iki tarafını integrasyon çarpanı ile çarpalım.

$$[f(y)]^3 \left(\frac{dx}{dy} + \frac{3f'(y)}{f(y)}x \right) = [f(y)]^3 \frac{f'(y)}{[f(y)]^2} \Rightarrow [f(y)]^3 \frac{dx}{dy} + 3[f(y)]^2 f'(y)x = f(y)f'(y)$$

Denklemin sol tarafı çarpım türevidir, o halde düzenleyip integral alalım.

$$\frac{d}{dy} ([f(y)]^3 .x) = f(y)f'(y) \Rightarrow \int d([f(y)]^3 .x) = \int f(y)f'(y)dy$$

$$[f(y)]^3 .x = \frac{[f(y)]^2}{2} + c \Rightarrow x = \frac{1}{2f(y)} + \frac{c}{[f(y)]^3}$$

Örnek 24. $y' = \frac{y \tan x}{1+y}$, $y(0) = 1$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklemdir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \tan x}{1+y} \Rightarrow \frac{(1+y)dy}{y} = \tan x dx \Rightarrow \int \left(\frac{1}{y} + 1 \right) dy = \int \tan x dx$$

$$\ln|y|+y = -\ln|\cos x|+c$$

Başlangıç değer koşulunu kullanarak keyfi sabitin değerini bulalım.

$$x = 0, y = 1 \Rightarrow 0 + 1 = 0 + c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \ln|\cos x| + \ln|y| + y = 1$$

Örnek 25. $\frac{dy}{dx} = \frac{-xy - y^2}{2x^2 + 5xy}$ diferansiyel denklemini uygun bir dönüşüm kullanarak değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem formuna getiriniz.

Çözüm. Verilen diferansiyel denklem 2. dereceden homojen diferansiyel denklemdir. O halde, $y = ux$ dönüşümü yapılır.

$$y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$$

Dönüşümü diferansiyel denkleme uygulayalım.

$$u'x + u = \frac{-ux^2 - u^2x^2}{2x^2 + 5ux^2} = \frac{-u - u^2}{2 + 5u} \Rightarrow 2u'x + 2u + 5uxu' + 5u^2 = -u - u^2$$

$$(5u + 2)xu' = -6u^2 - 3u \Rightarrow \frac{5u + 2}{6u^2 + 3u} du = -\frac{dx}{x}$$