

Diferansiyel Denklemler - 4. Uygulama

Clairaut Diferansiyel Denklemi

Tanım 1. $y' = \frac{dy}{dx} = p$ olmak üzere $y = px + \varphi(p)$ diferansiyel denklemi Clairaut diferansiyel denklemdir.

Örnek 1. $y = xy' + \frac{1}{y'}$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Bu denklem Clairaut diferansiyel denklemdir. Öncelikle verilen denklemde $y' = p$ dönüşümü yapalım.

$$y = xp + \frac{1}{p}$$

Her iki tarafın x e göre türevini alalım.

$$\frac{dy}{dx} = p + x \frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^2} \frac{dp}{dx} \quad \left(\frac{dy}{dx} = p \right) \Rightarrow p = p + x \frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^2} \frac{dp}{dx} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{p^2} \right) \frac{dp}{dx} = 0$$

Eğer, çarpımın sonucu sıfırsa en az çarpanlardan biri sıfıra eşittir:

- $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c \quad \left(y = xp + \frac{1}{p} \right) \Rightarrow y = cx + \frac{1}{c}$ (Genel çözüm)
- $x - \frac{1}{p^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{p^2} \Rightarrow p^2 = \frac{1}{x} \Rightarrow p = \mp \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \left(y = xp + \frac{1}{p} \right)$
 $\Rightarrow y = \mp \sqrt{x} \mp \sqrt{x} = \mp 2\sqrt{x} \Rightarrow y^2 = 4x$ (Tekil çözüm)

Örnek 2. $y = xy' + \sqrt{4 + (y')^2}$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Bu denklem Clairaut diferansiyel denklemdir. Öncelikle verilen denklemde $y' = p$ dönüşümü yapalım.

$$y = xp + \sqrt{4 + p^2}$$

Her iki tarafın x e göre türevini alalım.

$$\frac{dy}{dx} = p + x \frac{dp}{dx} + \frac{p}{\sqrt{4 + p^2}} \frac{dp}{dx} \quad \left(\frac{dy}{dx} = p \right)$$

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + \frac{p}{\sqrt{4 + p^2}} \frac{dp}{dx} \Rightarrow \left(x + \frac{p}{\sqrt{4 + p^2}} \right) \frac{dp}{dx} = 0$$

Eğer, çarpımın sonucu sıfırsa en az çarpanlardan biri sıfıra eşittir:

- $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c \quad \left(y = xp + \sqrt{4 + p^2} \right) \Rightarrow y = cx + \sqrt{4 + c^2}$ (Genel çözüm)

$$\bullet x + \frac{p}{\sqrt{4+p^2}} = 0 \Rightarrow \frac{p}{\sqrt{4+p^2}} = -x \Rightarrow \frac{p^2}{4+p^2} = x^2 \Rightarrow 4x^2 + x^2p^2 = p^2 \Rightarrow p^2 = \frac{4x^2}{1-x^2}$$

$$p = \mp \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \left(y = xp + \sqrt{4+p^2} \right) \Rightarrow y = \mp \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{4 + \frac{4x^2}{1-x^2}}$$

$$y = \mp \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y\sqrt{1-x^2} = 2(1 \mp x^2) \Rightarrow y^2 = 4 \frac{(1 \mp x^2)^2}{1-x^2} \text{ (Tekil çözüm)}$$

Örnek 3. $y = xy' + 2\sqrt{y'}$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Bu denklem Clairaut diferansiyel denklemdir. Öncelikle verilen denklemde $y' = p$ dönüşümü yapalım.

$$y = xp + 2\sqrt{p}$$

Her iki tarafın x e göre türevini alalım.

$$\frac{dy}{dx} = p + x \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{dp}{dx} \quad \left(\frac{dy}{dx} = p \right)$$

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{dp}{dx} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{\sqrt{p}} \right) \frac{dp}{dx} = 0$$

Eğer, çarpımın sonucu sıfırsa en az çarpanlardan biri sıfıra eşittir:

$$\bullet \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c \quad (y = xp + 2\sqrt{p}) \Rightarrow y = cx + 2\sqrt{c} \text{ (Genel çözüm)}$$

$$\bullet x + \frac{1}{\sqrt{p}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{p}} = -x \Rightarrow \sqrt{p} = -\frac{1}{x} \Rightarrow p = \frac{1}{x^2} \quad (y = xp + 2\sqrt{p})$$

$$y = \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \Rightarrow y = -\frac{1}{x} \text{ (Tekil çözüm)}$$

Lagrange Diferansiyel Denklemleri

Tanım 2. $y' = \frac{dy}{dx} = p$ olmak üzere $y = xf(p) + \varphi(p)$ diferansiyel denklemi Lagrange diferansiyel denklemdir.

Örnek 4. $y = 2xy' - \sqrt{y'}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen denklem Lagrange diferansiyel denklemdir. Öncelikle verilen denklemde $y' = p$ dönüşümü yapalım.

$$y' = p \Rightarrow y = 2xp - \sqrt{p}$$

Şimdi, her iki tarafın x e göre türevini alalım.

$$y' = 2p + 2xp' - \frac{p'}{2\sqrt{p}} \quad (y' = p) \Rightarrow p = 2p + 2xp' - \frac{p'}{2\sqrt{p}}$$

p' içeren ifadeleri bir tarafa toplayalım.

$$\left(2x - \frac{1}{2\sqrt{p}}\right) \frac{dp}{dx} = -p$$

Her iki tarafı $\frac{dx}{dp}$ ile çarpalım.

$$2x - \frac{1}{2\sqrt{p}} = -p \frac{dx}{dp}$$

Bu denklemde x bağımlı değişken ve p bağımsız değişken oldu. Buna bağlı olarak bir lineer diferansiyel denklem elde etmeye çalışalım.

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} + \frac{1}{2p^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = \frac{1}{2p^{\frac{3}{2}}} \quad (x' + r(p)x = s(p))$$

Lineer diferansiyel denklemi elde edilir. O halde, integrasyon çarpanı,

$$\lambda = e^{\int r(p)dp} = e^{\int \frac{2}{p}dp} = e^{2\ln p} = p^2$$

şeklinde bulunur. Lineer diferansiyel denklemin her iki tarafını bu integrasyon çarpanı ile çarparsak,

$$p^2 \left(\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} \right) = p^2 \frac{1}{2p^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \underbrace{p^2 \frac{dx}{dp} + 2xp}_{\frac{d}{dp}(xp^2)} = \frac{p^{\frac{1}{2}}}{2}$$

elde edilir. dp ifadesini karşıya atarak her iki tarafın integralini alırsak,

$$\int d(xp^2) = \int \frac{p^{\frac{1}{2}}}{2} dp \Rightarrow xp^2 = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{3} + c \Rightarrow x = \frac{1}{3\sqrt{p}} + \frac{c}{p^2}$$

bulunur. O halde, bu x i baştaki y de yerine yazarsak,

$$y = 2xp - \sqrt{p} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{p}}{3} - \sqrt{p} + \frac{2c}{p} = -\frac{\sqrt{p}}{3} + \frac{2c}{p}$$

bulunur. Böylece, genel çözümün parametrik denklemleri,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3\sqrt{p}} + \frac{c}{p^2} \\ y = -\frac{\sqrt{p}}{3} + \frac{2c}{p} \end{cases}$$

şeklinde dir.

Örnek 5. $y = -\frac{1}{2}xy' - \frac{2}{y'}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen denklem Lagrange diferansiyel denklemdir. Öncelikle verilen denklemde $y' = p$ dönüşümü yapalım.

$$y' = p \Rightarrow y = -\frac{1}{2}xp - \frac{2}{p}$$

Şimdi, her iki tarafın x e göre türevini alalım.

$$y' = -\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}xp' + 2\frac{p'}{p^2} \quad (y' = p) \Rightarrow p = -\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}xp' + 2\frac{p'}{p^2}$$

p' içeren ifadeleri bir tarafa toplayalım.

$$\left(-\frac{1}{2}x + \frac{2}{p^2}\right) \frac{dp}{dx} = \frac{3}{2}p \Rightarrow \left(-x + \frac{4}{p^2}\right) \frac{dp}{dx} = 3p$$

Her iki tarafı $\frac{dx}{dp}$ ile çarpalım.

$$-x + \frac{4}{p^2} = 3p \frac{dx}{dp}$$

Bu denklemde x bağımlı değişken ve p bağımsız değişken oldu. Buna bağlı olarak bir lineer diferansiyel denklem elde etmeye çalışalım.

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{x}{3p} + \frac{4}{3p^3} \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{x}{3p} = \frac{4}{3p^3} \quad (x' + r(p)x = s(p))$$

Lineer diferansiyel denklemi elde edilir. O halde, integrasyon çarpanı,

$$\lambda = e^{\int r(p)dp} = e^{\int \frac{1}{3p}dp} = e^{\frac{\ln p}{3}} = p^{\frac{1}{3}}$$

şeklinde bulunur. Lineer diferansiyel denklemin her iki tarafını bu integrasyon çarpanı ile çarparsak,

$$p^{\frac{1}{3}} \left(\frac{dx}{dp} + \frac{x}{3p} \right) = p^{\frac{1}{3}} \frac{4}{3p^3} \Rightarrow \underbrace{p^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{dp} + \frac{x}{3p^{\frac{2}{3}}}}_{\frac{d}{dp} \left(xp^{\frac{1}{3}} \right)} = \frac{4p^{-\frac{8}{3}}}{3}$$

elde edilir. dp ifadesini karşıya atarak her iki tarafın integralini alırsak,

$$\int d \left(xp^{\frac{1}{3}} \right) = \int \frac{4p^{-\frac{8}{3}}}{3} dp \Rightarrow xp^{\frac{1}{3}} = -\frac{4p^{-\frac{5}{3}}}{5} + c \Rightarrow x = -\frac{4}{5p^2} + \frac{c}{p^{\frac{1}{3}}}$$

bulunur. O halde, bu x i baştaki y de yerine yazarsak,

$$y = -\frac{1}{2}xp - \frac{2}{p} \Rightarrow y = \frac{2}{5p} - \frac{2}{p} - \frac{cp^{\frac{2}{3}}}{2} = -\frac{8}{5p} - \frac{cp^{\frac{2}{3}}}{2}$$

bulunur. Böylece, genel çözümün parametrik denklemleri,

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{5p^2} + \frac{c}{p^{\frac{1}{3}}} \\ y = -\frac{8}{5p} - \frac{cp^{\frac{2}{3}}}{2} \end{cases}$$

şeklindedir.

Örnek 6. $y = \frac{3}{2}xy' + e^{y'}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen denklem Lagrange diferansiyel denklemdir. Öncelikle verilen denklemde $y' = p$ dönüşümü yapalım.

$$y' = p \Rightarrow y = \frac{3}{2}xp + e^p$$

Şimdi, her iki tarafın x e göre türevini alalım.

$$y' = \frac{3}{2}p + \frac{3}{2}xp' + e^pp' \quad (y' = p) \Rightarrow p = \frac{3}{2}p + \frac{3}{2}xp' + e^pp'$$

p' içeren ifadeleri bir tarafa toplayalım.

$$\left(\frac{3}{2}x + e^p\right) \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{2}p$$

Her iki tarafı $\frac{dx}{dp}$ ile çarpalım.

$$\frac{3}{2}x + e^p = -\frac{1}{2}p \frac{dx}{dp}$$

Bu denklemde x bağımlı değişken ve p bağımsız değişken oldu. Buna bağlı olarak bir lineer diferansiyel denklem elde etmeye çalışalım.

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{3x}{p} - \frac{2e^p}{p} \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{3x}{p} = -\frac{2e^p}{p} \quad (x' + r(p)x = s(p))$$

Lineer diferansiyel denklemi elde edilir. O halde, integrasyon çarpanı,

$$\lambda = e^{\int r(p)dp} = e^{\int \frac{3}{p}dp} = e^{3 \ln p} = p^3$$

şeklinde bulunur. Lineer diferansiyel denklemin her iki tarafını bu integrasyon çarpanı ile çarparsak,

$$p^3 \left(\frac{dx}{dp} + \frac{3x}{p} \right) = -p^3 \frac{2e^p}{p} \Rightarrow \underbrace{p^3 \frac{dx}{dp} + 3xp^2}_{\frac{d}{dp}(xp^3)} = -2p^2 e^p$$

elde edilir. dp ifadesini karşıya atarak her iki tarafın integralini alırsak,

$$\int d(xp^3) = - \underbrace{\int 2p^2 e^p dp}_{I_1}$$

$$I_1 = -2 \int p^2 e^p dp \quad \begin{cases} p^2 = u \Rightarrow 2p dp = du \\ e^p dp = dv \Rightarrow e^p = v \end{cases} \Rightarrow I_1 = -2p^2 e^p + 4 \underbrace{\int p e^p dp}_{I_2}$$

$$I_2 = \int p e^p dp \quad \begin{cases} p = u \Rightarrow dp = du \\ e^p dp = dv \Rightarrow e^p = v \end{cases} \Rightarrow I_1 = -2p^2 e^p + 4 \left(p e^p - \int e^p dp \right)$$

$$xp^3 = -2p^2 e^p + 4p e^p - 4e^p + c \Rightarrow x = -\frac{2e^p}{p} + \frac{4e^p}{p^2} - \frac{4e^p}{p^3} + \frac{c}{p^3}$$

bulunur. O halde, bu x i baştaki y de yerine yazarsak,

$$y = \frac{3}{2}xp + e^p \Rightarrow y = -3e^p + \frac{6e^p}{p} - \frac{6e^p}{p^2} + \frac{3c}{2p^2}$$

bulunur. Böylece, genel çözümün parametrik denklemleri,

$$\begin{cases} x = -\frac{2e^p}{p} + \frac{4e^p}{p^2} - \frac{4e^p}{p^3} + \frac{c}{p^3} \\ y = -3e^p + \frac{6e^p}{p} - \frac{6e^p}{p^2} + \frac{3c}{2p^2} \end{cases}$$

şeklindedir.

Yüksek Mertebe Lineer Diferansiyel Denklemler

Tanım 3. $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$ diferansiyel denklemine n . mertebeden diferansiyel denklem denir.

- $a_i(x) = a_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$), yani katsayılar değişkene bağlı değilse (sabitse) diferansiyel denkleme sabit katsayılı diferansiyel denklem,
- $a_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) katsayıları değişkene bağlıysa değişken katsayılı diferansiyel denklem,
- $f(x) = 0$ ise homojen (sağ tarafsız) diferansiyel denklem,
- $f(x) \neq 0$ ise homojen olmayan (sağ taraflı) diferansiyel denklem,

denir.

Tanım 4. Sabit katsayılı n . mertebeden bir diferansiyel denklemin n tane çözümü, $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları ile verilsin. Bu fonksiyonların $(n-1)$. mertebeden türevleri mevcut olmak üzere,

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinantına Wronskian determinanı denir.

Teorem 1. $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olmaları için gerek ve yeter şart $W \neq 0$ olmasıdır.

Örnek 7. $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$, $y_3 = x^{-2}$ fonksiyonlarının lineer bağımsızlığını göstererek genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Öncelikle, lineer bağımsızlığı göstermek için Wronskian determinantını hesaplayalım.

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 & x^{-2} \\ 2x & 3x^2 & -2x^{-3} \\ 2 & 6x & 6x^{-4} \end{vmatrix} = 20 \neq 0$$

Wronskian determinanı lineer bağımsız olduğundan, verilen fonksiyonlar da lineer bağımsızdır. O halde, genel çözüm

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^{-2}$$

olur.

Örnek 8. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle, verilen diferansiyel denklem için karakteristik denklem

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$$

şeklinde. Bu denklemin iki ifadenin farkının küpü açılımı olduğu açıkça görülmektedir:

$$(r-1)^3 = 0$$

O halde karakteristik denklemin kökleri,

$$r_{1,2,3} = 1$$

olup, genel çözüm

$$y = e^x (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)$$

olarak bulunur.

Örnek 9. $y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm. Öncelikle, verilen diferansiyel denklem için karakteristik denklem

$$r^4 + 5r^2 - 36 = 0$$

şeklinededir. Bu karakteristik denklemin köklerini bulabilmek için öncelikle iki tane kökünü tahmin etmeliyiz. İlk olarak,

$$r = 2 \Rightarrow 2^4 + 5 \cdot 2^2 - 36 = 16 + 20 - 36 = 0$$

olup, $r_1 = 2$ bu karakteristik denklem için bir köktür ve böylece karakteristik denklem,

$$\left(\begin{array}{c|c} r^4 + 5r^2 - 36 & r - 2 \\ \hline r^4 - 2r^3 & r^3 + 2r^2 + 9r + 18 \\ \hline 2r^3 + 5r^2 - 36 & \\ 2r^3 - 4r^2 & \\ \hline 9r^2 - 36 & \\ 9r^2 - 18r & \\ \hline 18r - 36 & \\ 18r - 36 & \\ \hline 0 & \end{array} \right) \Rightarrow (r - 2) \cdot (r^3 + 2r^2 + 9r + 18) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Tekrar bir kök tahmini yapılırsa,

$$r_2 = -2 \Rightarrow (-2)^3 + 2(-2)^2 + 9(-2) + 18 = -8 + 8 - 18 + 18 = 0$$

kökü ile karakteristik denklem,

$$\left(\begin{array}{c|c} r^3 + 2r^2 + 9r + 18 & r + 2 \\ \hline r^3 + 2r^2 & r^2 + 9 \\ \hline 9r + 18 & \\ 9r + 18 & \\ \hline 0 & \end{array} \right) \Rightarrow (r - 2) \cdot (r + 2) \cdot (r^2 + 9) = 0$$

şeklinde yazılabilir. $r^2 + 9 = 0$ denkleminin kökleri,

$$r_{3,4} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\mp \sqrt{-36}}{2} = \mp 3i \quad (\alpha = 0, \beta = 3)$$

olarak bulunur. Böylece genel çözüm,

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos(3x) + c_4 \sin(3x)$$

olarak bulunur.