

YTÜ
İNŞAAT FAKÜLTESİ
Harita Mühendisliği Bölümü

FİZİKSEL JEODEZİ

Doç. Dr. Cüneyt AYDIN

İstanbul, 2014

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1.	ÇEKİM KUVVETİ, ÇEKİM İVMESİ ve POTANSİYEL KAVRAMLARI.	1
1.1	Çekim Kuvveti ve Çekim İvmesi	1
1.2	Çekim Kuvvetinin Vektörel İfadesi	3
1.3	Çekim Potansiyeli	5
1.4	Nokta Kümesinin Çekim Potansiyeli	6
1.5	Dolu Bir Cismin Çekim Potansiyeli	7
1.6	Homojen Yoğunluklu Bir Küre Kabuğunun ve Kürenin Potansiyeli	8
1.7	Laplace Denklemi ve Harmonik Fonksiyon	13
1.8	Harmonik açılım	15
1.9	Legendre Fonksiyonu	16
1.10	Yüzey Harmonik Fonksiyonu ve Harmonik Açılımın Anlamı	18
2.	EŞPOTANSİYELLİ YÜZEY ve GRAVİTE: Temel Kavramlar	21
2.1	Potansiyelden Yeryuvarının Şekli: Küre, Elipsoit, Jeoit?	21
2.2	Gravite Kuvveti ve Potansiyeli	24
2.3	Fiziksel Yeryüzünde Gravite Nasıl Ölçülür?	28
2.4	Eşpotansiyelli Yüzey	31
2.5	Çekül Eğrisi	32
2.6	W Potansiyelinin Düşey Gradyenti	33
2.7	Normal Gravite Alanı	35
2.8	Koordinat Sistemleri	37
2.8.1	Dünya Koordinat Sistemleri	38
2.8.2	Yerel Koordinat Sistemleri	39
2.9	Gravite Kuvvetinin Yönü Nasıl Belirlenir?	41
2.10	Bozucu Gravite Alanı	42
2.11	Jeoit Yüksekliği: Bruns Eşitliği	42
2.12	Gravite Anomalisi ve Bozukluğu	44
2.13	Serbest Hava İndirgemesi ve Kütle İndirgemesi	45

3.	YÜKSEKLİK SİSTEMLERİ.....	48
3.1	Bilimsel Yükseklikler.....	50
3.1.1	Jeopotansiyel Yükseklik	50
3.1.2	Dinamik Yükseklik	51
3.1.3	Ortometrik Yükseklik	52
3.2	Pratik Yükseklikler.....	55
3.2.1	Normal Yükseklik	55
3.2.2	Normal Ortometrik Yükseklik.....	56
3.2.3	Elipsoid al Yükseklik.....	56
4.	UYDU GRAVİMETRİSİ ve GLOBAL MODELLER.....	58
4.1	CHAMP.....	58
4.2	GOCE	59
4.3	GRACE.....	60
4.3.1	Uydu Gravimetrisinde Harmonik Açınım	62
4.3.2	GRACE L2-Verisinin Değerlendirilmesi	64
4.3.3	GRACE ile Yapılan Çeşitli Uygulamalar	66
4.4	Global Gravite Alanı Modelleri.....	68
5.	JEOİT BELİRLEME	71
5.1	Gravimetrik Yöntem.....	71
5.2	Astrojeodezik Yöntem	74
5.3	GPS/Nivelman Yöntemi (Geometrik Yöntem).....	76
	KAYNAKLAR.....	79

1. ÇEKİM KUVVETİ, ÇEKİM İVMESİ ve POTANSİYEL KAVRAMLARI

1.1 Çekim Kuvveti ve Çekim İvmesi

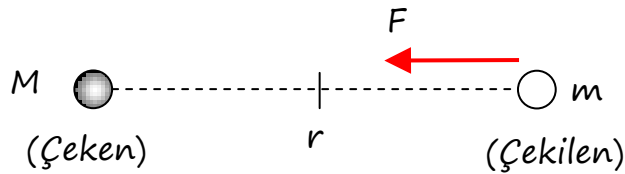
Newton'un evrensel çekim yasasına göre, kütleleri M ve m , aralarındaki mesafe r olan iki noktasal cisim (kısaca nokta) birbirlerini

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad (1.1)$$

kuvvetiyle çekerler. Burada G , evrensel çekim sabitidir;

$$G = 6,6742 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 / (\text{gs}^2) \quad (1.2)$$

Her ne kadar, iki nokta birbirine aynı oranda çekim kuvveti uygulasa da bunlardan kütlesi M olanı çeken, diğerini de çekilen olarak tanımlayacağız. Böylece çekim kuvvetinin yönünü M 'ye doğru göstereceğiz.



Şekil 1.1 Çeken ve çekilen noktalar ve çekim kuvveti

Çekilen noktanın birim kütleli olması durumunda ($m=1$), üzerine uygulanan çekim kuvveti **çekim ivmesi** olarak adlandırılır: (1.1) eşitliğinden çekim ivmesi,

$$F = \frac{GM}{r^2} \quad (1.3)$$

çıklar. (1.1) ve (1.3) eşitlikleri karşılaştırıldığında çekim ivmesinin tanımını

şu şekilde yapabiliriz:

“Çekim ivmesi, bir cismin her bir birim kütlesine uygulanan çekim kuvvetidir.”

Not 1.1: Fiziksel jeodezide çekim ivmesi ile ilgilenilir. İlerleyen bölümlerde “çekim kuvveti” ifadesi, “birim kütleye etkiyen çekim kuvveti” yani “çekim ivmesi” anlamında kullanılacaktır.

Çekim ivmesinin birimi, m/s^2 ya da cm/s^2 'dir. Galileo'nun anısına cm/s^2 birimine “Gal” denir:

$$cm/s^2 = Gal$$

Bununla birlikte, ivmedeki küçük değişimleri anlatabilmek için aşağıdaki birimler de oldukça sık kullanılır:

$$1 Gal = 1000 mGal = 10^6 \mu Gal$$

Örnek 2.1: $9,8 m/s^2$ 'lik ivmenin Gal ve mGal birimlerindeki değeri ne kadardır? $10 \mu Gal$ 'in Gal, mGal, m/s^2 ve nm/s^2 karşılıklarını irdeleyiniz.

Çözüm:

$$9,8 m/s^2 = 980 Gal = 980 000 mGal$$

$$10 \mu Gal = 10 \times 10^{-6} Gal = 0,01 mGal = 10 \times 10^{-8} m/s^2 = 100 nm/s^2$$

Burada, “n” nano büyüklüğünü ifade eder; “ $1 m = 10^9 nm$ ”. “ nm/s^2 ” birimi jeoloji ve jeofizikte sıklıkla kullanılır. Bu nedenle fiziksel jeodezide kullanılan Gal birimi ile ilişkisini bilmek oldukça pratiktir. Örneğin $1 \mu Gal = 10 nm/s^2$, $5 \mu Gal = 50 nm/s^2$ gibi.

1.2 Çekim Kuvvetinin Vektörel İfadesi

Kuvvet, yönü ve büyüklüğü (uzunluğu) olan bir vektördür. (1.1) veya (1.3) eşitliği aslında ilgili kuvvetin büyüklüğünü ifade eder. Çekim kuvvetinin vektörel ifadesini çıkarmak için çeken ve çekilen noktaları Şekil 1.2'deki bir xyz dik koordinat sisteminde düşünelim: Çeken ve çekilen noktaların koordinatları,

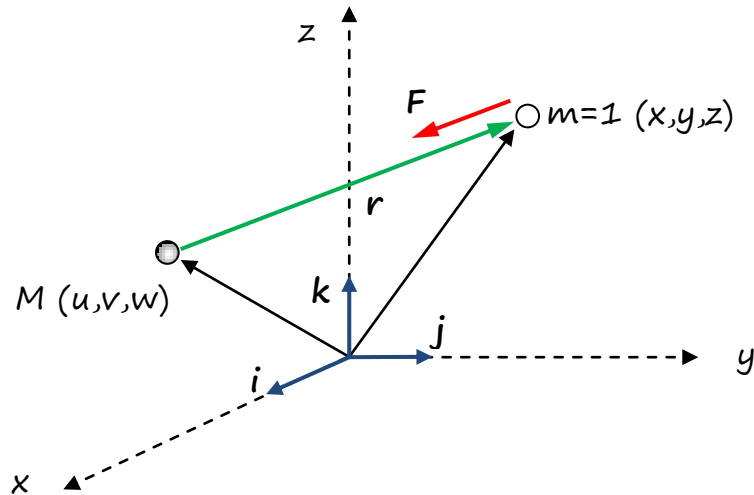
$$M \rightarrow (u, v, w) \text{ ve } m=1 \rightarrow (x, y, z)$$

olsun. i , j ve k temel birim vektörler cinsinden, M ve m 'nin konum vektörü r ve çekim kuvveti F aşağıdaki biçimde ifade edilir;

$$r = (x-u, y-v, z-w) = (x-u)i + (y-v)j + (z-w)k \quad (1.4)$$

$$F = (F_x, F_y, F_z) = F_x i + F_y j + F_z k \quad (1.5)$$

Burada, F_x , F_y ve F_z çekim kuvveti bileşenleri olarak adlandırılır.



Şekil 1.2. Çekim kuvveti, konum vektörü ve temel birim vektörler

Şekil 1.2'de gösterildiği gibi F çekim kuvveti ve konum vektörü r aynı

doğrultuda ancak ters yönlüdür. Dolayısıyla bunlardan “Vektör/Uzunluğu” biçiminde elde edilecek birim vektörler için

$$\frac{\mathbf{F}}{F} = -\frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.6)$$

eşitliği geçerlidir. (1.3) ve (1.4) eşitlikleri (1.6)’da göz önüne alınarak,

$$\mathbf{F} = \left(-\frac{GM}{r^3}(x-u)\right)\mathbf{i} + \left(-\frac{GM}{r^3}(y-v)\right)\mathbf{j} + \left(-\frac{GM}{r^3}(z-w)\right)\mathbf{k} \quad (1.7)$$

elde edilir. (1.7), (1.5) ile karşılaştırıldığında çekim kuvveti bileşenleri bulunur:

$$F_x = -\frac{GM}{r^3}(x-u), F_y = -\frac{GM}{r^3}(y-v), F_z = -\frac{GM}{r^3}(z-w) \quad (1.8)$$

Örnek 1.2: Çekim kuvveti bileşenlerini kullanarak, F çekim kuvveti büyüklüğünü elde ediniz.

Çözüm:

$\mathbf{F}=(F_x, F_y, F_z)$ olmak üzere, bu kuvvetin uzunluğu, F çekim kuvveti büyüklüğünü verir:

$$F=|\mathbf{F}|=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}$$

(2.8)’de verilen bileşenler yukarıda düşünülürse,

$$F=|\mathbf{F}|=\frac{GM}{r^3}\sqrt{\underbrace{(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2}_r}=\frac{GM}{r^2}$$

çıkar.

1.3 Çekim Potansiyeli

M kütleli cismin r kadar uzaktaki bir noktada meydana getirdiği çekim potansiyeli,

$$V = \frac{GM}{r} \quad (1.9)$$

ile tanımlanır. Çekim potansiyeli,

- skaler bir fonksiyondur,
- x,y ve z'ye göre kısmi türevleri çekim kuvveti bileşenlerini verir,
- sonsuzda sıfıra gider.

Şimdi ikinci özelliği ispat edelim: “1/r” fonksiyonunun, örneğin x'e göre türevi

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial x} = \frac{\partial(1/\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2})}{\partial x} = \frac{-2(x-u)}{2r} \frac{1}{r^2} = \frac{-(x-u)}{r^3}$$

olduğundan,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{GM}{r^3}(x-u) \quad (1.10)$$

elde edilir. Bu da, (1.8) ile verilen F_x bileşenine eşittir. y ve z için de benzer şekilde türevler alındığında ilgili bileşenler elde edilir. Böylece

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad F_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad , \quad F_z = \frac{\partial V}{\partial z} \quad (1.11)$$

olduğu ispatlanır. (1.11)'e göre F çekim kuvveti

$$\mathbf{F}=(F_x, F_y, F_z)=(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z})=\text{grad}V=\nabla V \quad (1.12)$$

şeklinde yazılır. Burada grad ve ∇ operatörleri, “gradyent” olarak okunur ve genellikle, “potansiyelin gradyenti çekim kuvvetini verir” denir.

Not 1.2: (1.9) çekim potansiyelinin r 'ye göre kısmi türevinin ters işaretlisi, çekim kuvvetinin büyüklüğünü verir;

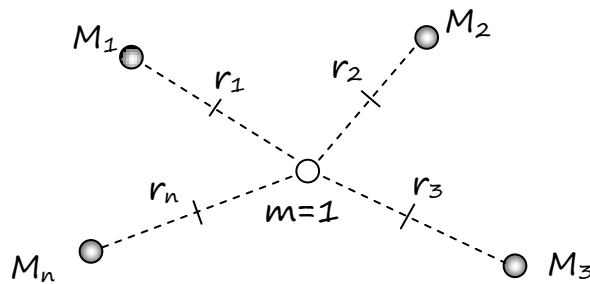
$$-\frac{\partial V}{\partial r} = F = \frac{GM}{r^2} \quad (1.13)$$

1.4 Nokta Kümesinin Çekim Potansiyeli

Şekil 1.3'deki gibi $M_1, \dots, M_n$ kütleli n adet nokta nedeniyle $m=1$ noktasındaki çekim potansiyeli,

$$V=V_1+\dots+V_n=\frac{GM_1}{r_1} + \dots + \frac{GM_n}{r_n} \quad (1.14)$$

şeklinde toplam potansiyeller biçiminde hesaplanır.



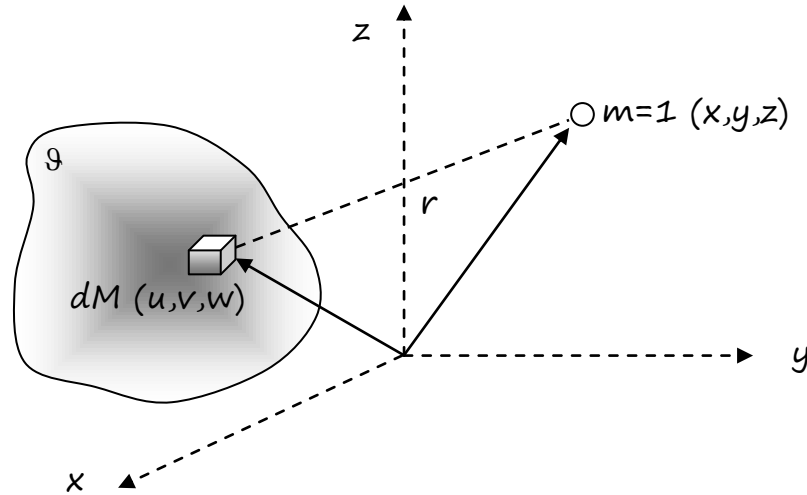
Şekil 1.3. Nokta kümesi

1.5 Dolu Bir Cismin Çekim Potansiyeli

Diferansiyel anlamda küçük dM kütleli parçacıklardan oluşan Şekil 1.4'deki ϑ hacimli dolu bir cisim nedeniyle $m=1$ noktasında meydana gelen çekim potansiyelini hesaplamak için parçacıkların her birinin çekim potansiyellerinin (1.14)'e göre toplamını düşünmek gerekir;

$$V = \frac{GdM_1}{r_1} + \dots \quad (1.15)$$

Ancak bu aynı zamanda sonsuz sayıda kütle çekim potansiyelinin toplamı anlamına gelir. Bu toplam işlemi yapmak mümkün olmadığından, söz konusu dolu cismin potansiyeli üçlü integral ile ifade edilir.



Şekil 1.4. Dolu bir cismin potansiyeli

Şimdi dolu cismin ρ =sabit yoğunluklu olduğu düşünölsün. “KÜTLE=Yoğunluk×Hacim” ilişkisi nedeniyle her bir dM kütlesi için

$$dM = \rho d\vartheta \quad (1.16)$$

yazılır. Burada $d\vartheta$, dM parçacığının hacmidir. Böylece (1.15),

$$V = G \iiint_{\mathfrak{g}} \frac{dM}{r} = G \iiint_{\mathfrak{g}} \frac{\rho}{r} d\mathfrak{g} \quad (1.17)$$

şeklinde ifade edilir. (1.17), çeken parçacığın u, v, w ve çekilen noktanın x, y, z koordinatları cinsinden aşağıdaki gibi belirtilir;

$$V(x, y, z) = G \iiint_{\mathfrak{g}} \frac{\rho}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2}} du dv dw \quad (1.18)$$

Burada, du, dv ve dw , dM kütlelerinin eni, boyu ve yüksekliği anlamındadır.

Örnek 1.3: Dolu bir cismin $m=1$ noktasına uygulamış olduğu çekim kuvvetinin bileşenlerini elde ediniz.

Çözüm:

(1.18) potansiyel eşitliğinin x, y ve z 'ye göre kısmi türevleri alınır, (1.10)'a benzer biçimde, çekim kuvveti bileşenleri elde edilir;

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -G \iiint_{\mathfrak{g}} \frac{(x-u)\rho}{r^3} d\mathfrak{g}$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -G \iiint_{\mathfrak{g}} \frac{(y-v)\rho}{r^3} d\mathfrak{g}$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -G \iiint_{\mathfrak{g}} \frac{(z-w)\rho}{r^3} d\mathfrak{g}$$

1.6 Homojen Yoğunluklu Bir Küre Kabuğunun ve Kürenin Potansiyeli

Newton'un kabuk teoremine (shell theorem) göre, Şekil 1.5'de gösterilen M_1 kütleli bir küre kabuğunun merkezinden r kadar uzakta yer alan $m=1$ noktasındaki çekim potansiyeli

$$V_1 = \frac{GM_1}{r} \quad (1.19)$$

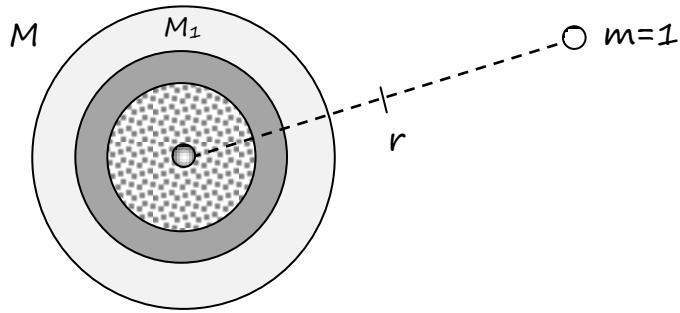
değerine eşittir. (1.9)'a göre bu, kütlesi M_1 olan bir nokta için yazılan

çekim potansiyeline denktir. Yani, söz konusu küre kabuğu, kütlesi sanki merkezde toplanmış bir nokta gibi davranır. Şekil 1.5'de gösterilen farklı kütleli (ve/veya yoğunluklu) küre kabukları için de benzer özellik geçerlidir. Buna göre aynı merkezli iç içe geçmiş böylesi küre kabuklarından oluşan bir şeklin potansiyeli (1.14)'e göre

$$V = \frac{GM_1}{r} + \dots = \frac{GM}{r} \quad (1.20)$$

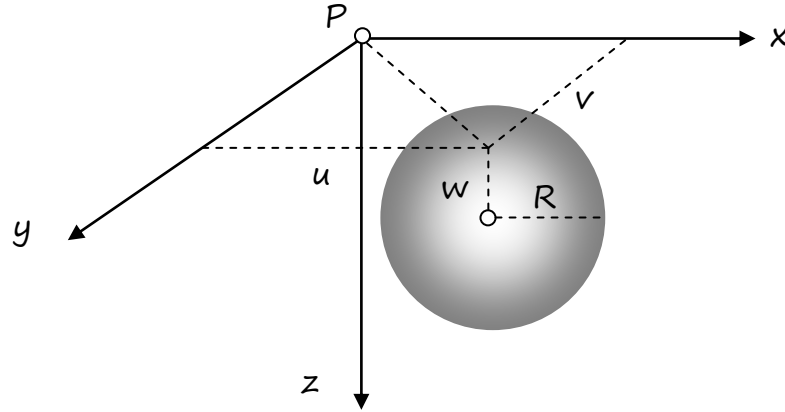
biçiminde yazılır. Bu ayrıca, M kütleli homojen yoğunluklu bir kürenin de çekim potansiyelini verir ve onun da tüm kütlesi merkezde toplanmış bir nokta gibi davranacağını ifade eder.

(1.20) eşitliği aslında oldukça ilginç ve yeryuvarının çekim alanı için oldukça pratik bir sonuçtur: Yeryuvarı da Şekil 1.5'deki gibi hayal edilebilir ve M kütlesi bilindiğinden dışında yer alan noktalardaki çekim potansiyeli, dolayısıyla çekim kuvveti buradan kolaylıkla elde edilir. İleride gösterileceği gibi, yeryuvarının gerçek çekim potansiyeli, (1.20) eşitliğinden aslında belli oranda sapar.



Şekil 1.5. Homojen yoğunluklu küre kabuğunun ve kürenin çekim potansiyeli

Örnek 1.4: Aşağıdaki şekilde gösterilen R yarıçaplı ve ρ yoğunluklu kürenin bir xyz koordinat sisteminin orijininde yer alan P noktasına uygulamış olduğu çekim kuvvetinin z eksenine yönündeki bileşenini elde ediniz.



Çözüm:

(1.20) eşitliğine göre kürenin merkezinden r kadar uzakta yer alan bir noktadaki çekim potansiyeli

$$V = \frac{GM}{r}, \text{dir.}$$

Küre merkezinin koordinatları u, v, w ve noktanın koordinatları x, y, z alınarak, P noktasındaki çekim kuvvetinin z eksenindeki bileşeni, (1.8) ve (1.11)'de olduğu gibi,

$$F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{GM}{r^3} (z-w)$$

biçiminde elde edilir. Şekle göre $z=0$, ve $r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ 'dir. Böylece, z bileşeni

$$F_z = \frac{GMw}{(u^2 + v^2 + w^2)^{3/2}}$$

çıkar. Diğer yandan kürenin hacmi $\mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi R^3$ olduğundan, kütlesi, $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ olur (Kütle=Hacim×Yoğunluk). Böylece z bileşeni,

$$F_z = \frac{4\pi GR^3 \rho w}{3(u^2 + v^2 + w^2)^{3/2}}$$

bulunur. Bu bileşen, yer bilimlerinde özellikle volkanik bölgelerdeki hareketlerin modellenmesinde (Mogi-type source model) kullanılmaktadır.

Örnek 1.5: Evrensel çekim sabiti (G) ve yeryuvarının kütlesi (M) çarpımı, jeosentrik çekim sabiti olarak bilinmektedir;

$$GM=3,986005 \times 10^{20} \text{ cm}^3/\text{s}^2$$

Buna göre yeryuvarının yoğunluğunu hesaplayınız. (Yeryuvarının küre olduğunu varsayınız ve yarıçapını $R=6371009 \times 10^2 \text{ cm}$ alınız). Bunu ortalama kaya yoğunluğu ($2,67 \text{ g/cm}^3$) ile karşılaştırınız.

Çözüm:

Yeryuvarı küre olarak varsayılırsa kütlesi,

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

olacaktır. Buna göre jeosentrik çekim sabiti,

$$GM = G \frac{4}{3} \pi R^3 \rho = 3,986005 \times 10^{20} \text{ cm}^3/\text{s}^2$$

şeklinde yazılabilecektir. Evrensel çekim sabiti $G=6,6742 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/(\text{gs}^2)$ ve yarıçap $R=6371009 \times 10^2 \text{ cm}$ olduğuna göre, buradan yeryuvarının yoğunluğu

$$\rho = \frac{3 \times 3,986005 \times 10^{20} \text{ cm}^3/\text{s}^2}{4\pi(6,6742 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/(\text{gs}^2)) \times (6371009 \times 10^2 \text{ cm})^3}$$

$$\rho \approx 5,51 \text{ g/cm}^3$$

hesaplanır. Bu değer yer bilimlerinde “ortalama yoğunluk” olarak da bilinir. Buradan yeryuvarının kayadan iki kat kadar daha yoğun olduğu sonucu çıkar. Çünkü, yeryuvarı yalnızca 35 km derinliğe kadar kayadan oluşan bir kabuğa (yerkabuğu-crust) sahiptir; bu kabuktan sonra merkezine kadar “üst manto, manto, üst çekirdek ve çekirdek” gibi daha yoğun maddeler içeren tabakaları içerir (ki bunlar yeryuvarı hacminin %99’unu oluşturur). Eğer bu alt tabakalar da kayadan oluşsaydı, doğal olarak yeryuvarının kütlesi şimdikininki yarısı olacak, (1.1) eşitliğine göre de dışındaki cisimleri o kadar az çekecekti.

Örnek 1.6: Yeryuvarının a) fiziksel yeryüzündeki bir cismin, b) yerden 500 ve 20000 km uzaktaki iki yapay uydunun her bir birim kütlesine uygulamış olduğu (anlık) çekim kuvvetini yaklaşık olarak Gal ve m/s^2 birimlerinde hesaplayınız. Sonuçları karşılaştırınız. (Yeryuvarı yarıçapını $R=6371009 \times 10^2$ cm alınız.)

Çözüm:

Yeryuvarı küre olarak alındığında, merkezinden r kadar uzaktaki bir cismin her bir birim kütlesi için geçerli çekim potansiyeli (1.20) eşitliğine göre $V=GM/r$ olur. Bunun r 'ye göre türevinin ters işaretlisi, (1.13)'de de gösterildiği gibi, yeryuvarının r uzaktaki birim kütleye uygulamış olduğu çekim kuvvetini verir;

$$F = \frac{GM}{r^2}$$

Bir önceki örnekte jeosentrik çekim sabiti $GM=3,986005 \times 10^{20}$ cm^3/s^2 olarak verilmişti. r 'yi de uygun biçimde alarak yukarıdaki eşitlikten ilgili cisimlere uygulanan çekim kuvvetleri kolayca elde edilir:

- a) Fiziksel yeryüzündeki bir cisim için $r=R$ alınabilir. Buna göre, ilgili cismin her bir birim kütlesine uygulanan çekim kuvveti (çekim ivmesi),

$$F = \frac{GM}{R^2} = \frac{3,986005 \times 10^{20} \text{ cm}^3/s^2}{(6371009 \times 10^2 \text{ cm})^2} \approx 982 \text{ Gal} = 9,82 \text{ m/s}^2 \text{ dir.}$$

İleride gösterileceği gibi, yeryuvarı tam homojen yoğunluklu bir küre olmadığı için bu ivme değeri yeryüzünde nokta nokta değişir. Ancak, yine de, söz konusu hesap değeri, pratik amaçlara yönelik oldukça iyi bir yaklaşım değeridir.

- b) İlk uydunun yeryuvarı merkezinden uzaklığı $r=R+500$ $km=6871009 \times 10^2$ cm , ikinci uydunun ise $r=R+20000$ $km=26371009 \times 10^2$ cm 'dir. Buna göre, ilgili uydulardaki birim kütleye uygulanan çekim kuvvetleri,

$$F = \frac{3,986005 \times 10^{20} \text{ cm}^3/\text{s}^2}{(6871009 \times 10^2 \text{ cm})^2} \approx 844 \text{ Gal} = 8,44 \text{ m/s}^2$$

ve

$$F = \frac{3,986005 \times 10^{20} \text{ cm}^3/\text{s}^2}{(26371009 \times 10^2 \text{ cm})^2} \approx 57 \text{ Gal} = 0,57 \text{ m/s}^2$$

şeklinde hesaplanır.

Her ne kadar $F=GM/r^2$ eşitliğinden kolayca çıkarılabilse de, sayısal değerlerden, merkezinden uzaklaştıkça yeryuvarının çekim kuvvetinin azaldığı görülmektedir. Bu örnekte ele alınan ilk uydu alçak yörüngeli (LEO) bir uydu, diğeri ise bir GNSS uydusudur. Alçak yörüngeli uydudaki ivme yeryüzündeki ivmenin %86'sına, diğeri ise %6'sına denk gelmektedir. Uzakta diğer gezegenlerin ve güneşin çekim etkisi çoğalacağından GNSS uydusundaki bu %6'lık dilim daha da belirsizleşir. Bu nedenle uzaydan yeryuvarındaki ivmenin (veya değişimlerinin) izlenmesinde LEO uyduları kullanılır.

1.7 Laplace Denklemi ve Harmonik Fonksiyon

$m=1$ (x,y,z) noktasının çeken cismin dışında olması durumunda V potansiyelinin ikinci türevleri ile aşağıdaki denklem sağlanır:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1.21)$$

Buna Laplace denklemi denir. Bir fonksiyon Laplace denklemini sağlıyorsa o fonksiyona **harmonik fonksiyon** denir. Bu bazen şöyle de açıklanır; “Laplace denklemi çözümünü veren bir fonksiyon harmonik fonksiyondur.” (1.21)'e göre, V potansiyeli cismin dışında olduğu sürece, daha doğrusu yoğunluk değişmediği sürece, harmoniktir. Bir fonksiyon harmonikse,

- Süreklidir; her mertebeden türevi vardır.

- Taylor serisine açılabilir. Bir başka deyişle, fonksiyon *analitik* olup, bağımsız terimlerin toplamı biçiminde yazılabilir.

İkinci özellik sayesinde, (1.18) integral eşitliği bir seri toplamı biçiminde yazılır. Buna *harmonik açılım* adı verilir.

Çekilen noktanın cismin içinde olması durumunda, (1.21) yerine Poisson denklemi elde edilir:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi G\rho \quad (1.22)$$

Aslında, Laplace denkleminin buradan da ulaşılabilir: Cismin dışında $\rho=0$ olacağı (kabul edilebileceği) için (1.22)'den Laplace denklemi çıkar. Fiziksel jeodezide dış çekim alanı ile ilgilenildiği için (1.21) Laplace denklemi daha önemlidir.

Örnek 1.7: Dolu bir cismin $m=1$ (x,y,z) noktasındaki çekim potansiyeli, (1.18) eşitliği ile

$$V(x, y, z) = G \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2}} du dv dw$$

şeklinde verilmişti. Bu potansiyelin harmonik bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

(1.21) Laplace denkleminin sağlanıyor olması ilgili potansiyelin harmonik olduğunu gösterir. Bunun için $V(x,y,z)$ potansiyelinin ikinci kısmi türevlerine ihtiyacımız bulunmaktadır. İlk türevler “ $F_x=\partial V/\partial x$, $F_y=\partial V/\partial y$ ve $F_z=\partial V/\partial z$ ”, Örnek 1.3’de gösterilmişti. x ’e göre bir kez daha türev alınırsa,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial F_x}{\partial x} = -G \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3(x-u)^2}{r^5} \right) \rho d\mathcal{V}$$

bulunur (bkz. Atayer, 2012). Diğer türevler de buna benzer: Yalnızca parantez içindeki koordinat farkı $(y-v)$ ve $(z-w)$ olarak değişir. Buna göre,

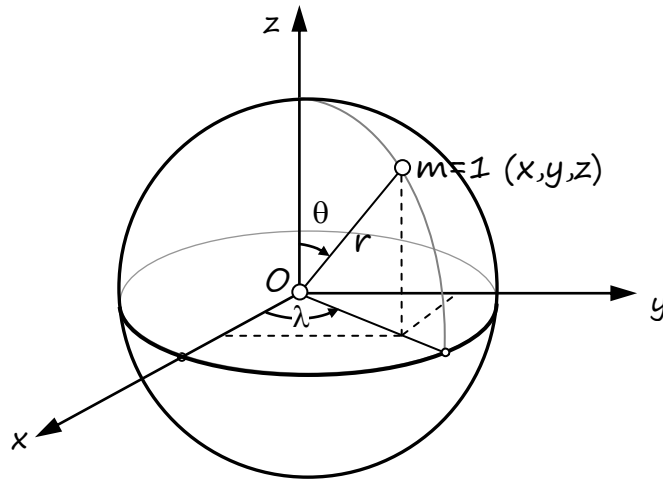
$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \dots$$

$$\dots - G \iiint_V \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3((x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2)}{r^5} \right) \rho \, d\vartheta = 0$$

çıkar. Bu nedenle ilgili potansiyel, çekilen noktanın cismin dışında olması durumunda, harmonik bir fonksiyondur.

1.8 Harmonik açınım

Şimdi Laplace denkleminin çözümünü yani V 'nin bağımsız terimler cinsinden nasıl yazılacağını irdelleyeceğiz. Bir başka deyişle, harmonik açılımını vereceğiz. Bunun için, V 'yi x, y, z 'ye göre değil, Şekil 1.6'daki küresel koordinatlar olan " r (yarıçap vektörü), θ (kutup uzaklığı) ve λ (jeosentrik boylam)" ile ifade edeceğiz: Bu nedenle, buna, **küresel harmonik açınım** diyeceğiz.



Şekil 1.6. Küresel ve dik koordinatlar

(1.21) Laplace denklemi, r, θ, λ küresel koordinatlarına göre,

$$\Delta V = r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (1.24)$$

biçiminde yazılır. Bunun çözümü ile

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} Y_n(\theta, \lambda) \quad (1.25)$$

küresel harmonik fonksiyonu elde edilir. (1.25) eşitliğinde geçen “ $Y_n(\theta, \lambda)$ ” fonksiyonu ise küresel yüzey harmoniği ya da **yüzey harmonik fonksiyonu** olarak adlandırılır. Yüzey harmonik fonksiyonu da,

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m \lambda + B_{nm} \sin m \lambda) L_{nm}(\cos \theta) \quad (1.26)$$

şeklinde diferansiyel denklemlerin bir çözümü olarak verilir. Burada,

A_{nm} ve B_{nm} : (Küresel) harmonik katsayılar,

n : Harmonik katsayı derecesi (degree),

m : Harmonik katsayı sırası (order),

$L_{nm}(\cos \theta)$: Legendre fonksiyonudur.

(1.26) eşitliği, (1.25)’de düşünülürse, V ’nin küresel harmonik açılımı elde edilir;

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m \lambda + B_{nm} \sin m \lambda) L_{nm}(\cos \theta) \quad (1.27)$$

1.9 Legendre Fonksiyonu

(1.27) eşitliğinde geçen $L_{nm}(\cos \theta)$ Legendre fonksiyonu, açılımının derecesine, sırasına ve θ küresel uzaklığının kosinüsüne bağlı bir fonksiyon olarak aşağıdaki biçimde verilir:

$$L_{nm}(t = \cos \theta) = \frac{1}{2^n n!} (1 - t^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2 - 1)^n \quad (1.28)$$

Farklı kuvvetlerdeki kısmi türevleri içeren bu eşitlik (Rodrigues eşitliği) hesap için uygun değildir. Hesap için aşağıdaki sayısal eşitlik kullanılır:

$$L_{nm}(t = \cos \theta) = 2^{-n}(1 - t^2)^{m/2} \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{(2n - 2j)!}{j!(n-j)!(n-m-2j)!} t^{n-m-2j} \quad (1.29)$$

Burada, k , $k \leq (n-m)/2$ koşulunu sağlayan en büyük tamsayıdır. Bir başka deyişle, $(n-m)/2$ ya da $(n-m-1)/2$ 'den hangisi tamsayı ise k , ona eşittir.

Örnek 1.8: $\theta=30^\circ$ için, $L_{32}(\cos \theta)$ Legendre fonksiyonu değerini hesaplayınız.

Çözüm:

$t=\cos\theta=\cos 30^\circ$; harmonik derecesi $n=3$, sırası $m=2$ 'dir. $(n-m)/2=1,5$ değeri tamsayı olmadığından k , $(n-m-1)/2=0$ alınır. Böylece (1.29) eşitliğindeki seri toplamı;

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{(2n - 2j)!}{j!(n-j)!(n-m-2j)!} t^{n-m-2j} = \dots$$

$$\dots (-1)^0 \frac{(2 \times 3 - 2 \times 0)!}{0!(3-0)!(3-2-0)!} t^{(3-2-0)} = 120t \text{ olur.}$$

Buna göre $L_{32}(t)$,

$$L_{32}(t) = 2^{-3}(1 - t^2)^{2/2} 120t = \frac{120}{8}(t - t^3) \text{ bulunur.}$$

$t=\cos\theta=\cos 30^\circ=0,866025$ olduğuna göre,

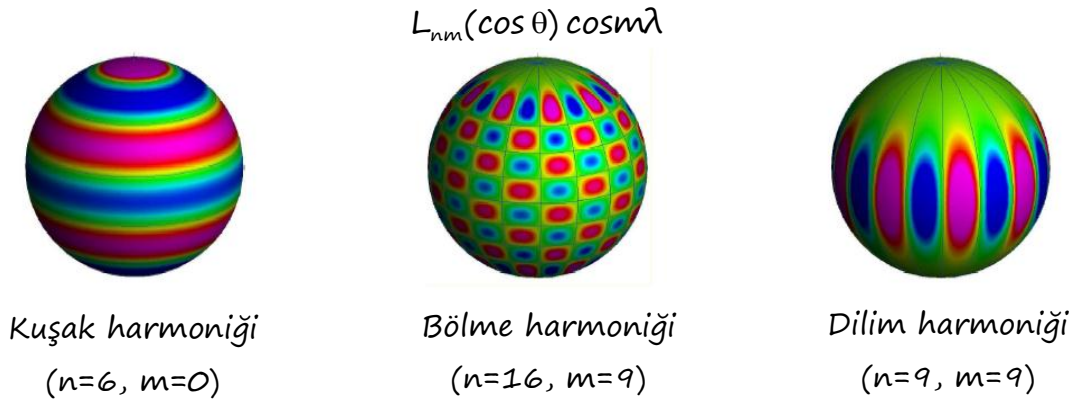
$$L_{32}(t=\cos\theta) = \frac{120}{8}(0,866025 - (0,866025)^3) = 3,247595 \text{ çıkar.}$$

$L_{32}(\cos\theta)$ fonksiyon değeri, “ $15\sin^2\theta\cos\theta$ ” olarak bilinir. Buradan da hesap yapıldığında yukarıdaki yolla elde edilen değeri bulunur.

1.10 Yüzey Harmonik Fonksiyonu ve Harmonik Açılımın Anlamı

(1.26) eşitliği ile verilen $Y_n(\theta, \lambda)$ yüzey harmonik fonksiyonunda geçen bağımsız terimler, yani, " $L_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda$ " ve " $L_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda$ " ifadeleri de birer yüzey harmonikleridir. Bunlar, Şekil 1.7'de gösterildiği gibi, bir küreyi çeşitli bölmelere ayıran fonksiyonlardır (Şekilde $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ ve $0 \leq \lambda \leq 360^\circ$ için elde edilen harmonik fonksiyonların hesaplanan değerleri küre üzerinde gösterilmiştir). Üç farklı yüzey harmoniği bulunur;

- $m=0$ olması durumunda yüzey harmonikleri λ boylamına bağlı değildir; bunlar **kuşak harmonikleri** olarak adlandırılır.
- $n=m$ olması durumunda ise küre artı ve eksi dilimlere bölünür. Bu harmoniklere **dilim harmonikleri** adı verilir.
- $n \neq m$ iken yüzey harmonikleri küre yüzeyini bölmelere ayırır. Bu tür harmonikler bu nedenle **bölme harmonikleri** olarak adlandırılır.



Şekil 1.7. Yüzey harmonikleri (Barthelmes, 2009)

(2.27)'de verilen $V(r, \theta, \lambda)$ harmonik açılımı iki farklı amaçla kullanılır;

1. **Potansiyel model oluşturulması:** Koordinatları bilinen noktalarda potansiyel (veya bunun fonksiyonlarının) değerleri biliniyorsa, açılım eşitliklerinde geçen A_{nm} ve B_{nm} harmonik katsayıları hesaplanır.

Yeterince nokta bulunuyorsa, bu katsayılar bir dengeleme modeli içinde bilinmeyenler olarak ele alınır ve kestirim değerleri bulunur. Hesaplanan katsayılarla potansiyel model oluşturulur.

Harmonik açınımda ilk seri toplamı $n \rightarrow \infty$ için geçerlidir. Ancak sonsuz sayıda (veya çok miktarda) katsayı belirlemek imkansızdır. Bu nedenle seri toplamı belli bir yerde durdurulur; buna kesme (*truncation*) denir. Seri toplamının bu şekilde kesilmesinden dolayı, yukarıdaki biçimde oluşturulan bir potansiyel model gerçeği ancak belli oranda yansıtır; buna da modelin *çözünürlüğü* adı verilir.

2. Potansiyelin hesaplanması: Potansiyel model verilmişken, kürenin dışındaki bir noktanın koordinatları ve model katsayıları kullanılarak seri toplamı gerçekleştirilir. Yani nokta için ilgili potansiyel hesaplanır.

Örnek 1.9: Küresel koordinatları r, θ, λ olan bir nokta için harmonik açılımı $n=2$ 'ye kadar yazınız.

Çözüm:

(1.26)'ya göre açılım için gerekli $Y_0(\theta, \lambda)$, $Y_1(\theta, \lambda)$ ve $Y_2(\theta, \lambda)$ yüzey harmonik fonksiyonları şöyle elde edilir:

Derece (n)	Sıra (m)	Terim (T_{nm})	$Y_n(\theta, \lambda)$
0	0	$(A_{00}\cos\theta + B_{00}\sin\theta)L_{00}(\cos\theta)$	$=T_{00}$
1	0	$(A_{10}\cos\theta + B_{10}\sin\theta)L_{10}(\cos\theta)$	$=T_{10} + T_{11}$
	1	$(A_{11}\cos\lambda + B_{11}\sin\lambda)L_{11}(\cos\theta)$	
2	0	$(A_{20}\cos\theta + B_{20}\sin\theta)L_{20}(\cos\theta)$	$=T_{20} + T_{21} + T_{22}$
	1	$(A_{21}\cos\lambda + B_{21}\sin\lambda)L_{21}(\cos\theta)$	
	2	$(A_{22}\cos 2\lambda + B_{22}\sin 2\lambda)L_{22}(\cos\theta)$	

Böylece, (1.25) eşitliğine göre ilgili harmonik açılım gerçekleştirilir:

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^2 \frac{1}{r^{n+1}} Y_n(\theta, \lambda) = \frac{1}{r} Y_0(\theta, \lambda) + \frac{1}{r^2} Y_1(\theta, \lambda) + \frac{1}{r^3} Y_2(\theta, \lambda)$$

Örnek 1.10: Yukarıdaki harmonik açınımda harmonik katsayıların sayısı nedir? Bu açılım için geçerli bir potansiyel model oluştururken kaç adet katsayı belirlenmelidir?

Çözüm:

İlgili örnekte toplam 12 adet harmonik katsayı vardır. Böylesi bir açınımda bunlardan 3 adedi (B_{00} , B_{10} ve B_{20} kuşak harmonik katsayıları) $\sin 0 = 0$ olan değerlerin ölçek çarpanları olduğu için önemi yoktur, “0” alınabilir. Bu nedenle böylesi bir potansiyel modelde $12 - 3 = 9$ adet harmonik katsayının belirlenmesi gerekir.

Genelleştirme yapılacak olursa, en büyük derecesi $n_{\max}$ olan bir potansiyel model için

$$u_{\text{katsayı}} = (n_{\max} + 1)^2 \quad (1.30)$$

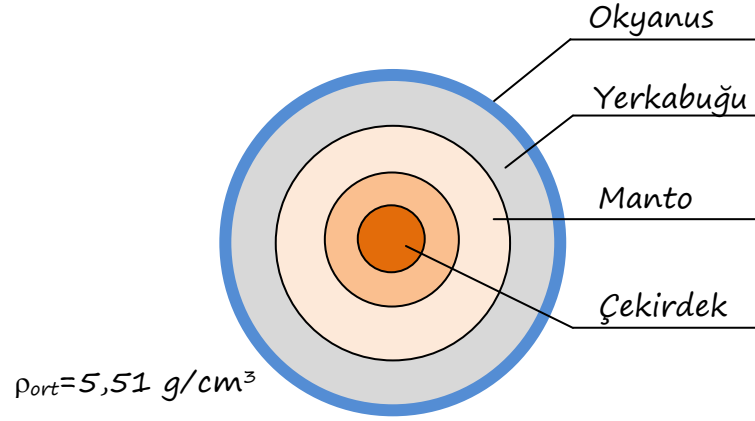
adet katsayı belirlenmelidir. Veya, bir potansiyel modelde bu kadar sayıda $B_{00}, \dots = 0$ kuşak harmonik katsayıları dışında katsayı bulunur.

2. EŞPOTANSİYELLİ YÜZEY ve GRAVİTE: Temel Kavramlar

2.1 Potansiyelden Yeryuvarının Şekli: Küre, Elipsoit, Jeoit?

Her cisim evrensel çekim yasasına göre bir çekim alanı oluşturur. Bu çekim alanı, cismin şekline ve yoğunluğuna bağlı olarak değişir (bkz. (1.13) eşitliği). Homojen bir küre veya Bölüm 1.6'da değinildiği üzere homojen yoğunluklu küre kabuklarından oluşan bir küre uzayda bir nokta gibi davranır; $V=GM/r$ eşitliğine göre kendisinden r kadar uzaktaki tüm noktalarda eşit çekim potansiyeli oluşturur. Bu eşit potansiyelli veya eşpotansiyelli noktaları birleştirdiğimiz zaman bir yüzey; eşpotansiyelli yüzey meydana gelir. Söz konusu homojen yoğunluklu küre için bu yüzey içi boş bir küredir. Böylesi sonsuz sayıda iç içe geçmiş eşpotansiyelli yüzeyleri hayal edebiliriz. Bunlardan biri de ele aldığımız homojen yoğunluklu küreye yapışık olandır ve kürenin şeklini ve boyutunu tarif eder.

Eşpotansiyelli bir yüzeyin önemli bir özelliği, bu yüzey üzerinde-başka bir dış kuvvet olmadığı sürece-suyun hareket etmemesidir. Eğer su bir yüzey üzerinde hareket etmiyorsa bu yüzey bir (yatay) düzlemdir. Bu nedenle yeryuvarının şeklini tanımlarken eşpotansiyelli yüzey tanımını kullanmak jeodezik amaçlar için kaçınılmazdır. Peki yeryuvarının şeklini potansiyel kuramından hareketle nasıl tarif edebiliriz? Bu amaçla yeryuvarının yapısı için fiziksel bir modele ihtiyacımız var: Yeryuvarı, Şekil 2.1'deki gibi tabakalardan oluşan bir yapıdadır. Eğer bu tabakaların şekildeki gibi mükemmel simetride ve yoğunlukta olan küre kabukları olduğu varsayılırsa, çekim potansiyeli $V=GM/r$ olacak, dolayısıyla oluşan eşpotansiyelli yüzeyler yine küre yüzeyleri olacaktır. Ancak bu modelde bir eksik vardır: O da yeryuvarının 4,5 milyar yıldır bir eksen etrafında döndüğü, ve bu kadar yıldır dönen (elastik) bir cismin de bu hareket nedeniyle deforme olması gerektiği gerçeğidir. Bu deformasyon yeryuvarının dönme eksenini doğrultusunda küçülmesi ve ona dik doğrultuda büyümesi anlamına gelir ki, şekil artık bir küre değil bir elipsoittir.



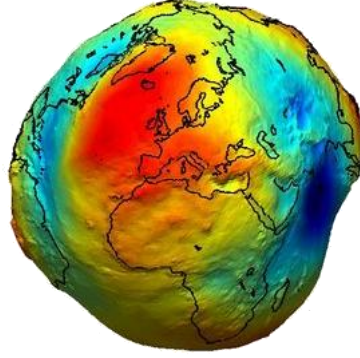
Şekil 2.1 Yeryuvarı iç yapısı (ölçeksiz)

Yeryuvarı bir elipsoit biçiminde ise yukarıdaki küre modeli için düşünülen potansiyel yaklaşımı geçerli olmaz. Çok uzaklarda eşpotansiyelli yüzeyler halen birer küre yüzeyleri gibi görünebilir; ancak yere yaklaştığımızda bunların artık yavaş yavaş bir elipsoit yüzeyine dönüşeceğini hayal edebiliriz. Ancak yere yeterince yaklaştığımızda, gerçek bundan da farklı olacaktır. Çünkü yeryuvarı tabakaları mükemmel simetri ve eş yoğunlukta değildir. Bu nedenle-doğal olarak yere çok yakın olan noktalar kümesine ilişkin bir eşpotansiyelli yüzey bir elipsoit yüzeyinden sapan, yoğunluk değişimine bağlı olarak keskin olmayan girinti ve çıkıntılara sahip bir yüzey olacaktır. Örneğin dağları ve karaları kaldırıp, yeryuvarı yüzeyini tamamıyla durgun bir okyanus yüzeyi olarak ele aldığımızda, bu yüzey bir eşpotansiyelli yüzeydir ancak bir elipsoit yüzeyi değildir! Bu yüzey, yani “jeoit”, yeryuvarının gerçek şeklini tanımlamak için kullanılır. Çünkü,

- gerçek bir eşpotansiyelli yüzeydir ve
- varlığı kısmen hissedilebilir (fiziksel yeryüzünün yaklaşık %70'inin okyanus+deniz yüzeyi olduğunu düşününüz!).

Gauss, jeoidi “yeryuvarının matematiksel şekli” olarak tanımlar. Ancak üzerinde matematiksel işlemler yapılamayacak kadar karmaşık ve düzensiz bir yüzeydir. Örneğin arazide oluşturduğumuz bir üçgeni jeoide indirgemek ve buradan bunu bir kağıt düzleminde anlatmak mümkün

değildir. Bunun için bir aşama öncesine gitmeli, jeoide oldukça yakın bir yüzey olan elipsoit yüzeyini ele almalıyız. Bu amaçla düşünülen bir elipsoide, **referans elipsoidi** denir ki, bunlardan günümüzde en ünlüsü ve **gerçekleşeni**, GRS80 (Geodetic Reference System-1980) ve onun bir türevi olan WGS84 (World Geodetic System-1984) elipsoididir.



Şekil 2.2 Yeryuvarının matematiksel şekli: Jeoit (www.esa.int)

Bazı jeodezik problemlerde, doğruluk gereksinimlerini karşılaması şartıyla, yeryuvarını veya onun bir bölümünde hesap işlemleri için elipsoit yüzeyi yerine yeryuvarının şekline ilk yaklaşım olan küre yüzeyini kullanabiliriz. Bunu, hem “kartoğrafya” hem de “geometrik jeodezi” derslerinden bilmekteyiz. Ancak bu noktada tekrar hatırlamamız gereken, jeoidin gerçek bir yüzey, elipsoit ve kürenin ise jeodezik hesaplardan bazılarını yerine getirmek için kullandığımız model yüzeyler olduğu gerçeğidir. Öyleyse jeodezik faaliyetlerde neden jeoide ihtiyacımız var? Bunu uygulamada karşılaşılan bir jeodezik problemi anlatarak yanıtlayabiliriz: Yeryüzündeki bir noktanın elipsoidi referans alarak elde ettiğimiz jeodezik-örneğin GNSS-koordinatlarından yükseklik bileşeni (**elipsoidal yükseklik**), kabaca elipsoitten noktaya olan uzunluktur. Elipsoit yüzeyi gerçek bir eşpotansiyelli yüzey olmadığı için bu türden yüksekliği fazla olan bir noktadan yüksekliği az olan noktaya doğru “su” akmayabilir. Bu, GNSS’nin mühendislik çalışmalarında kullanımını sınırlandıran fiziksel bir problemdir. Çözüm için jeoide, daha doğrusu

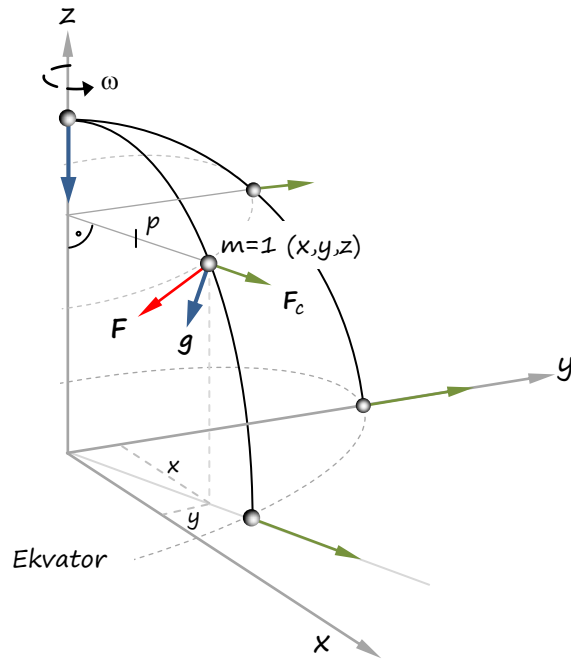
elipsoit ile jeoit yüzeyleri arasındaki yükseklik farkını anlatan **jeoit modeline** ihtiyacımız bulunmaktadır. Jeoit yüzeyi fiziksel anlamı olan yükseklikler, yani **ortometrik yükseklikler** için bir başlangıç yüzeyidir; bu nedenle, uygulamada yeryuvarının matematiksel şeklini göstermesinden öte yükseklik probleminin çözümü için önemlidir.

2.2 Gravite Kuvveti ve Potansiyeli

Fiziksel yeryüzünde **duran** bir cismin her bir kütlesine yeryuvarının kütlesi ve kendi eksenini etrafında dönmesinden dolayı iki tür kuvvet etkir; çekim kuvveti (F) ve merkezkaç kuvveti (F_c). Bir birim kütleye etkiyen toplam kuvvet (ya da ivme), yani bu iki kuvvetin bileşkesi, **gravite kuvveti** olarak adlandırılır;

$$g = F + F_c \quad (2.1)$$

Bu kuvvetin büyüklüğü, yani $g = |g|$, **gravite** olarak adlandırılır. Gravite kuvveti noktanın konumuna bağlı olarak fiziksel yeryüzünde değişir. Bu nedenle g her noktada farklıdır.



Şekil 2.3 Çekim kuvveti, merkezkaç kuvveti ve gravite kuvveti

Not 2.1: Fiziksel yeryüzünde duran m kütleli bir cismin üzerine etkiyen toplam kuvvet “mg” kadardır ve bu da o cismin ağırlığını ifade eder. Bu nedenle g’ye bazen ağırlık ivmesi de denir. Gravite, yeryüzünde noktadan noktaya değişir. O halde cisimlerin konumlarına göre ağırlıkları da farklıdır.

(2.1) gravite kuvveti potansiyel kuramından hareketle de ifade edilebilir: Dolu bir cismin çekim potansiyeli (1.17) ile verilmişti. Bu, yeryuvarı çekim potansiyeli için de geçerlidir;

$$V = G \iiint_{\mathfrak{g}} \frac{\rho}{r} d\mathfrak{g} \quad (2.2)$$

Yanı sıra merkezkaç potansiyeli, yeryuvarının kendi eksenini etrafında dönüşünün açısal hızı ω olmak üzere, aşağıdaki biçimde tanımlanır;

$$V_c = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \omega^2 p^2 \quad (2.3)$$

Bu iki potansiyelin toplamı ile **gravite potansiyeli** elde edilir;

$$W = V + V_c = G \iiint_{\mathfrak{g}} \frac{\rho}{r} d\mathfrak{g} + \frac{1}{2} \omega^2 p^2 \quad (2.4)$$

(1.12) eşitliğinde olduğu gibi, (2.4) potansiyelinin gradyenti alınırsa gravite vektörü bulunur;

$$\mathbf{g} = \text{grad}W = (g_x, g_y, g_z) = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right) \quad (2.5)$$

Not 2.2: Gravite vektörünün doğrultusu *düşey* dediğimiz doğrultudur.

Örnek 2.1: Gravite kuvveti bileşenlerini elde ediniz.

Çözüm:

Çözüm için, (2.5) eşitliğine göre W gravite potansiyelinin kısmi türevlerine ihtiyacımız var: Gravite potansiyeli (2.4)'den görüldüğü gibi V ve V_c potansiyelleri toplamına eşit olduğundan, bunların ayrı ayrı kısmi türevlerinin toplamı da ilgili gravite bileşenlerini verir. Dolu bir cismin çekim potansiyelinin kısmi türevleri (çekim kuvveti bileşenleri) Örnek 1.3'de gösterilmişti. Yeryuvarı çekim kuvveti bileşenleri de benzer yolla elde edilir. Yanı sıra (2.3) merkezkaç potansiyelinin kısmi türevleri de kolayca alınır. Böylece, gravite bileşenleri şöyle bulunur;

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V_c}{\partial x} = -G \iiint_V \frac{(x-u)\rho}{r^3} d\mathfrak{V} + x\omega^2$$

$$g_y = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V_c}{\partial y} = -G \iiint_V \frac{(y-v)\rho}{r^3} d\mathfrak{V} + y\omega^2$$

$$g_z = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V_c}{\partial z} = -G \iiint_V \frac{(z-w)\rho}{r^3} d\mathfrak{V}$$

Örnek 2.2: Yeryuvarını homojen bir küre kabul ederek, kutup noktasında ve ekvatorda gravite değerlerini bulunuz. (Yeryuvarı yarıçapı $R=6371009 \times 10^2$ cm; Jeosentrik çekim sabiti $GM=3,986005 \times 10^{20}$ cm³/s²; açısal hız $\omega=7292115 \times 10^{-11}$ rad/s)

Çözüm:

Yeryuvarı homojen bir küre alınırsa, kendisinden r kadar uzaktaki bir dış noktada çekim potansiyeli $V=GM/r$ 'dir. Bu, (2.4)'de düşünülürse, gravite potansiyeli

$$W=V+V_c = \frac{GM}{r} + \frac{1}{2} \omega^2 p^2$$

olur. $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ve $p=\sqrt{x^2+y^2}$ olduğu göz önüne alınarak, gravite vektör bileşenleri,

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{GM}{r^3} x + x \omega^2, \quad g_y = \frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{GM}{r^3} y + y \omega^2 \quad \text{ve} \quad g_z = \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{GM}{r^3} z$$

bulunur. Buna göre, gravite

$$\begin{aligned} g=|g| &= \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} = \sqrt{\frac{G^2 M^2}{r^4} + \omega^4 (x^2 + y^2) - \frac{GM}{r^3} \omega^2 (x^2 + y^2)} \\ &= \sqrt{\frac{G^2 M^2}{r^4} + \omega^4 p^2 - \frac{GM}{r^3} \omega^2 p^2} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Yeryuvarını küre kabul ettiğimiz için $r=R$ 'dir:

- Kutup noktasında $p=0$ olduğuna göre (bkz. Şekil 2.3) gravite değeri,

$$g = \frac{GM}{R^2} = 982,0224 \text{ cm/s}^2 = 982,0224 \text{ Gal bulunur.}$$

- Diğer yandan ekvatorunda $p=R$ 'dir; gravite değeri,

$$\begin{aligned} g &= \sqrt{\frac{G^2 M^2}{R^4} + \omega^4 p^2 - \frac{GM}{R^3} \omega^2 p^2} = \sqrt{\left(\frac{GM}{R^2} - p \omega^2\right)^2} = \frac{GM}{R^2} - p \omega^2 \\ &= 978,6346 \text{ cm/s}^2 = 978,6346 \text{ Gal çıkar.} \end{aligned}$$

Not 2.3: Örnek 2.2'den kutup ve ekvatordaki gravite değerleri arasındaki farkın yaklaşık 5 Gal olduğu görülmektedir. Fiziksel yeryüzünde gravite en çok bu kadar değişir; bunun da en büyük sebebi merkezkaç kuvvetidir. Merkezkaç kuvveti ise yeryuvarında “p” uzunluğu nedeniyle enleme bağlıdır: Enlem arttıkça p sıfıra gider; merkezkaç kuvveti azalır ve gravite değeri artar. Yani kuramsal olarak, İstanbul'da tartıldığımızda Ankara'ya göre daha ağır oluruz!

Not 2.4: Bölüm 2.1'de yeryuvarının 4,5 milyar yıldır kendi ekseninde dönmesinden dolayı şeklinin elipsoit biçimli olduğundan bahsetmiştik. Bu gerçek yukarıdaki örnekten analitik olarak da anlaşılabilir: Ekvatorda dışa doğru olan merkezkaç kuvveti kutuplara göre daha fazladır. Dolayısıyla ilk halinde küre biçiminde olan (varsayılan!) yeryuvarı zamanla kutuplarda basık, ekvatorda şişkin olan bir elipsoit halini almıştır.

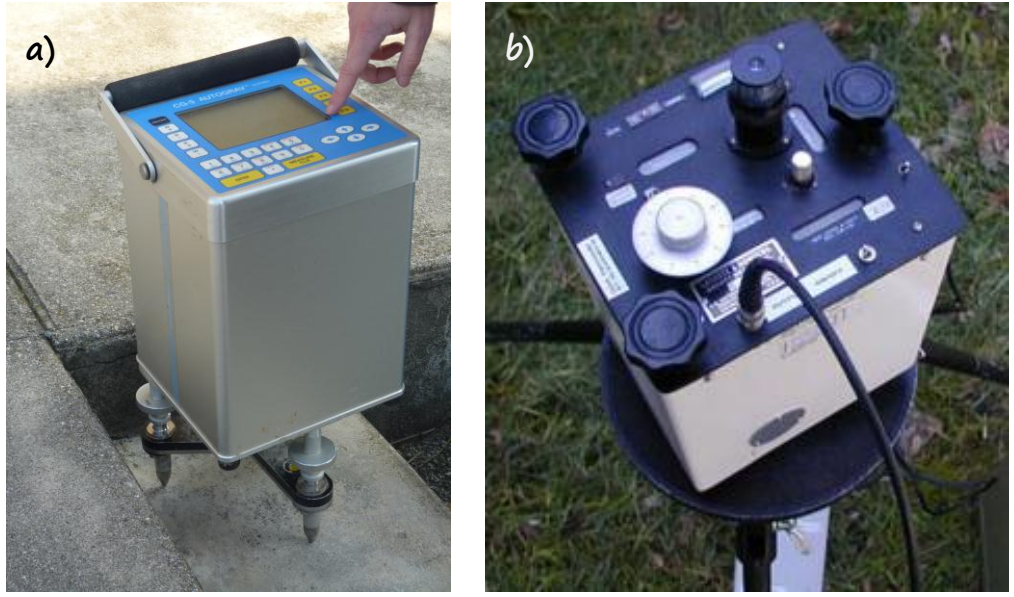
2.3 Fiziksel Yeryüzünde Gravite Nasıl Ölçülür?

Fiziksel yeryüzünde gravite, (yersel) **gravimetri** adı verilen yöntemle belirlenir. İki tür gravimetrik yöntem bulunur;

- Bağıl gravimetrik yöntem
- Mutlak gravimetrik yöntem.

Bunlardan ilki ile yeryüzünde iki nokta arasındaki gravite farkı; mutlak yöntemde ise nokta gravite değeri doğrudan bulunur. Bağıl yöntemde kullanılan aletlere bağıl **gravite ölçerler** (relative gravimeter), diğerindekilere ise mutlak gravite ölçerler (absolute gravimeter) denir. Günümüzde kullanılan bağıl gravite ölçerler,

- **LaCoste&Romberg** (LCR)-D; LCR-G ve
- **Scintrex CG5** marka gravite ölçerlerdir.



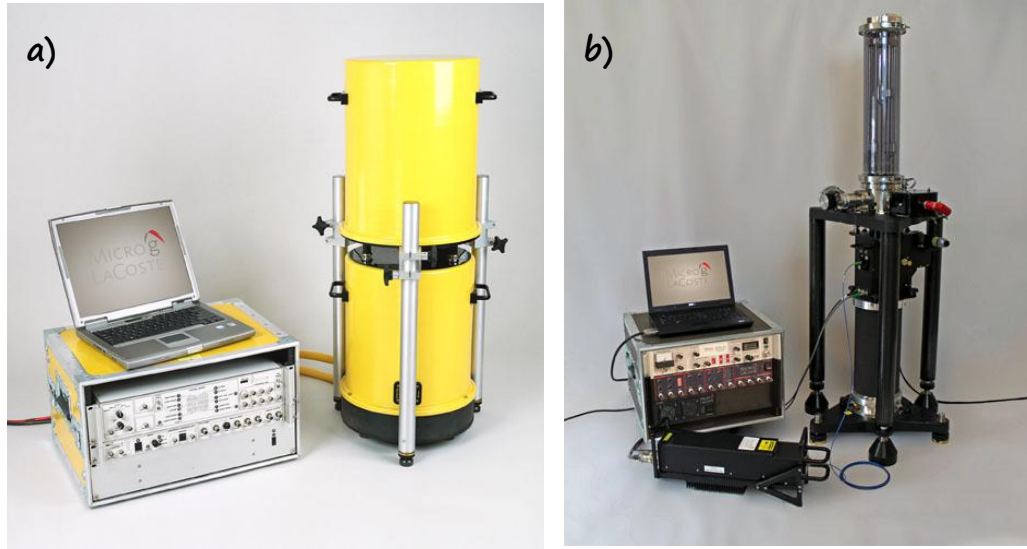
Şekil 2.4 a) Scintrex CG5 (commons.wikimedia.org) ve b) LCR G bağıl gravite ölçer

LCR marka gravite ölçerler analog¹, Scintrex'ler ise dijitaldir. Her ikisi de helezonik bir yaya asılı duran bir kütlenin bir denge durumundan sapmasını tespit eden bir ölçme düzeneğine yani sensöre dayanır. Bu aletlerle iki nokta arasındaki gravite farkı 5-10 μGal doğruluğunda belirlenebilir. Ancak bu doğruluğu elde edebilmek için bir takım özel ölçme ve değerlendirme yöntemlerini düşünmek gerekir; buna, diğer gravimetri işlemlerinden ayırmak için, mikro-gravimetri denir. Genel bir bağıl değerlendirme işleminde mGal birimine dönüştürülen ölçü değerleri (okumalar-readings) için

- Drift (sürüklenme) düzeltmesi,
- Gelgit deformasyonu düzeltmesi,
- Alet yüksekliği-nokta yüksekliği indirgemesi,
- Atmosferik basınç ve sıcaklık düzeltmeleri

¹ LCR gravite ölçerlere sonradan eklenen elektronik düzeneklerle bu aletlerle digital okuma yapılabilmektedir.

düşünülür (ayrıntı için, Torge (1989) veya Aydın (2007)'ye bakılabilir) Bunlardan drift, aletin elastik yay sisteminden dolayı okuma değerlerinin zamana bağlı olarak değişmesidir ve bağıl değerlendirmede göz önüne alınması gereken en önemli parametredir. Tespiti için gün içinde gravite noktaları tekrarlı olarak ölçülür. Tekrarlı ölçülere zamana bağlı polinomlar uydurularak etkisi giderilir. Gelgit deformasyonu ise ay ve güneşin çekim etkilerindeki düzensizliklerden dolayı kara veya denizde meydana gelen elastik deformasyondur; gravite ölçülerinde etkisi 200 μGal 'e kadar ulaşabilen bu deformasyon bir noktada sinüs dalgası biçimindedir. Bu etkiyi çıkarabilmek için hazır gelgit modelleri (Longman, CTE, Tamura vd.) bulunur. Standart bir model olarak genellikle Longman ve daha hassas çözümler için CTE tercih edilir.



Şekil 2.5 a) Micro-g LaCoste A-10 ve b) Micro-g LaCoste FG5-X mutlak gravite ölçer (www.microglacoste.com)

Günümüzde en yaygın kullanılan mutlak gravite ölçerler ise micro-g LaCoste firması tarafından üretilen A-10 ve FG5 gravite ölçerlerdir; A-10 taşınabilir, FG5 ise laboratuvar ortamında çalışır. Her ikisinde de serbest bırakılan bir kütlenin aldığı yol ve hareket zamanı ölçülür; hareket denkleminde “ivme” yani gravite değeri elde edilir. Bir noktanın gravite değeri A-10 ve FG5 ile 10 μGal , yeni model FG5-X ile 2 μGal doğruluğunda belirlenebilmektedir.

Taşınabilir mutlak gravite ölçerler bir gravite ağının ana noktalarının ve bağıl gravite ölçerlerin kalibre edildiği kalibrasyon geçki noktalarının ölçümünde kullanılır. Gravite ağının sıklaştırılması ise ölçüm işlemi görece hızlı olması nedeniyle bağıl gravite ölçerlerle gerçekleştirilir.

2.4 Eşpotansiyelli Yüzey

Potansiyelleri eşit olan noktaları birleştirdiğimiz zaman **eşpotansiyelli yüzey** (seviye yüzeyi) elde edilir. Bir eşpotansiyelli yüzey şöyle gösterilir;

$$W(x,y,z)=\text{sabit} \quad \text{veya} \quad W=\text{sabit} \quad (2.6)$$

$m=1$ (x,y,z) noktası diferansiyel anlamda yer değiştirildiğinde, yani $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ noktasına taşındığında, potansiyel de şu kadar değişir (Taylor serisinin değişim kısmını hatırlayınız!);

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz \quad (2.7)$$

Bu değişim miktarı, vektörel çarpım ile

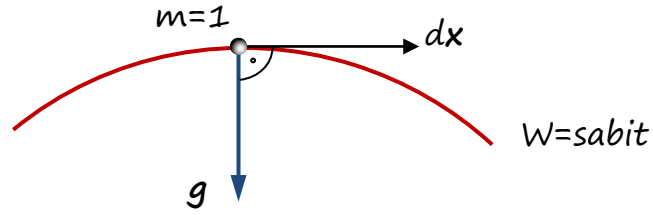
$$dW = \underbrace{\left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right)}_{\mathbf{g}} \underbrace{(dx, dy, dz)}_{d\mathbf{x}} = \mathbf{g} d\mathbf{x} \quad (2.8)$$

biçiminde gösterilir. Buradan iki önemli sonuç çıkar:

1. **Gravite vektörü eşpotansiyelli yüzeyin normalidir:** Bir noktanın “ $W(x,y,z)=\text{sabit}$ ” eşpotansiyelli yüzey üzerinde taşınması durumunda doğal olarak $dW=0$ olur. Bu, (2.8)’e göre,

$$\mathbf{g} d\mathbf{x} = 0 \quad (2.9)$$

demektir. İki vektörün çarpımı sıfır ise, “ $gdx=|g||dx|\cos(g,dx)$ ” eşitliğine göre iki vektörün arasındaki açı 90° veya 270° 'dir; yani iki vektör birbirine diktir. Burada nokta eşpotansiyelli yüzey üzerinde taşındığı için dx , ilgili noktada yüzeye teğettir. Buna göre, g ve dx vektörleri birbirine diktir. Böylece, gravite vektörünün eşpotansiyelli yüzeyin normali olduğu ispatlanır.



Şekil 2.4 Gravite vektörü ve eşpotansiyelli yüzey

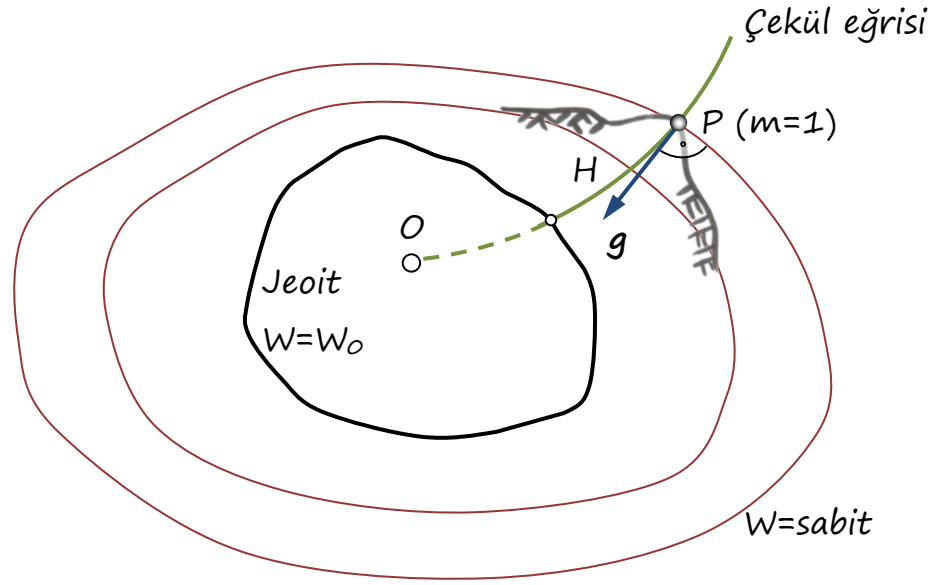
2. Eşpotansiyelli yüzey yatayı ifade eder: Önceki özelliğe göre gravite vektörü eşpotansiyelli yüzeyin normalidir. Gravite vektörü ise *düşeyi* gösterir. Buna göre, eşpotansiyelli yüzey yatayı ifade eder.

2.5 Çekül Eğrisi

Fiziksel yeryüzündeki P ($m=1$) noktası ile yeryuvarı ağırlık merkezi (O) bir eğri ile birleşir. Bu eğriye **çekül eğrisi** (plump line) denir.

Çekül eğrisinin özellikleri:

- Bu eğri o noktadan geçen eşpotansiyelli yüzeyi normal olarak keser. g gravite vektörü ise çekül eğrisinin teğetidir.
- Jeoitten itibaren olan H yüksekliği (**ortometrik yükseklik**) bu eğri boyunca ele alınır.



Şekil 2.5 Çekül eğrisi

2.6 W Potansiyelinin Düşey Gradyenti

Koordinatları x, y, z olan P ($m=1$) noktası gravite kuvveti g olan bir noktadan yukarı doğru $dH=|dx|$ diferansiyel mesafesi kadar çekül eğrisi doğrultusu boyunca Şekil 2.6'daki gibi taşınsın. Buna göre P noktasındaki gravite potansiyeli,

$$dW = gdx = |g||dx|\cos(g, dH) = g dH \cos 180^\circ = -g dH \quad (2.10)$$

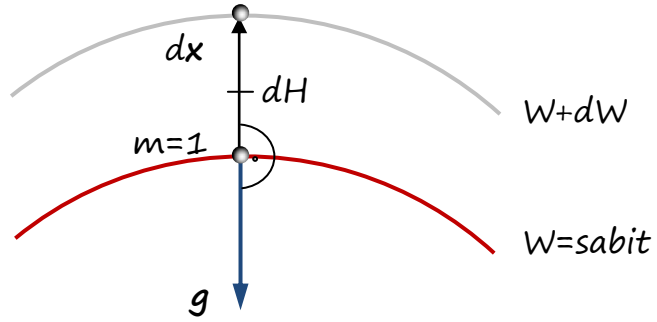
kadar değişir. Bir başka deyişle potansiyel bu kadar azalır. Bu eşitlik, yükseklik (H) ve potansiyel (W) arasındaki ilişkiyi gösterir ve yüksekliklerin tanımında kullanılır.

(2.10) eşitliğinin bir başka biçimi şöyledir;

$$g = -\frac{\partial W}{\partial H} \quad (2.11)$$

Bir başka deyişle, “ W potansiyelinin düşey gradyentinin ters işaretlisi

çekim ivmesine denktir” (bkz. (1.13) eşitliği).



Şekil 2.6 Yükseklik ve potansiyel değişimi

Örnek 2.3: Eşpotansiyelli yüzeylerin paralel olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm:

Bir $W=\text{sabit}$ eşpotansiyelli yüzey üzerinde iki nokta düşünelim. Bunlardan ilkinde gravite kuvveti g_1 değerinde de g_2 olsun. Gravite kuvveti her noktada farklı olduğu için $g_1 \neq g_2$ 'dir. Şimdi de bu iki noktayı çekül eğrisi doğrultusunda $W+dW=\text{sabit}$ eşpotansiyelli yüzeye taşıyalım. Noktalar için alınan yollar dH_1 ve dH_2 kadar olsun. İki nokta için potansiyel değişimi (2.10)'a göre,

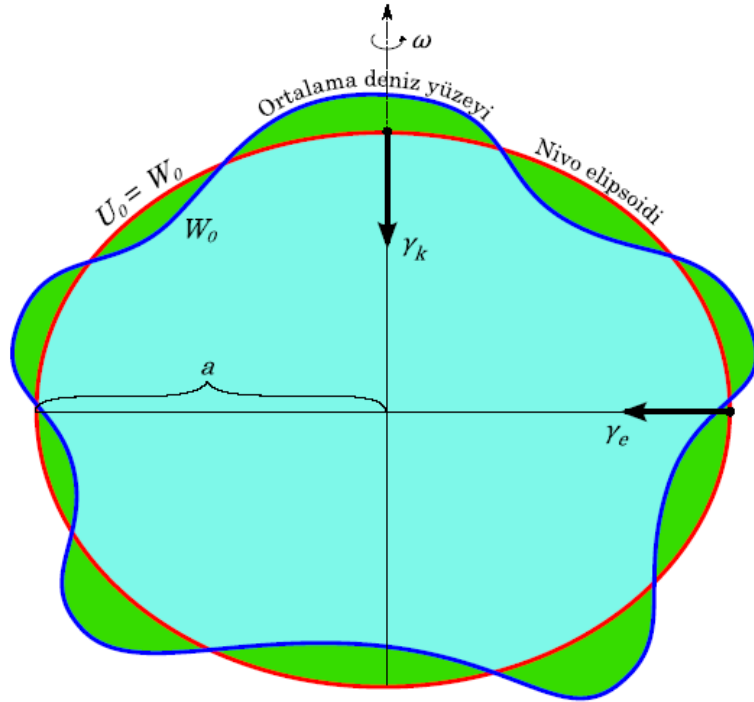
$$dW = -g_1 dH_1 = -g_2 dH_2$$

olur. $g_1 \neq g_2$ olduğu için buradan dH_1 ve dH_2 'nin farklı olması gerektiği sonucu çıkar. Buna göre iki yüzey paralel değildir. Genelleştirilecek olursak, “eşpotansiyelli yüzeyler paralel değildir”.

2.7 Normal Gravite Alanı

Matematiksel özellikleri çok iyi bilinen bir dönel elipsoit geometrik anlamda jeoide, fiziksel anlamda gerçek gravite alanına çok yaklaşan bir referans model olarak tanımlanabilir. Hem geometrik hem fiziksel tanımı yapılmış referans elipsoidine **nivo elipsoidi** denir ve aşağıdaki dört parametre ile ifade edilir;

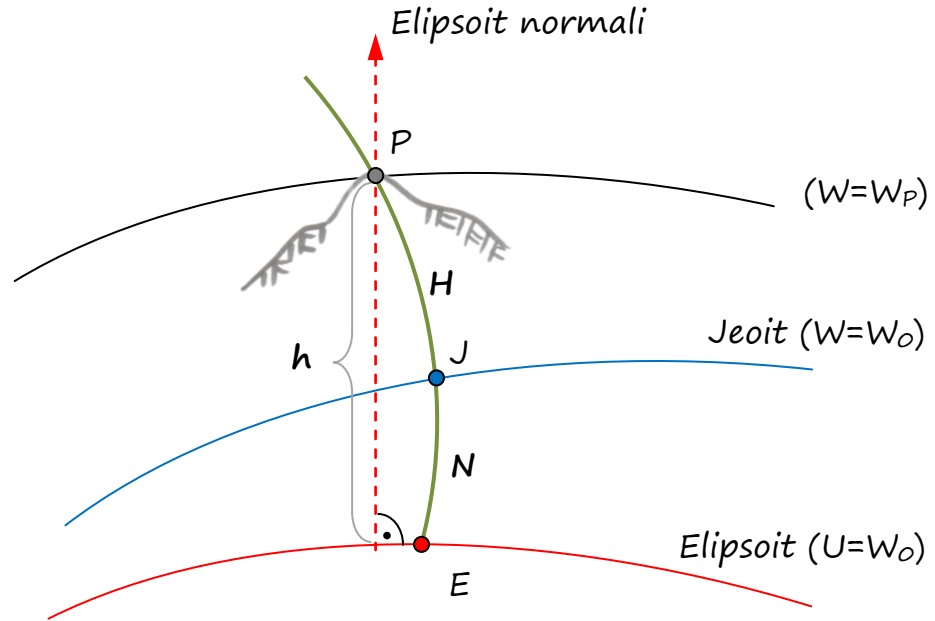
- a büyük yarı eksen,
- f basıklığı (veya J_2 dinamik şekil çarpanı),
- GM jeosentrik çekim sabiti,
- ω açıl dönme hızı.



Şekil 2.7 Nivo elipsoidi ve ortalama deniz yüzeyi (Jeoit) (Üstün, 2006)

Bir nivo elipsoidi yeryuvarının gerçek şeklini ve gravite alanını en iyi temsil edecek şekilde tasarlanmalıdır. Bu sayede nivo elipsoidinden olan sapmalar yoluyla yeryuvarının gerçek şekli ve gravite alanına geçiş yapılabilir. Örneğin, h elipsoidal yüksekliği yeryüzü ile elipsoit arasındaki sapmayı gösterir; bu geometrik bir farktır. Bununla birlikte N , yerin gerçek gravite alanı ve nivo elipsoidi (normal) gravite alanlarına ilişkin

referans eşpotansiyelli yüzeyler arasındaki sapmayı ifade eder. Bu ise fiziksel bir sapmadır.



Şekil 2.8 Normal eşpotansiyelli yüzeyden sapmalar

Nivo elipsoidi yüzeyine karşılık gelen ve jeoidin W_0 potansiyeline eşit olduğu varsayılan $U_E = W_0$ potansiyeli yukarıda ifade edilen parametreler yardımıyla aşağıdaki biçimde ifade edilir;

$$U_E = \frac{GM}{D} \arctan e' + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \quad (2.12)$$

Burada, D , doğrusal dışmerkezlik ($=\sqrt{a^2 - b^2}$), e' ise 2. dışmerkezliktir ($=D/b$).

Bu normal gravite potansiyeline karşılık gelen gravite kuvvetine ise **normal gravite kuvveti** denir ve γ ile gösterilir. Normal gravite kuvvetinin büyüklüğüne, **normal gravite** denir. Referans elipsoidi üzerinde normal gravite aşağıdaki Somigliana eşitliği ile ifade edilir;

$$\gamma_E = \gamma_{ekv} \frac{1 + k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (2.13)$$

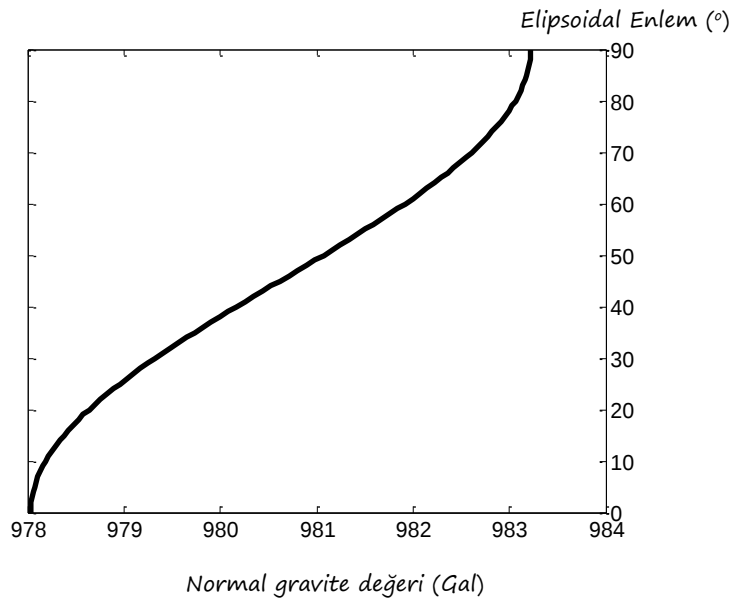
Burada γ_{ekv} , ekvatordaki normal gravite değeri; φ , elipsoidal enlem; k , normal gravite sabiti; e^2 , referans elipsoidinin birinci dışmerkezlik elemanıdır. GRS80 elipsoidi için bu elemanlar şöyledir:

$$\gamma_{ekv} = 978,03267715 \text{ Gal},$$

$$k = 0,001931851353,$$

$$e^2 = 0,00669438002290.$$

Elipsoidal enleme göre, normal gravite değerlerinin değişimi Şekil 2.4'de gösterilmektedir.



Şekil 2.9 Normal gravitenin elipsoidal enleme göre değişimi (GRS80 elipsoidi)

2.8 Koordinat Sistemleri

Jeodezide kullanılan koordinat sistemleri, bölgesel gereksinimleri karşılamak amacı ile oluşturulan yerel koordinat sistemleri ve tüm

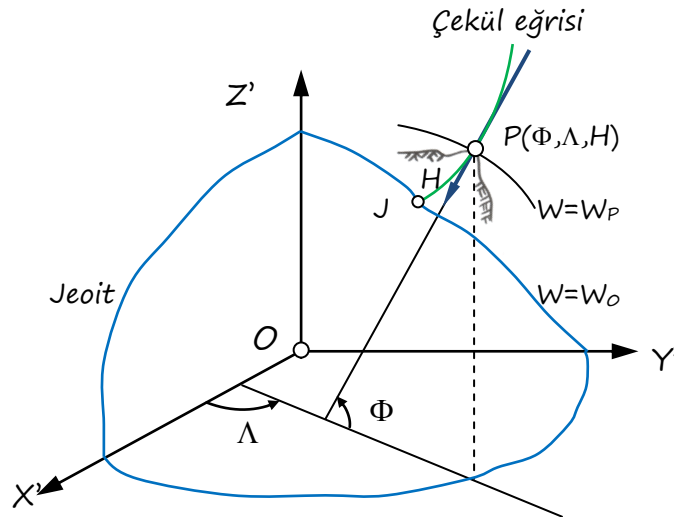
yeryuvarı için geçerli dünya koordinat sistemleri olmak üzere ikiye ayrılır.

2.8.1 Dünya Koordinat Sistemleri

a) **Doğal (Astronomik) dünya koordinat sistemi:** Yeryuvarı dönme eksenini doğrultusu ve buna dik olan ekvator düzleminin konumu astronomik olarak iyi derecede bilinmektedir. P noktasının **astronomik enlemi** (Φ), noktadan geçen çekül doğrultusu (düşey ya da çekül eğrisinin doğrultusu) ile ekvator düzleminin arasındaki açı; **astronomik boylam** (Λ) ise, astronomik meridyen düzlemi ile Greenwich meridyen düzlemi arasındaki ölçek açıdır. Bu enlem ve boylam dışında üçüncü bilgi ya W_P potansiyeli ya da noktadan geçen çekül eğrisinin jeoidi deldiği J noktasına kadar olan mesafe yani ortometrik yükseklik (H) ile sağlanır: Bir noktanın doğal koordinatı deyince,

$$\Phi, \Lambda, W \text{ ya da } \Phi, \Lambda, H \quad (2.12)$$

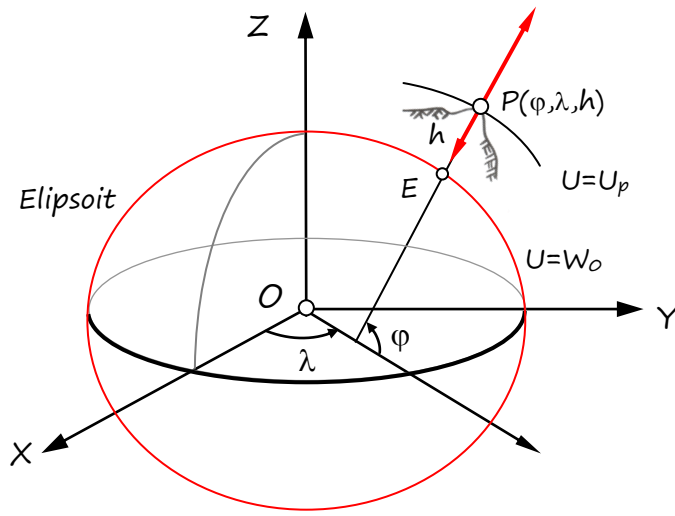
koordinatları anlaşılır.



Şekil 2.10 Astronomik koordinat sistemi

b) **Model (Elipsoit) dünya koordinat sistemi:** “ $U=U_E=W_0$ ” şeklinde normal gravite alanının bir eşpotansiyelli yüzeyi olarak

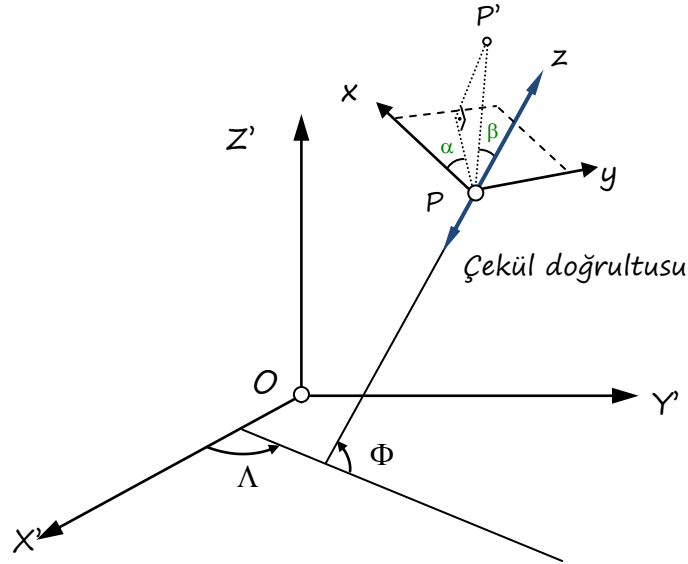
tanımlanan dönel elipsoit referans alınarak bir P noktasının koordinatları, φ elipsoidal (jeodezik) enlemi, λ elipsoidal boylamı ve h elipsoidal y ksekl  i ile tanımlanır. Elipsoidal enlem ilgili noktadan geçen elipsoidal normal ile ekvator düzlemi arasındaki açı; elipsoidal boylam ise Greenwich meridyen düzlemi ile jeodezik meridyen düzlemi arasındaki açı olarak ifade edilir. h elipsoidal boylamı ise elipsoit normali boyunca nokta ile elipsoit arasındaki mesafe olarak tanımlanır.



Şekil 2.11 Elipsoidal koordinat sistemi

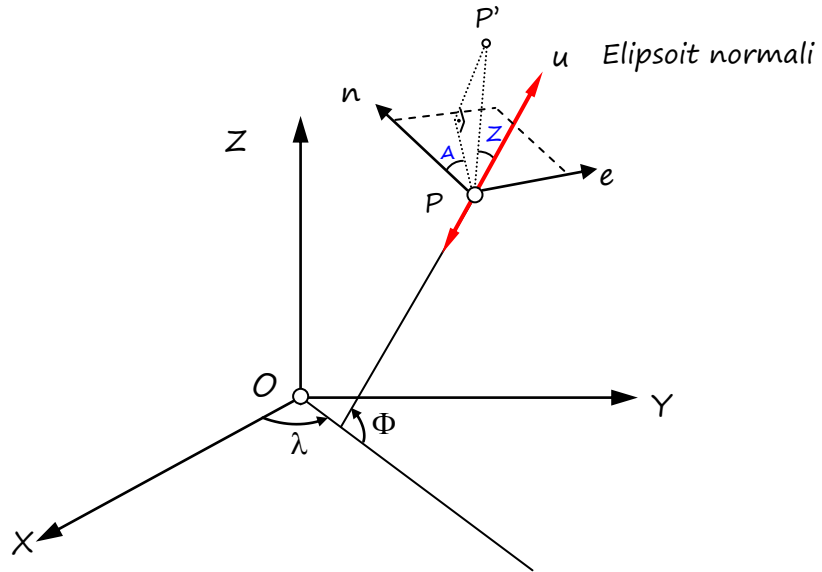
2.8.2 Yerel Koordinat Sistemleri

- a) **Doğal yerel koordinat sistemi:** Başlangıcı yeryüzündeki herhangi bir P noktası olan ve z eksenini P noktasındaki çekül doğrultusu ile  akı an bir x, y, z yerel dik koordinat sistemi düşünülebilir. Burada, x , **astronomik kuzey**; y , **astronomik doğu** olarak adlandırılır. Bu koordinat sisteminde bir P' noktasının koordinatlarını tanımlamak için P noktasından  ekil 2.9'daki gibi, α **astronomik azimutu**, β **astronomik ba ucu uzaklığı** ve iki nokta arasındaki uzunluk kullanılır.



Şekil 2.12 Doğal yerel koordinat sistemi

b) **Model Yerel Koordinat Sistemi:** Doğal yerel koordinat sistemi noktadan geçen çekül doğrultusuna göre oluşturulur. Bir bakıma o noktada kurulacak bir jeodezik ölçme aleti için geçerli bir sistem, yani gerçek bir koordinat sistemidir. Söz konusu noktadan geçen çekül doğrultusu yerine elipsoit normali alındığında dik koordinatları n , e , u olan model yerel koordinat sistemi oluşur. Buna örnek olarak GPS'de kullanılan North, East, Up koordinat sistemi verilebilir.

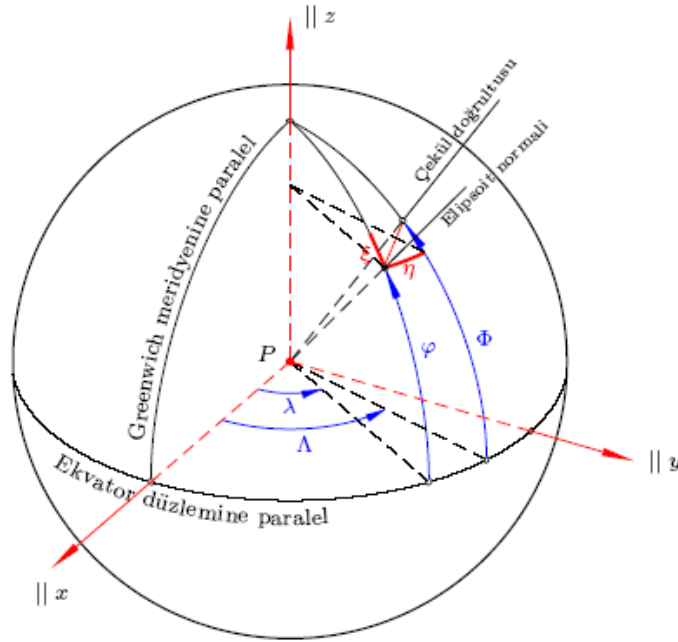


Şekil 2.13 Model yerel koordinat sistemi

Burada n , jeodezik kuzey ve e , jeodezik doğu olarak adlandırılır. Model yerel koordinat sisteminde P noktasından bir diğer P' noktasının konumu, A , jeodezik azimutu, Z , jeodezik başucu doğrultusu ve iki nokta arasındaki uzunluk ile tanımlanır.

2.9 Gravite Kuvvetinin Yönü Nasıl Belirlenir?

Bir kuvvet yönü ve büyüklüğü ile tanımlanır. Gravite kuvvetinin büyüklüğü yani g gravite değeri fiziksel yeryüzünde Bölüm (2.3)'de açıklanan yöntemlerle elde edilir. Yönünü yani çekül doğrultusunu veya düşeyi tanımlamak için bunun matematiksel olarak bilinen bir doğrultudan sapmasını ele almak gerekir. Bu sapmaya çekül sapması (θ) denir.



Şekil 2.14 Çekül sapması bileşenleri (Üstün, 2006)

Bir noktanın astronomik enlemi (ϕ), boylamı (Λ) ve jeodezik enlemi (Φ), boylamı (λ) biliniyorsa, çekül sapmasının kuzey-güney (ξ) ve doğu-batı (η) bileşenleri Şekil 2.14'den

$$\xi = \Phi - \phi \quad , \quad \eta = (\Lambda - \lambda) \cos \phi \quad (2.13)$$

biçiminde tanımlanır. Buradan çekül sapması elde edilir:

$$\theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad (2.14)$$

Çekül sapmasının herhangi bir α azimutu doğrultusundaki bileşeni ise

$$\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha \quad (2.15)$$

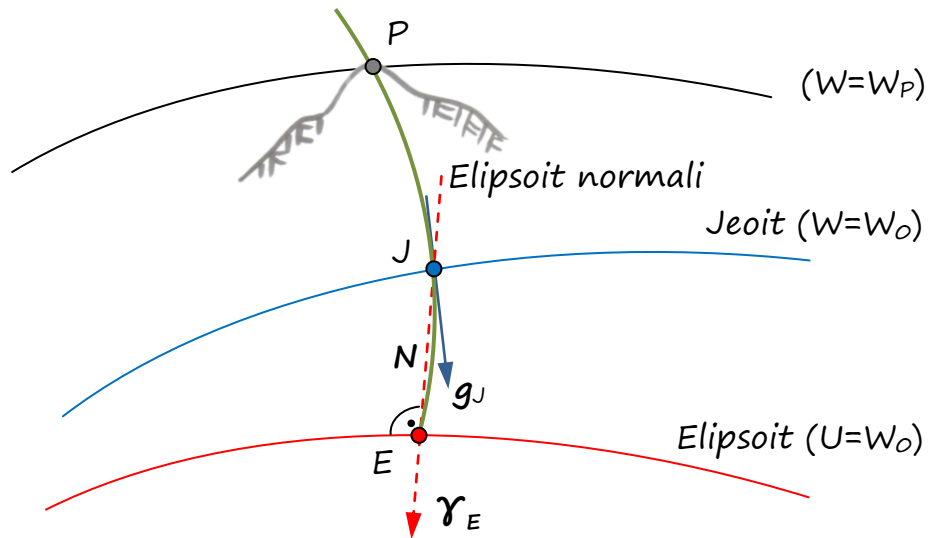
biçiminde ifade edilir.

2.10 Bozucu Gravite Alanı

Gerçek gravite alanının normal gravite alanından sapmaları çok küçüktür. Bu nedenle gerçek gravite alanına geçiş için genellikle bu sapmalardan yararlanılır. Bir noktadaki gerçek gravite potansiyeli (W) ile normal gravite potansiyeli (U) arasındaki farka **bozucu potansiyel** denir;

$$T = W - U \quad (2.16)$$

2.11 Jeoit Yüksekliği: Bruns Eşitliği



Şekil 2.15 Jeoit yüksekliği

Şekil 2.15'de gösterilen jeoitte yer alan J noktasındaki elipsoit normalı boyunca elipsoide ulaşalım ve ulaştığımız noktaya E diyelim. J noktasının gerçek gravite potansiyelini (2.16)'dan

$$W_J = U_J + T_J \quad (2.17)$$

biçiminde yazabiliriz. (2.17)'de geçen U_J normal potansiyelini ise

$$U_J = U_E + N \frac{\partial U_E}{\partial n} \quad (2.18)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada $N = |JE|$ jeoit yüksekliğini ve n elipsoit normalı doğrultusunu göstermektedir. (2.18) eşitliği, (2.17)'de düşünülür ve $W_J = U_E = W_0$ olacağından,

$$T_J = -N \frac{\partial U_E}{\partial n} \quad (2.19)$$

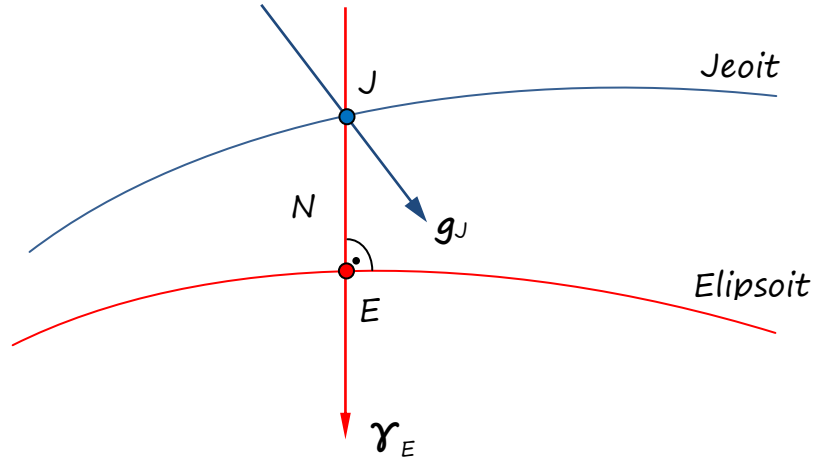
elde edilir. (2.11)'e göre, (2.19)'daki (normal) düşey gradyent yani $\frac{\partial U_E}{\partial n}$ ifadesinin ters işaretlisi, E noktasındaki normal gravite değerine (γ_E 'ye) eşittir. Böylece, fiziksel jeodezinin ünlü eşitliklerinden **Bruns eşitliği** bulunur:

$$N = \frac{T}{\gamma_E} \quad (2.20)$$

Bu eşitlik bozucu potansiyelin bilinmesi durumunda jeoit yüksekliğine nasıl geçileceğini gösterir.

2.12 Gravite Anomalisi ve Bozukluğu

Jeoit üzerinde yer alan bir J noktasındaki gravite vektörü (g_J) ile bu noktadan geçen elipsoit normalinin elipsoidi deldiği E noktasındaki normal gravite vektörü (γ_E) arasındaki farka **gravite anomali vektörü** denir (Şekil 2.16).



Şekil 2.16 Gravite anomalisine ilişkin vektörler

Gravite anomali vektörünün büyüklüğüne ise **gravite anomalisi** adı verilir;

$$\Delta g = g_J - \gamma_E \quad (2.21)$$

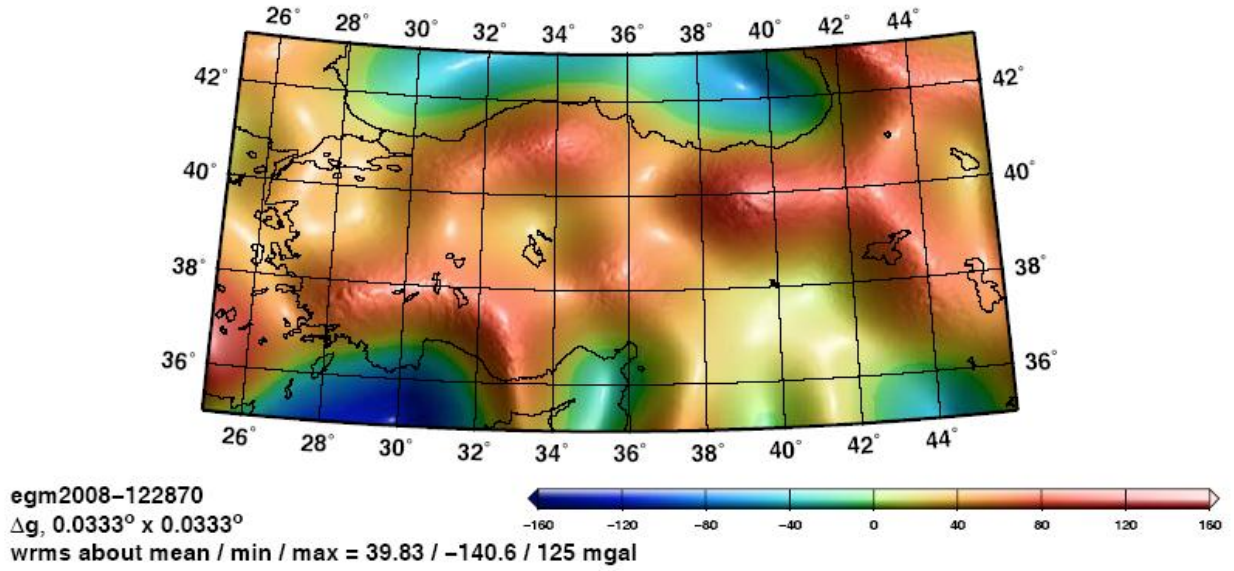
Gravite anomalisi, N jeoit yüksekliğinin elde edilmesinde temel veri olarak kullanılır.

Eğer, normal gravite Şekil 2.16'daki E yerine J noktasında hesaplanırsa, (2.26)'daki gravite anomalisi yerine **gravite bozukluğu** elde edilir;

$$\delta g = g_J - \gamma_J \quad (2.22)$$

Gravite bozukluğu, kavram olarak gravite anomalisinden daha kolay

yorumlanabilir. Fakat bu bozukluk yersel jeodezi için çok anlama sahip değildir. Ancak, gelecekte, gravite bozukluğunun, GNSS nedeniyle daha önemli olacağı düşünülmektedir (Hoffmann-Wellenhof ve Moritz, 2006).



Şekil 2.17 Türkiye için EGM2008 gravite anomali haritası (2'x2')

2.13 Serbest Hava İndirgemesi ve Kütle İndirgemesi

(2.21) eşitliğinde verilen gravite anomalisinin hesabı için jeoit üzerindeki J noktasının gravite değerine (g_J) ihtiyaç vardır. Ancak gravite değeri fiziksel yeryüzünde ölçülür. Bu değeri jeoit yüzeyinde elde edebilmek için iki temel indirgeme işlemi yapılır;

- Serbest hava indirgemesi
- Kütle indirgemesi.

Serbest hava indirgemesi yükseklik etkisini, diğeri ise jeoit ile fiziksel yeryüzü arasında kalan kütlenin etkisini gidermek için gerçekleştirilir. Serbest hava indirgemesi için,

$$dg_s = -0,3086 \text{ (mGal/m)}H \quad (2.23)$$

değeri, diğeri için de $\rho=2,67 \text{ g/cm}^3$ yoğunluğa sahip bir Bouguer tabakasının etkisini ifade eden

$$dg_B=0,1119 \text{ (mGal/m)}H \quad (2.24)$$

değeri düşünülür. Bu eşitliklerde H , gravitenin ölçüldüğü noktanın ilgili yüzeyden (burada jeoitten) itibaren olan yüksekliğidir. Bir noktanın arazide ölçülen gravite değeri g ise, jeoit üzerindeki gravite değeri

$$g_J=g-dg_S-dg_B=g+0,1967 \text{ (mGal/m)}H \quad (2.25)$$

şeklinde hesaplanır; yani g gravitesi jeoide indirgenir. (2.25) ile elde edilen gravite değerine bazen Bouguer gravitesi, buradan elde edilen gravite anomalisine de Bouguer anomalisi denmektedir.

(2.25) indirgemesinin yapılabilmesi için gereken H yükseklik değerleri uygulamada sayısal arazi modellerinden (DEM'lerden) elde edilir. Yanı sıra, hassas işlerde (2.25)'deki indirgemeler yanında arazi düzeltmesi (terrain correction) de düşünülür. Bu arazi düzeltmesi, sonsuz yarıçaplı H yüksekliğindeki bir silindiri ifade eden Bouguer tabaka modeli ile kurulan kütle etkisi yaklaşımındaki eksikliği gidermek için yapılır. Dağlık bölgelerde arazi düzeltmesi 50 mGal seviyelerine ulaşır.

Bununla birlikte, (2.23) eşitliği yükseklik değişimi ile gravite değişimi arasındaki ilişkiyi yorumlamamızda kullanılır. Bunu şöyle ifade edebiliriz; her bir metre (veya mm) yükseldikçe nokta gravite değeri 0,3086 mGal (veya μGal) azalır. Bu bize çökme veya yükselmenin çok büyük genlikli olduğu bölgelerdeki (örneğin, İskandinavya ve Kuzey Amerika'da) yükseklik değişimlerinin gravite değişimleri yoluyla izlenebilmesini olanaklı hale getirir. Her 10 cm yükseklik değişimi yaklaşık 30 μGal gravite değişimine neden olur. Bağıl gravimetri yöntemiyle gravite değerlerinin elde edilmesi nivelman yöntemiyle yükseklik belirlemeden daha hızlı olduğu için, büyük bölgelerdeki böylesi büyük genlikli yükseklik değişimlerinin izlenmesinde

gravimetri kullanılmaktadır. Bu noktada şunu da vurgulamak gerekir: Gravite değişimi yalnızca yükseklik değişiminin izlenmesinde değil, bir yüzeyin altındaki kütle yoğunluk fonksiyonundaki değişimlerin izlenmesinde de önemli bilgi kaynağıdır. Bu amaçla farklı anomaliler kullanılmaktadır.

Örnek 2.4: Bir DEM'den yüksekliği 100 m olarak okunan noktada gravite değeri 980,7 Gal olarak ölçülmüştür. Bu noktanın ilgili başlangıç yüzeyindeki gravite değerini hesaplayınız.

Çözüm:

Başlangıç yüzeyindeki gravite değeri, (2.25) eşitliğine göre

$$g_J = 980700 \text{ (mGal)} + 0,1967 \times 100 \text{ (mGal)} = 980719,67 \text{ mGal olur.}$$

Örnek 2.5: Bir önceki örnekte noktanın GRS80 elipsoidi için geçerli enlemi 45° ise gravite anomalisini hesaplayınız.

Çözüm:

(2.13) eşitliğine göre elipsoit üzerindeki normal gravite değeri

$$\gamma_E = 980619,9202 \text{ mGal}$$

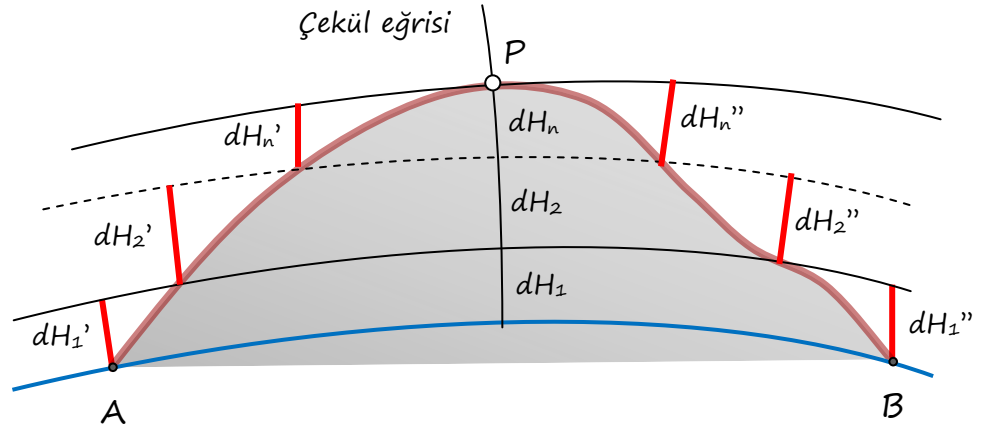
hesaplanır. Önceki örnekten $g_J = 980719,67 \text{ mGal}$ olduğundan, (2.21) gravite anomalisi,

$$\Delta g = g_J - \gamma_E = 99,7498 \text{ mGal}$$

bulunur.

3. YÜKSEKLİK SİSTEMLERİ

Bir noktanın yüksekliği denince o noktadan geçen eşpotansiyelli yüzeyin (nivo yüzeyinin) bir başlangıç yüzeyine ne kadar uzakta olduğunu anlarız. Bir noktanın bir başka noktaya göre yüksekte olduğunu ifade edilebilmesi için, suyun o noktadan yüksekliği az olan noktaya –başka bir dış kuvvet olmasa da–akması gerekir. Bu ise noktalardaki gravite değerleri ile ilgilidir: Su, gravitesi az olan noktadan gravitesi fazla olan noktaya akar. Öyleyse–şu andaki yükseklik algımızı bir yana koyarak–gravitesi fazla olan noktayı alçakta, az olanı ise yüksekte diye tanımlamalıyız. O zaman yüksekliği geometrik bir büyüklük olarak değil fiziksel bir kavram olarak düşünmeliyiz. Bir başka deyişle yükseklik kavramını gravite alanı çerçevesinde irdelemeli, buna göre yükseklik tanımını yapmalıyız.



Şekil 3.1 Nivelman işlemi

Nokta yüksekliklerini nivelman işlemiyle buluruz. Ancak nivelman yola bağlıdır. Farklı yollar kullanıldığında aynı noktaya ilişkin farklı yükseklikler elde edilir. Örneğin Şekil 3.1'de bir başlangıç yüzeyi üzerindeki A ve B'den ayrı ayrı P noktasına nivelman yapılmış olsun. Nivo yüzeyleri paralel olmadığı için

$$\sum dH_i' \neq \sum dH_i'' \neq \sum dH_i \quad (3.1)$$

çıkar. Yani A'dan ve B'den P noktası için farklı yükseklik değerleri bulunur. Geometrik nivelmanı yoldan bağımsız hale getirmenin yolu, eşpotansiyelli yüzeyler arasındaki farkı yani dW 'yi düşünmektir. (2.10)'da gösterildiği gibi,

$$dW = -gdH$$

olduğu için, nivelman ölçüleriyle birlikte g gravite gözlemlerinin de yapılması gerekir. Bu durumda, yani nivelmanla elde edilen yükseklik farkı ve g yardımıyla bulunan potansiyel farkının düşünülmesiyle her zaman tek anlamlı sonuca ulaşılır. Örneğin, Şekil 3.1'deki A-P ve B-P nivelman işlemi için (3.1) tutarsızlığı ortadan kalkar ve sonuç olarak

$$\sum g_i dH'_i = \sum g_i dH''_i = \sum g_i dH_i \quad (3.2)$$

denkliği sağlanır.

Teori ve uygulamadaki yükseklik problemlerinin çözümü için jeodezide çeşitli yükseklik sistemleri tanımlanmıştır. Bunlar bilimsel ve pratik yükseklik sistemleri olmak üzere iki sınıf altında düşünülür;

- Bilimsel Yükseklikler
 - Jeopotansiyel yükseklik
 - Dinamik yükseklik
 - Ortometrik yükseklik
- Pratik Yükseklikler
 - Normal yükseklik
 - Normal ortometrik yükseklik
 - Elipsoidal yükseklik

3.1 Bilimsel Yükseklikler

3.1.1 Jeopotansiyel Yükseklik

Bir P noktasının W_P gravite potansiyelinin başlangıç yüzeyine ilişkin W_0 potansiyelinden olan sapmasının ters işaretlisine o noktanın jeopotansiyel yüksekliği denir;

$$C = W_0 - W_P = \int_0^P g dH \quad (3.3)$$

Jeopotansiyel yükseklik (veya jeopotansiyel sayısı), bir uzunluk boyutuna sahip değildir ancak yükseklikler için doğal bir ölçüttür. Yükseklik, bu sayının uygun bir G gravite değerine oranı biçiminde tanımlanır;

$$\text{Yükseklik} = \frac{C}{G} \quad (3.4)$$

Not 3.1: Nivelmanla iki nokta arasında bulunan yükseklik farkı " $\Delta H_{niv} = \sum \Delta H_{niv,i}$ " olsun. Ara noktalar boyunca elde edilen ortalama gravite $g_{ort,i}$ olmak üzere, jeopotansiyel yükseklik farkı " $\Delta C = \sum g_{ort,i} \Delta H_{niv,i}$ " şeklinde hesaplanır. Ülke nivelman ağ noktalarının jeopotansiyel yükseklikleri bu farkların ele alınmasıyla bulunur. Böylece, istenilen yükseklik sistemine (3.4) eşitliği ile geçilir.

Not 3.2: Nivelmanla elde edilen yükseklik farkları herhangi bir yükseklik sistemine ilişkin değildir. Bu amaçla ya Not 3.1'de açıklandığı gibi jeopotansiyel yüksekliklere geçilerek ilgili yükseklikler tanımlanır ya da nivelmanla elde edilen yükseklik farklarına gravitenin bir fonksiyonu olan düzeltmeler getirilerek ilgili yükseklik sistemindeki yükseklik farkları (örneğin ortometrik yükseklik farkları) yoluyla noktaların istenen yükseklikleri bulunur.

3.1.2 Dinamik Yükseklik

Jeopotansiyel yüksekliğin bir normal gravite değerine (γ_o) oranı ile bulunan yüksekliğe *dinamik yükseklik* adı verilir;

$$H^D = \frac{C}{\gamma_o} \quad (3.5)$$

γ_o değeri genellikle 45° enlemine ilişkin sabit bir normal gravite değeri olarak alınır. Her ne kadar (3.5) eşitliği ile jeopotansiyel yükseklikten uzunluk boyutuna geçiş sağlanıp tutarlı bir yükseklik sistemi oluşturulsa da, nivelman yükseklik farklarına getirilecek dinamik düzeltme değerlerinin büyük olması nedeniyle dinamik yükseklik uygulamada tercih edilmez.

Dinamik düzeltme: A ve B gibi iki nokta arasındaki dinamik yükseklik farkı ΔH^D olsun. (3.5) ve (3.3) eşitliklerine göre bu fark,

$$\begin{aligned} \Delta H^D &= \frac{1}{\gamma_o} (C_B - C_A) = \frac{1}{\gamma_o} \int_A^B g dH = \frac{1}{\gamma_o} \int_A^B (g - \gamma_o + \gamma_o) dH = \\ &= \int_A^B dH + \int_A^B \frac{(g - \gamma_o)}{\gamma_o} dH \end{aligned} \quad (3.6)$$

şeklinde elde edilir. İki integral,

$$\begin{aligned} \int_A^B dH &\approx \Delta H_{niv} = \sum \Delta H_{niv,i} \rightarrow \text{Nivelman ile elde edilen yükseklik farkı} \\ \int_A^B \frac{(g - \gamma_o)}{\gamma_o} dH &\approx \delta = \sum \frac{(g_{ort,i} - \gamma_o)}{\gamma_o} \Delta H_{niv,i} \rightarrow \text{Dinamik düzeltme} \end{aligned}$$

biçiminde ele alınabilir. Sonuç olarak iki nokta arasındaki ΔH^D dinamik yükseklik farkı, ΔH_{niv} nivelman yükseklik farkına δ dinamik düzeltmesi getirilerek elde edilir;

$$\Delta H^D = \Delta H_{niv} + \delta \quad (3.7)$$

3.1.3 Ortometrik Yükseklik

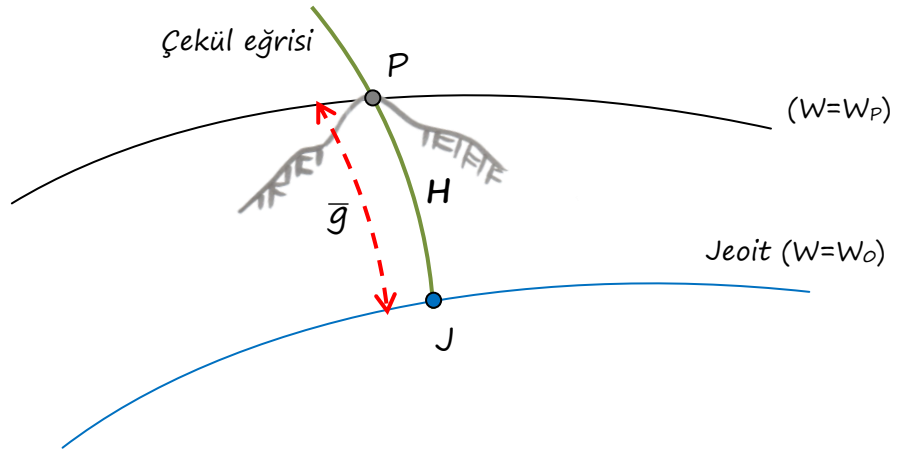
P noktasından geçen çekül eğrisinin jeoidi deldiği J noktasına kadar olan uzunluğu, P noktasının **ortometrik yüksekliği** olarak adlandırılır. P noktasının C jeopotansiyel yüksekliğinden aşağıdaki biçimde elde edilir;

$$H = \frac{C}{\bar{g}} \quad (3.8)$$

Burada, $\bar{g}$, jeoide kadar olan ortalama gravite değeridir; uygulamada P noktasında ölçülen gravite değeri g_P kullanılarak,

$$\bar{g} = g_P + 0,0424 \text{ (Gal/km)} H \quad (3.9)$$

eşitliği ile hesaplanır.



Şekil 3.2 Ortometrik yükseklik ve ortalama gravite

Ortometrik düzeltme: A ve B gibi iki nokta arasındaki ortometrik yükseklik farkı aşağıdaki gibi yazılsın;

$$\Delta H = H_B - H_A = H_B - H_A - H_B^D + H_A^D + (H_B^D - H_A^D) = \Delta H^D + (H_B - H_B^D) + (H_A - H_A^D) \quad (3.10)$$

Ortometrik ve dinamik yükseklikler arasındaki farklar ise (3.6)'ya göre ilgili dinamik düzeltme değerlerinin ters işaretlisine eşittir;

$$(H_B - H_B^D) = -\frac{(\bar{g}_B - \gamma_o)}{\gamma_o} H_B \text{ ve } (H_A - H_A^D) = -\frac{(\bar{g}_A - \gamma_o)}{\gamma_o} H_A \quad (3.11)$$

(3.7) ve (3.11) eşitlikleri (3.10)'da göz önüne alınırsa

$$\Delta H = \Delta H_{niv} + \sum \frac{(g_{ort,i} - \gamma_o)}{\gamma_o} \Delta H_{niv,i} - \frac{(\bar{g}_B - \gamma_o)}{\gamma_o} H_B + \frac{(\bar{g}_A - \gamma_o)}{\gamma_o} H_A \quad (3.12)$$

bulunur. Böylece A ve B noktaları arasındaki ortometrik yükseklik farkının nivelman sonucunda elde edilen ΔH_{niv} yükseklik farkına (3.12)'deki terimler (ortometrik düzeltme) eklenerek bulunacağı ortaya çıkar.

Örnek 3.1: Aşağıda A ve B noktaları arasında yapılan nivelman işleminden elde edilen geri ve ileri okumaları, noktalardaki gravite değerleri verilmektedir. A noktasının ortometrik yüksekliği 100 m'dir. Buna göre, iki nokta arasındaki dinamik ve ortometrik yükseklik farkını bulunuz.

Nokta	Geri (mm)	İleri (mm)	g (Gal)
A	1206	-	979,113
1	2760	960	979,251
2	1100	1350	979,310
3	2400	800	979,525
4	750	1150	979,444
B	-	225	979,150

Çözüm:

Dinamik yükseklik farkı hesabı:

$\gamma_o = 980,620 \text{ Gal}$ (45° enlemindeki normal gravite değeri)

Nokta	Geri (mm)	İleri (mm)	g (Gal)	ΔH_i (m)	$g_{ort,i}$ (Gal)	$\Delta H_i(g_{ort,i}-\gamma_o)/\gamma_o$
A	1206	-	980,113	-		
1	2760	960	980,251	0,246	980,182	$-1,099 \times 10^{-4}$
2	2100	1350	980,311	1,410	980,281	$-4,874 \times 10^{-4}$
3	2400	800	980,525	1,300	980,418	$-2,678 \times 10^{-4}$
4	750	1150	980,445	1,250	980,485	$-1,721 \times 10^{-4}$
B	-	225	980,151	0,525	980,298	$-1,724 \times 10^{-4}$
Σ				$\Delta H_{niv}=4,731$		$\delta = -1,210 \times 10^{-3}$

Dinamik yükseklik farkı; $\Delta H^D = \Delta H_{niv} + \delta = 4,731 - 1,210 \times 10^{-3} = 4,7298 \text{ m}$

Ortometrik yükseklik farkı hesabı:

$H_A = 100 \text{ m}$; $H_B = H_A + \Delta H_{niv} = 104,731 \text{ m}$ (yaklaşık)

$\bar{g}_A = g_A + 0,0424 \text{ (Gal/km)} H_A = 980,113 + 0,0424 \times 0,1 = 980,1172 \text{ Gal}$

$\bar{g}_B = g_B + 0,0424 \text{ (Gal/km)} H_B = 980,151 + 0,0424 \times 0,104731 = 980,1554 \text{ Gal}$

$$\Delta H = \Delta H_{niv} + \sum \frac{(g_{ort,i} - \gamma_o)}{\gamma_o} \Delta H_{niv,i} - \frac{(\bar{g}_B - \gamma_o)}{\gamma_o} H_B + \frac{(\bar{g}_A - \gamma_o)}{\gamma_o} H_A$$

$$= 4,731 - 1,210 \times 10^{-3} + 0,0496 - 0,0513 = 4,7281 \text{ m}$$

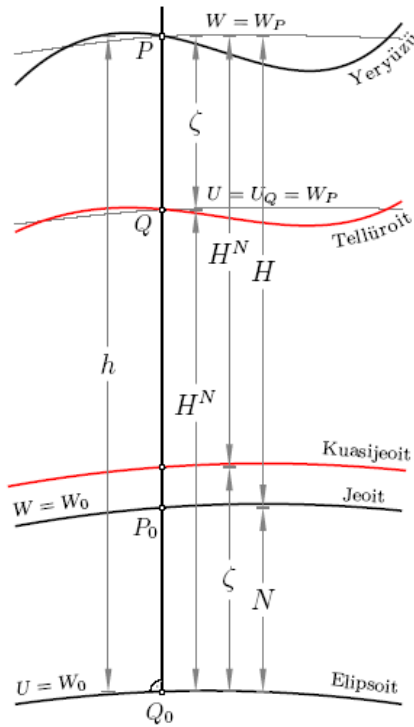
3.2 Pratik Yükseklikler

3.2.1 Normal Yükseklik

Yeryuvarı gravite alanının normal gravite alanı olduğunu yani $W=U$, $g=\gamma$ ve $T=0$ kabul edilsin. Böyle bir varsayıma karşılık gelen ortometrik yüksekliğe **normal yükseklik** denir. Jeopotansiyel yüksekliği C olan bir nokta için normal yükseklik,

$$H^N = \frac{C}{\gamma} \quad (3.13)$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada $\bar{\gamma}$, şekül eğrisi boyunca ortalama normal gravite değeridir; matematiksel olarak –bir yoğunluk bilgisine sahip olmaksızın–doğrudan ve yüksek doğrulukta hesaplanır (Üstün, 2006). Ortometrik yükseklik tanımında geçen gerçek ortalama gravite değeri yoğunluk bilgisini gerektirir; bu nedenle normal yükseklikler uygulamada daha önemlidir.



Şekil 3.3 Normal yükseklik, yükseklik anamolisi, tellüroit ve kuasijeoit (Üstün, 2006)

Fiziksel yeryüzünden normal yükseklik kadar inildiğinde jeoide çok benzeyen; denizlerde onunla çakışık, dağlık bölgelerde ise ondan en çok 2 m kadar sapan bir yüzeye karşılaşılır. Bu yüzeye **kuasijeoit** denir. Kuasijeoit ile elipsoit arasındaki uzaklığa ise **yükseklik anomolisi** (ζ) adı verilir. Yeryüzündeki bir noktadan yükseklik anomolisi kadar inildiğinde ise fiziksel yeryüzüne çok benzeyen başka bir yüzey meydana gelir. Bu yüzeye de **tellüroit** denir.

3.2.2 Normal Ortometrik Yükseklik

Daha önce iki nokta arasındaki jeopotansiyel yükseklik farkının “ $\Delta C = \sum g_{ort,i} \Delta H_{niv,i}$ ” eşitliği ile hesaplandığını, buradan da noktaların jeopotansiyel yüksekliklerine geçildiğinden bahsetmiştik. Gravite değerlerine her zaman ulaşmak mümkün değildir. Eğer bu potansiyel farkı, ortalama normal gravite değeri ile

$$\Delta C' = \sum \gamma_{ort,i} \Delta H_{niv,i}$$

biçiminde hesaplanırsa, bulunacak jeopotansiyel yüksekliğe, **normal jeopotansiyel yükseklik** (C') adı verilir. Bu jeopotansiyel yükseklikten aşağıdaki biçimde tanımlanan yüksekliğe ise **normal ortometrik yükseklik** denir;

$$H^{No} = \frac{C'}{G} \quad , \quad (G = \gamma - 0,3086(H^{No}/2)) \quad (3.14)$$

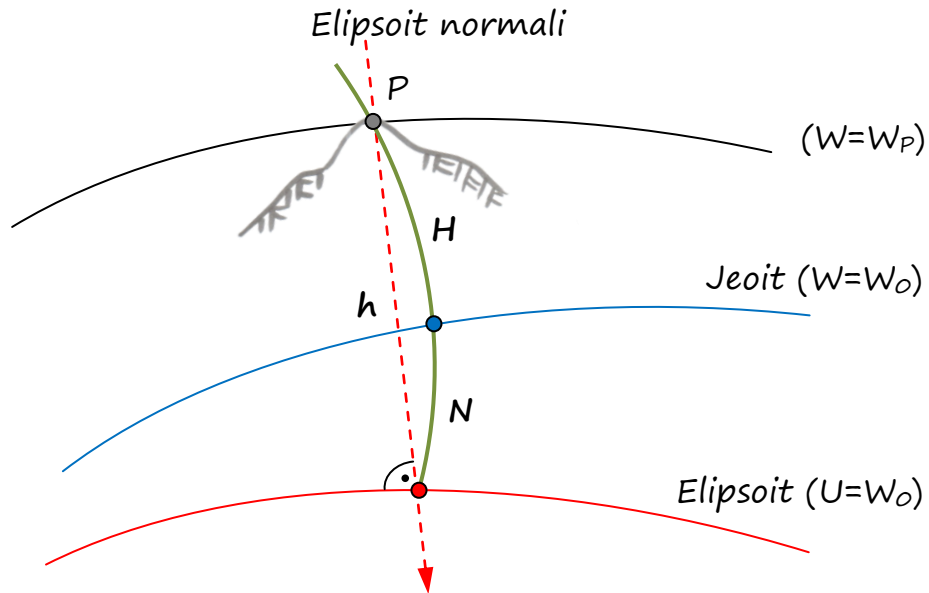
3.2.3 Elipsoidale Yükseklik

Daha önce ifade edildiği gibi bir noktadan elipsoit normali boyunca elipsoide kadar olan mesafe **elipsoidale yükseklik** olarak adlandırılır. Ortometrik yükseklik gibi fiziksel bir anlamı yoktur ancak günümüzde GPS ile elde edilen üçüncü koordinat bilgisi olmasından ötürü pratikte anlamı büyüktür.

Şekil 3.4'de de ifade edildiği gibi elipsoidal yüksekliğe, ortometrik yükseklik (H) ve jeoit yüksekliğinin (N) toplamı ile bir yaklaşımda bulunulabilir;

$$h = H + N \quad (3.15)$$

Bu eşitlik, N biliniyorken, uygulamada kolayca elde edilen elipsoidal yüksekliklerden fiziksel anlamı olan ortometrik yüksekliklere nasıl geçileceğini (" $H = h - N$ " biçiminde) gösterir.



Şekil 3.4 Elipsoidal yükseklik

Yanı sıra bir önceki bölümde ifade edilen yükseklik anomalisi (kuasijeoit ile elipsoit veya fiziksel yeryüzü ile tellüroit arasındaki mesafe) elipsoidal yüksekliğin bir fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi ifade edilir;

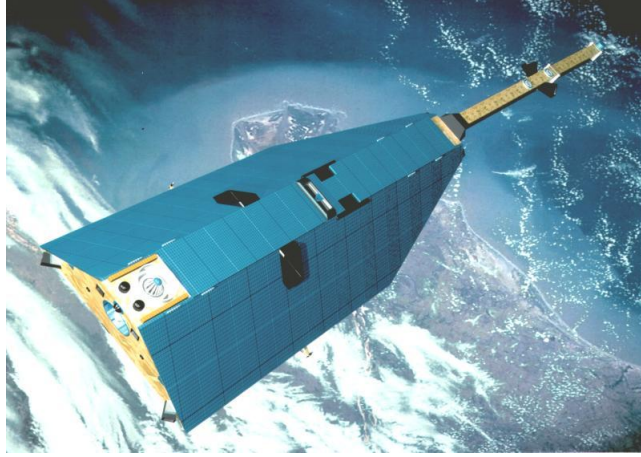
$$\zeta = h - H^N \quad (3.16)$$

4. UYDU GRAVİMETRİSİ ve GLOBAL MODELLER

Yeryuvarı gravite alanı günümüzde CHAMP, GRACE ve GOCE adı verilen alçak yörüngeli uydular (yer merkezinden yaklaşık 400 km uzaktaki-LEO) yoluyla izlenebilmektedir. Bu bölümde CHAMP ve GOCE sistemlerinden bahsettikten sonra GRACE uydu sistemini ve bundan elde edilen sonuçları biraz daha yakından inceleyip, global gravite alanı modellerine değineceğiz.

4.1 CHAMP

2000 yılında yörüngesine (yaklaşık 454 km yüksekliğe) fırlatılan CHAMP (Challenging Minisatellite Payload) uydusu, GFZ (Geoforschungszentrum)-Potsdam (Almanya) tarafından işletilmiş ve 2010 yılında görevini tamamlamıştır.



Şekil 4.1 CHAMP uydusu (<http://op.gfz-potsdam.de/champ/>)

CHAMP uydusunun bilimsel amaçları şöyledir (Hofmann-Wellenhof ve Moritz, 2006);

- Statik yeryuvarı gravite alanının uzun dalga boylu yapısını ve bunun zamansal değişimlerini (atmosferik kütle değişimleri,

okyanus akıntıları ve kutupların erimesinden kaynaklanan deniz seviyesi değişimlerinden oluşan) ortaya çıkarmak,

- Global yer manyetik alanı ve bunun zamansal değişimlerini izlemek ve
- İyonosfer ve troposfer tabakalarını incelemektir.

CHAMP uydusunda ölçme sistemi, uydunun yörüngesinin GPS uyduları yardımıyla izlenmesine ve yörüngesine yer gravite alanından kaynaklanan ivmelenmelerin bir 3 eksenli ivme ölçerle belirlenmesine dayanır. Bozucu ivmelenmeler V potansiyelinin birinci türevlerine karşılıktır. Böylece gravite alanı ortaya çıkarılır. Bunun için nümerik orbit integrasyonu (numerical orbit integration) veya enerji denge prensibi (energy balance principle) kullanılmaktadır.

4.2 GOCE

Eylül 2009 tarihinde yörüngesine oturtulan GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer) Kasım 2013 yılında ömrünü tamamlamıştır. İşletme sorumluluğu ESA'ya (Avrupa Uzay Ajansı) ait olan GOCE sisteminden elde edilen yaklaşık 4 senelik veri günümüzde halen değerlendirilmektedir.



Şekil 4.2 GOCE uydusu (www.esa.int)

GOCE'un en temel amaçlarından birisi, yeryuvarının statik (zamana bağılı olmayan) gravite alanını ve jeoidi oldukça yüksek doğrulukta belirlemektir; tüm yer için

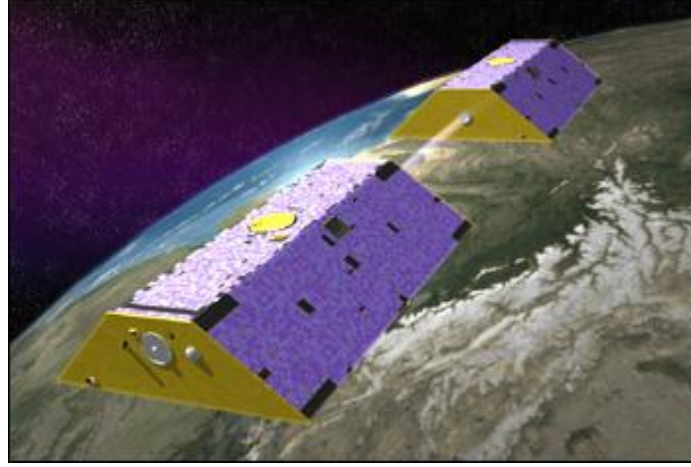
- 1 mGal doğruluğunda gravite anomalisi elde etmek,
- Jeoit doğruluğunu 1-2 cm'ye yükseltmek ve
- Bunları 100 km konumsal çözünürlükte elde etmek

amaçlanmaktadır. Jeodezik açıdan bu amaçlara ulaşarak, GNSS'nin mühendislik çalışmalarında kullanım alanını global anlamda arttırmak, farklı yükseklik sistemlerini birleştirmek ve özellikle alçak yörüngeli uydu yörünge belirlemesi ve prediksyonunu önemli ölçüde geliştirmek sağlanabilecektir.

GOCE ile yeryuvarı gravite alanından kaynaklanan ivmelenmelerin belirlenmesi için bu uyduda gradyometre adı verilen 3 eksenli ivme ölçerlerden oluşan bir sistem bulunmaktadır. Bu ölçerlerin (ya da sensörlerin) ilgili eksenlerindeki farkları yardımıyla ivme değişimleri yani gravite alanı belirlemesi yüksek doğrulukta yapılabilmektedir.

4.3 GRACE

GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment), ağırlıklı olarak yeryuvarı gravite alanının zamansal değişimini belirlemek, kısaca gravite alanını izlemek için tasarlanmış olan bir sistemdir. Alman-Amerikan ortaklığı ile 17 Mart 2002'de yörünge düzlemine (yaklaşık 500 km yükseklikte) yerleştirilen GRACE uydu sisteminin diğer sistemlerden farkı aynı yörüngede birbirlerini 220 ± 50 km mesafeyle izleyen iki adet LEO uydusundan oluşmasıdır. 2015 yılına kadar veri sağlayacağı düşünülmektedir.



Şekil 4.3 GRACE uyduları
(<http://earthobservatory.nasa.gov/Features/GRACE>)

GRACE ile sağlanan veriler üç türdür;

- L1 verisi (Ham veri)
- L2 verisi (Aylık harmonik katsayı modelleri)
- L3 verisi (Su seviyesi değişimlerine dönüştürülmüş, işlenmiş veri)

L2 verisi (güncel olarak Release-5) yani aylık harmonik katsayı modelleri dünyada çeşitli veri merkezleri tarafından yayınlanmaktadır. Bu veri merkezleri şöyledir;

- CSR (Center for Space Research)-Teksas Üniversitesi,
- GFZ (GeoForschung Zentrum)-Potsdam,
- JPL (Jet Propulsion Laboratory)-Pasadena.

GRACE verisi, okyanuslardaki su miktarı değişimleri, buzulların erimesi, yer altı su kaynaklarının incelenmesi vb. kütle değişimi çalışmaları yanı sıra tektonik hareketlerin incelenmesi, jeoit ve gravite değişiminin

izlenmesi gibi birçok farklı alanda kullanılmaktadır. Ancak, GRACE, global ve bölgesel düzeyde meydana gelen hidrolojik değişimlere karşı duyarlılığının yüksek olmasından dolayı, çoğunlukla bu türdeki kütle hareketlerinin yorumlanması çalışmalarında uygulanmaktadır.

GRACE L2 verisinin değerlendirilmesi aşağıda kısaca açıklanmaktadır. Bunun öncesinde uydu gravimetrisinde kullanılan küresel harmonik açınım eşitliğine değinmek gerekmektedir:

4.3.1 Uydu Gravimetrisinde Harmonik Açınım

Uydu gravimetrisinde, (1.27) ile verilen

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m \lambda + B_{nm} \sin m \lambda) L_{nm}(\cos \theta)$$

küresel harmonik açınımda A_{nm} ve B_{nm} katsayıları yerine

$$A_{nm} = (GM) a^n C_{nm} \quad , \quad B_{nm} = (GM) a^n S_{nm} \quad (4.1)$$

eşitlikleri ve $L_{nm}(\cos \theta)$ Legendre fonksiyonu yerine de,

$$P_{nm}(\cos \theta) = \sqrt{\frac{k(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}} L_{nm}(\cos \theta), \quad k = \begin{cases} 1, & m = 0 \text{ ise} \\ 2, & m \neq 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.2)$$

tam normalleştirilmiş Legendre fonksiyonları düşünülür. Burada, a , referans elipsoidi büyük yarı eksen; C_{nm} ve S_{nm} , n . derece ve m . sıradan tam normalleştirilmiş küre harmonik katsayılarıdır. (4.1) harmonik katsayıları ve (4.2) Legendre fonksiyonları, (1.27) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n (GM) a^n (C_{nm} \cos m \lambda + S_{nm} \sin m \lambda) P_{nm}(\cos \theta)$$

$$= \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta) \quad (4.3)$$

çıkar. Bu açılım, seri toplamı $n=1$ 'den başlayacak şekilde düzenlenirse (C_{00} katsayısı çoğunlukla 1'dir), potansiyelin bir başka gösterimi elde edilir;

$$V(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta) \right\} \quad (4.4)$$

Bu eşitlik çekim potansiyelinin küre yaklaşımı (GM/r) ile karşılaştırıldığında, gerçek potansiyelin bu yaklaşım değerinden aslında belli bir oranda saptığı açıkça görülür.

(2.16) eşitliği ile verilen “ $T=W-U$ ” bozucu potansiyel eşitliği de benzer biçimde harmonik açınımla gösterilebilir. T bozucu potansiyeli merkezkaç kuvveti potansiyelini içermez. Çekim potansiyeli harmonik katsayıları (C ve S) ve normal çekim potansiyeli katsayıları (C^U ve S^U) arasındaki

$$\delta C_{nm} = C_{nm} - C_{nm}^U, \quad \delta S_{nm} = S_{nm} - S_{nm}^U \quad (4.5)$$

farklar ile bozucu potansiyel harmonik açılımı, (4.3)'e benzer biçimde,

$$T(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\delta C_{nm} \cos m\lambda + \delta S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta) \quad (4.6)$$

şeklinde elde edilir. İleride gösterilecek global statik gravite alanı modelleri ve GRACE L2 verisi için (4.4) ve/veya (4.6) eşitlikleri kullanılmaktadır.

4.3.2 GRACE L2-Verisinin Değerlendirilmesi

GRACE L2 verisi, Şekil 4.4'deki harmonik katsayılardan oluşan bir metin dosyası ile aylık olarak kullanıcılara sunulur. Burada sigma ile belirtilen sütunlar, ilgili katsayıların standart sapmalarını göstermektedir.

key	L	M	C	S	sigma C	sigma S
gfc	0	0	0.100000000000E+01	0.000000000000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
gfc	1	0	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
gfc	2	0	-4.841691329839e-04	0.000000000000E+00	0.3448E-10	0.0000E+00
gfc	3	0	9.572204006964e-07	0.000000000000E+00	0.3001E-11	0.0000E+00
gfc	4	0	5.399720550624e-07	0.000000000000E+00	0.9066E-12	0.0000E+00
gfc	5	0	0.686277979651E-07	0.000000000000E+00	0.7116E-12	0.0000E+00
...						
gfc	60	58	-.180744690204E-08	0.259713777854E-08	0.9398E-11	0.9410E-11
gfc	59	59	0.207969950477E-08	0.126166293552E-09	0.2657E-11	0.2696E-11
gfc	60	59	-.243677401510E-08	0.815992688034E-09	0.5030E-11	0.5034E-11
gfc	60	60	0.379518420234E-08	-.100855646424E-10	0.3379E-11	0.3433E-11

Şekil 4.4 GRACE Harmonik katsayı dosyası örneği

Belli bir zaman aralığında gravite alanına bağlı değişimler, yani jeopotansiyel değişimleri izlemek için ya bir statik gravite alanı modeli kullanılır ya da GRACE ortalama modeli adı verilen bir model oluşturulur. Aylık çözümlerin bu gravite modelinin katsayılarından farkları, dC ve dS , kullanılarak ilgili jeopotansiyel değişimler incelenir. Bu jeopotansiyel değişimler (4.6) bozucu potansiyelin bir fonksiyonu olarak yazılan,

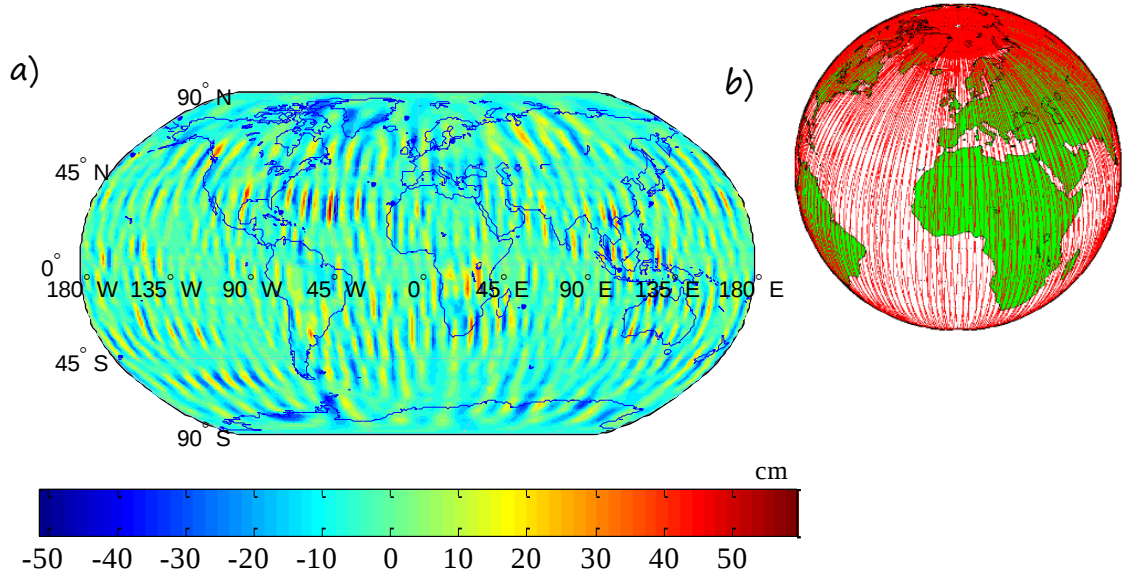
- Eşdeğer Su Kalınlığı (Equivalent Water Thickness),
- Gravite büyüklüğü (çoğunlukla gravite bozukluğu değişimleri yoluyla)
- ve Jeoit yüksekliği değişimleridir.

Örneğin su kalınlığı değişimi,

$$\Delta e(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=2}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n (dC_{nm} \cos m\lambda + dS_{nm} \sin m\lambda) K_n P_{nm}(\cos \vartheta) \quad (4.6)$$

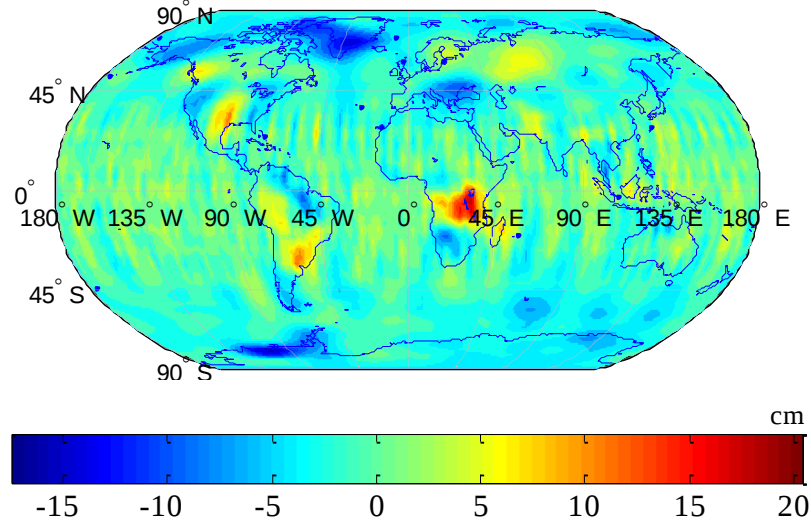
harmonik açılım eşitliği ile incelenebilir. Burada K_n katsayısı, açılımın derecesine bağlı Love yüklenme sayısı da denen bir parametredir.

(4.6) eşitliği biçiminde çalışma bölgesindeki grid noktalarında elde edilen su kalınlığı değişimleri, Şekil 4.5a'da gösterildiği gibi Kuzey-Güney doğrultusunda şeritvari sistematik hatalara sahiptir. Bu sistematik hatalara şerit (**stripes**) denir. Ekvator bölgesinde daha da büyük genliğe ulaşan bu hataların en büyük nedeni, GRACE uydularının izlediği yörünge düzleminden kaynaklanır (bkz., Şekil 4.5b).



Şekil 4.5 a) Su Kalınlığı değişimi; sistematik hatalar (Atayer, 2012) b) GRACE uydu yörüngeleri (Abart, 2005)

Çözümlerde 30 cm genliğine kadar ulaşabilen bu hataların giderilmesi için çeşitli filtreler uygulanır. Bunlardan başlıcaları, yumuşatma filtresi ve korelasyonsuzlaştırma filtresidir. Bu sinyal filtreleme yöntemleriyle sistematik hataların etkileri çözümlerden giderilir. Şekil 4.6, Şekil 4.5a'daki çözüme söz konusu filtreler uygulandıktan sonraki durumu göstermektedir: İzlenmek istenen sinyal net bir şekilde görülmektedir.



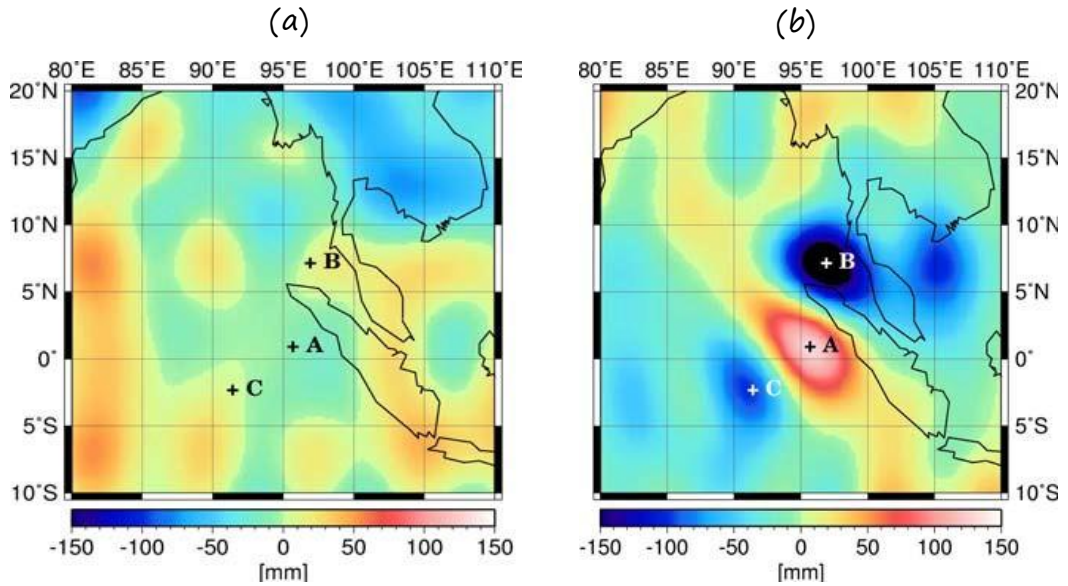
Şekil 4.6 Filtrelenmiş GRACE verisinden elde edilen su kalınlığı değişimi (Atayer ve Aydın, 2012)

Filtre uygulayarak söz konusu hatalar giderilir ancak bir yandan izlenen sinyal de azalır. Yani filtreye bağlı olarak çözünürlük de düşer. Bu nedenle, amaç ve çözünürlük arasında uygun bir denge kuracak stratejiler belirlenir. Yani sıra, veri merkezleri DDK adı verilen önceden filtrelenmiş ve korelasyon etkileri azaltılmış harmonik katsayıları da kullanıcılara sunmaktadır. Bu durumda söz konusu filtreleme yöntemlerini uygulamaya gerek yoktur.

GRACE L2 verisi ile ancak 300 km civarında bir çözünürlük elde edilebilir. Yani bir kenarı bu miktardan daha küçük alanlarda söz konusu sinyal (anomalı) bu veri türü ile ortaya çıkarılamaz. L1 veri türü ile daha yüksek çözünürlük elde edilebilir. Böylece daha küçük bölgelerdeki jeopotansiyel değişimler izlenebilir. Ancak bunun için de ileri bir değerlendirme ve hesaplama yöntem dizisi izlenmelidir.

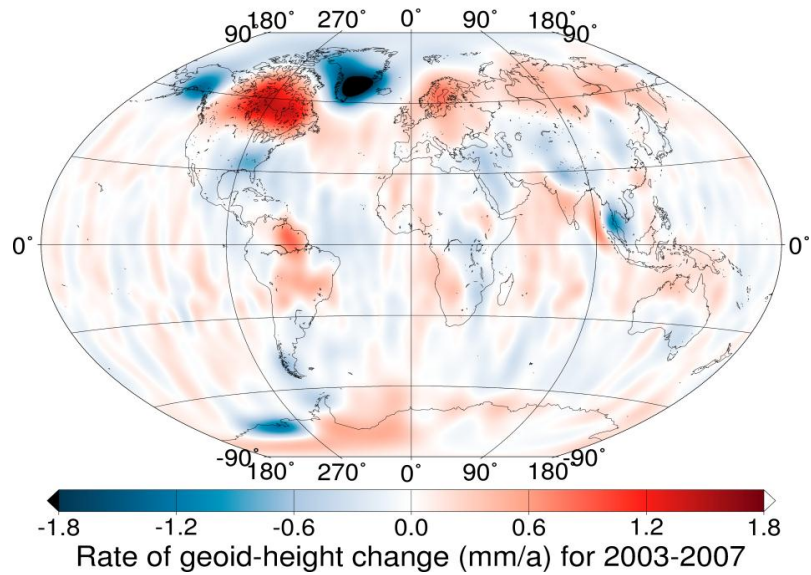
4.3.3 GRACE ile Yapılan Çeşitli Uygulamalar

GRACE ile özellikle büyük oranda kütle değişimine neden olan olaylar gözlenmektedir. Örneğin Aralık 2004 yılında meydana gelen ve tsunami faciasına neden olan Sumatra depreminin etkileri GRACE ile gözlenmiştir (Şekil 4.7).



Şekil 4.7 GRACE ile gözlenen a) Sumatra depremi öncesi su kalınlığı değişimi, b) deprem sonrası su kalınlığı değişimi (Han vd., 2006)

Yanı sıra, 2002 yılından günümüze uzun bir zaman aralığında veri sağlayan GRACE ile, periyodik yapıları giderildikten sonra, ilgili jeopotansiyel değişimlerin yıllık değişim miktarları (yani hızları) kestirilmektedir. Bu hızlar yardımıyla buzulların erimesi, bunun jeoide olan etkileri ve su miktarı değişimleri global ve bölgesel alanlarda analiz edilmektedir. Şekil 4.8, jeoit yüksekliğinde meydana gelen yıllık değişim miktarını ifade etmektedir.



Şekil 4.8 GRACE ile belirlenen yıllık jeoit değişimi (GFZ)

4.4 Global Gravite Alanı Modelleri

Yukarıda açıklanan CHAMP, GRACE ve GOCE uydu sistemleri, yeryuvarı gravite alanının statik kısmının uzun dalga boyuna ilişkin çok önemli bilgi sağlamış/sağlamaktadır. Diğer veri türleri ve/veya yalnızca bu uydu sistemlerinden elde edilen potansiyel büyüklükleri ile yerin gravite alanını ifade eden çözümler, **global gravite alanı modelleri** biçiminde kullanıcılara sunulmaktadır. Bu modellere ilişkin harmonik katsayılar **ICGEM** (International Center for Global Earth Models) web sayfasından ulaşılabilmektedir. İlgili küresel harmonik katsayılar kullanılarak fiziksel yeryüzündeki herhangi bir noktadaki ilgili jeopotansiyel değerler (gravite anomalisi, gravite bozukluğu, jeoit yüksekliği vb.) hesaplanabilir. Bu modellerden bazıları ve bunların Avrupa'daki bazı test noktaları ile karşılaştırılarak elde edilen jeoit yükseklik doğrulukları Çizelge 4.1'de gösterilmektedir.

Çizelge 4.1 Bazı global gravite alanı modelleri (<http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>)

Model	Yıl	Veri	$n_{\max}$	Jeoit Doğruluğu* (cm)
EIGEN-6C3stat	2014	GOCE+GRACE+LAGEOS+ Gravite+Altimetri	1949	21,2 cm
GOCO03S	2012	GOCE+GRACE	250	41,8 cm
EGM2008	2008	GOCE+GRACE Gravite+Altimetri	2190	20,8 cm
EGM96	1996	EGM96S, Gravite+Altimetri	360	47,4 cm

*) Avrupa için geçerli

Global gravite alanı modellerinin bölgesel ve yerel bölgelerde yapılan jeoit modelleme çalışmalarında önemi büyüktür. Çünkü bu modeller sayesinde önceleri pek mümkün olmayan jeoidin uzun dalga boyuna ilişkin yüksek doğrulukta bilgi sağlanmaktadır. Yani jeoidin ana trendi bu modeller yardımıyla belirlenmekte, bu çıkarılmakta, orta ve kısa dalga boyuna yoğunlaşılarak jeoit belirleme işlemi gerçekleştirilmektedir.

ICGEM veri merkezi, bu modeller yardımıyla istenen büyüklükleri (gravite anomalisi, Bouguer gravite anomalisi, jeoit yüksekliği, yükseklik anomalisi vb.) istenen bölgede belli büyüklükteki gridler yardımıyla elde edilmesini sağlayan “Calculation Service” adlı bir online uygulamayı da kullanıcılarla serbest olarak paylaşmaktadır. Bölge için ilgili gridlerdeki değerler hem bir sonuç dosyası olarak sunulmakta hem de ilgili büyüklükler “ps” uzantılı haritalar şeklinde üretilebilmektedir.

model and reference selection	
refsys	WGS84
radiusrefpot	6378137.0
flatrefpot	298.257223563
gmrefpot	3.986004418d+14
omegarefpot	7.292115d-5
model directory	longtime models
modelfile	eigen-gl04c
functional	height_anomaly
tide_system	use unmodified model
zero_degree_term	yes

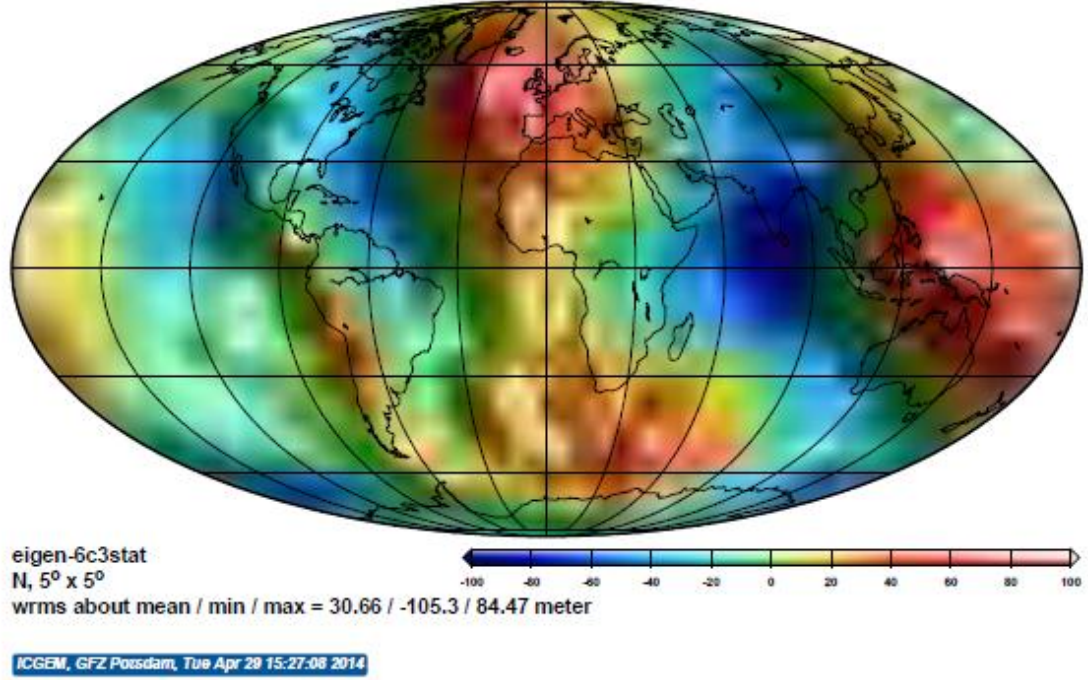
grid selection	
gridstep	5.0
longlimit_west	0
longlimit_east	360
latlimit_south	-90
latlimit_north	90
height_over_ell	0

truncation

Şekil 4.9 ICGEM-Calculation Service online programı

Bununla birlikte, GRACE aylık modellere de buradan ulaşılabilir. Yani sıra ICGEM veri merkezi, “Visualization of Sphrecial Harmonics” uygulamasıyla kullanıcıların küresel yüzey harmoniklerini öğrenmelerini sağlamaktadır. Ayrıca, “Ay”, “Venüs” ve “Mars” için gravite alanı

modellerine yine ICGEM web sayfasından ulaşılabilmektedir!



şekil 4.10 ICGEM Calculation Service kullanılarak elde edilen jeoit haritası

5. JEOİT BELİRLEME

Yeryuvarının matematiksel şekli olan jeoit, bir sinyal olarak ele alınabilir. Bu sinyal, 1) Uzun dalga boylu kısım, 2) Orta dalga boylu kısım ve 3) kısa dalga boylu kısım adı verilen üç parçadan oluşur. Uzun dalga boylu kısım için Bölüm 4.4'de ifade edilen global modellere, orta kısım için topoğrafik kütlelerin dağılımı bilgisine, kısa dalga boylu kısım için ise gravite ölçülerine (daha doğrusu gravite anomalisine) gereksinim vardır. Bu üç bilgi ele alınarak jeoit modelleme işlemi **remove-restore** (RR=önce yok et sonra tekrar yerine koy) adı verilen bir teknikle gerçekleştirilir. Bu teknik, **gravimetrik** olarak adlandırılan “gravite ölçüsüne dayalı” jeoit belirleme yöntemindeki bir takım eksikliklerin giderilmesi için uygulanır. Jeoit belirleme işlemi gravitenin yönü yani çekül sapmaları bileşenleriyle **astrojeodezik** adı verilen yöntemle de gerçekleştirilebilir. Bununla birlikte küçük bölgelerde, elipsoidal yükseklik ile ortometrik yükseklik farkına yani “ $N=h-H$ ” eşitliğine bir yüzey denklemi uydurulması (dengeleyici fonksiyonu belirleme problemi) biçiminde de jeoit modellenebilir. Bu şekilde elde edilen jeoit modeline de **GPS/Nivelman jeoidi** denir. Söz konusu yöntemlere aşağıda değinilmektedir.

5.1 Gravimetrik Yöntem

Stokes (1849), T bozucu potansiyeli için geliştirilen küresel harmonik seri yüzey integralini aşağıdaki biçimde tanımlar;

$$T(\vartheta, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (5.1)$$

Burada, Δg , (2.21) eşitliğine göre elde edilen gravite anomalisi; R , ilk yaklaşım olarak küre kabul edilen yeryuvarı yarıçapı; $d\sigma$, yüzey elemanı; $S(\psi)$, Stokes fonksiyonu ve ψ hesap noktası ile ilgili diğer nokta arasındaki küresel uzunluktur. (2.20) ile verilen Bruns eşitliğinin düşünülmesiyle, jeoit yüksekliği için

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_E} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (5.2)$$

elde edilir. Bu yöntem, “ $\Delta g = g_j - \gamma_E$ ” gravite anomalilerine dayandığı için **gravimetrik yöntem** olarak adlandırılır.

Yöntem ile doğru sonuçlar elde edebilmek için, **jeoit yüzeyinin tüm noktalarında** gravite değerlerine (g_j) yani buradan elde edilecek Δg 'ye ihtiyaç vardır. Bu ise mümkün değildir. Çünkü, bu, 1) sonsuz anlamda gravite ölçüsünü ve 2) fiziksel yeryüzü ile jeoit arasında mükemmel bir kütle yoğunluğu bilgisini gerektirir. Bununla birlikte, kullanılan küre yaklaşımı her 100 metre jeoit yüksekliği için 30 cm'lik (veya her 1 metre için 3 mm'lik) bir hataya yol açar. Bu nedenle, (5.2)'nin doğrudan bu şekliyle ele alınması pratikteki problemler açısından uygun değildir. Bu amaçla, **remove-restore** (RR=önce yok et sonra tekrar yerine koy) adı verilen bir teknik uygulanır.

RR tekniğinde, Δg gravite anomalisi ve N jeoit yüksekliği uzun, orta ve kısa dalga boylu kısımlara bölünür. Önce, **artık gravite anomalisi** bulunur;

$$\Delta g_R = \Delta g' - \Delta g_H - \Delta g_{GM} \quad (5.3)$$

Burada, $\Delta g'$, “ $g - dg_S - \gamma_E$ ” şeklinde bulunan **serbest hava gravite anomalisi**; Δg_H , “ dg_B -Arazi Düzeltmesi” ile elde edilen **dolaysız topoğrafik etki** ve Δg_{GM} , global bir gravite alanı modeli kullanılarak ilgili noktada hesaplanan gravite anomalisi değeridir (Not: Eğer (2.25) eşitliğine ilgili arazi düzeltmesi de getirilerek, jeoit üzerindeki gravite değeri “ $g_j = g - dg_S - dg_B + \text{Arazi Düzeltmesi}$ ” biçiminde hesaplanıyor ve Δg gravite anomalisi bulunuyorsa, bu, (5.3)'de geçen “ $\Delta g' - \Delta g_H$ ” farkına eşittir). (5.3)'den elde edilen artık gravite anomalisi (5.2)'de düşünülerek,

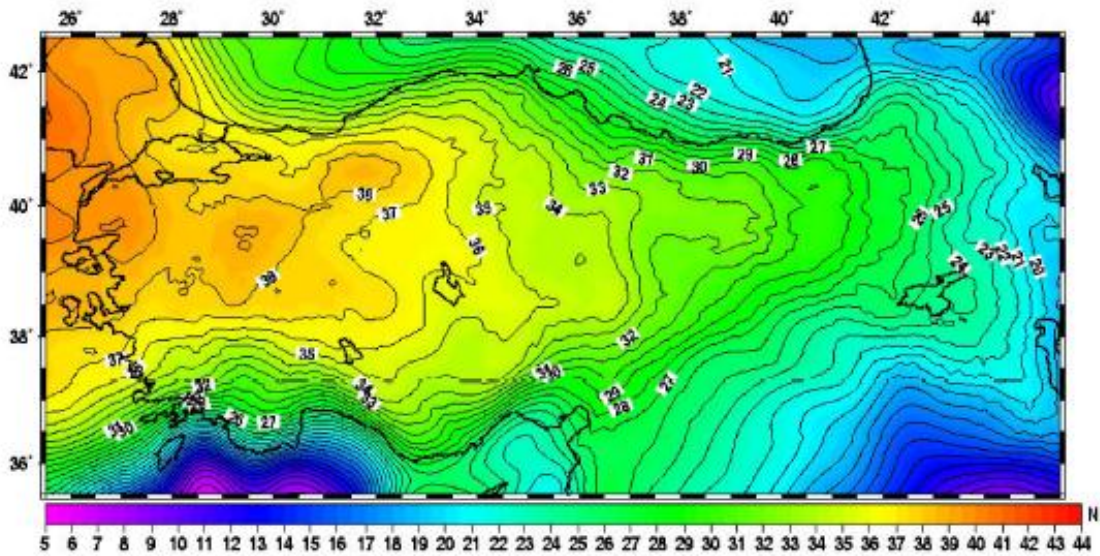
$$N_R = \frac{R}{4\pi\gamma_E} \iint_{\sigma} \Delta g_R S(\psi) d\sigma \quad (5.4)$$

hesaplanır. Daha sonra, (5.3)'de çıkarılan kısımların jeoit yüksekliklerindeki karşılıkları, yani, sırasıyla, N_H (dolaysız arazi etkisi) ve N_{GM} (global modelden bulunan jeoit yüksekliği) (5.4)'den bulunan artık jeoit yüksekliğine eklenerek,

$$N = N_R + N_H + N_{GM} \quad (5.5)$$

istenilen jeoit yüksekliği hesaplanır. (5.5)'de geçen N_H , sayısal arazi modelinden bir seri toplamı yardımıyla hesaplanır (bkz. Erol, 2007).

RR tekniği ile sınırlı bir alandaki gravite verisiyle jeoit yükseklikleri için uygun doğrulukta sonuçlar elde edilir. Genellikle her ülke kendi jeoit modelini yukarıda kısaca açıklanan bu tekniğe göre modeller. Ülkemiz için oluşturulan TGO3'ün (Türkiye Ulusal Jeoidi-2003) önemli bir parçası bu şekilde üretilmiştir; doğruluğu yaklaşık 10 cm civarındadır.



Şekil 5.1 Türkiye Ulusal Jeoidi-2003 (Kılıçoğlu vd. 2004)

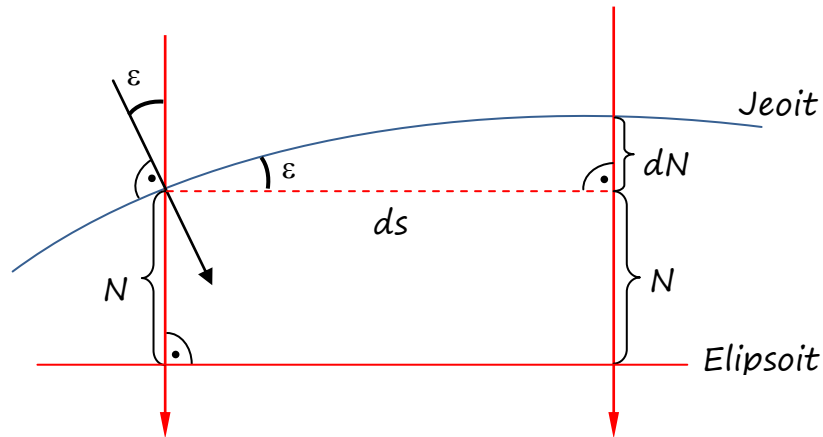
5.2 Astrojeodezik Yöntem

Bu yöntemde gravite anomalisi yani gravite ivmesinin büyüklüğünden değil yönünden yani çekül sapması bileşenlerinden yararlanılarak jeoit yüksekliği belirlenir.

Fiziksel yeryüzünde bir noktada (Laplace noktasında) astronomik (Φ ve Λ) ve jeodezik (φ ve λ) koordinatları belirlenmişse, (2.13) eşitliğine göre çekül sapmasının Kuzey-Güney bileşeni ($\xi=\Phi-\varphi$) ve Doğu-Batı bileşeni de ($\eta=(\Lambda-\lambda)\cos\varphi$) belli demektir. Bunun α azimutu boyunca bileşeni ise “ $\varepsilon=\xi\cos\alpha+\eta\sin\alpha$ ” eşitliği ile verilmişti. Bu çekül sapması bileşeninin o noktadan geçen çekül eğrisinin jeoidi deldiği noktadaki bileşene eşit olduğunu varsayalım. Bu noktanın jeoit yüksekliği N olsun. Bu noktadan α azimutu boyunca ds kadar az uzaktaki bir noktanın jeoit yüksekliği “ $N+dN$ ” dir: Aradaki bu küçük fark, Şekil 5.2’den bulunan “ $\tan\varepsilon=dN/ds$ veya $\varepsilon=dN/ds$ ” eşitliğine göre

$$dN=\varepsilon ds \quad (5.6)$$

kadardır.



Şekil 5.2 Astronomik nivelman

Şimdi jeoit yüksekliği bilinen bir A noktasından sabit bir azimut boyunca diferansiyel anlamda birbirine yakın noktalarda Şekil 5.2’deki

gibi ε bileşenlerinin bilindiğini, B noktasına ulaşıldığını düşünelim: İki nokta arasındaki jeoit yükseklik farkı, (5.6) eşitliğinden

$$N_B - N_A = \int_A^B dN = \int_A^B \varepsilon ds = \sum \varepsilon \Delta s \quad (5.7)$$

biçiminde elde edilir; böylece B noktasının jeoit yüksekliği bulunur.

(5.7) eşitliği nivelman işlemine benzediği için bu yöntem **Helmert astronomik nivelmanı** olarak da adlandırılır. Yöntemin inceliği iki nokta arasındaki profil boyunca çekül sapması bileşenlerinin birbirine çok yakın noktalarda bilinmesini gerektirir. Bu ise, astrojedefik ölçülerin yapılmasının zor olmasından dolayı, çekül sapmalarının ilgili profil boyunca interpolate edilmesi ile sağlanır. Bu amaçla geliştirilmiş interpolasyon yöntemleri şöyledir; 1) Başucu açısı ölçüleri yardımıyla interpolasyon, 2) Torsiyon terazisi kullanımı, 3) Astrogravimetrik nivelman ile interpolasyon, 4) Topoğrafik-izostatik çekül sapmaları ile interpolasyon.

Bununla birlikte noktaların aynı enlemde alınması durumunda, azimut 90° ve çekül sapması bileşeni ise $\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha = \eta$ olur. Buna göre (5.7) eşitliği,

$$N_B - N_A = \sum \eta \Delta s \quad (\text{Doğu-Batı Kesiti}) \quad (5.8a)$$

şekline dönüşür. Aynı boylamda alınması durumunda ise, $\varepsilon = \xi$ olacağından,

$$N_B - N_A = \sum \xi \Delta s \quad (\text{Kuzey-Güney Kesiti}) \quad (5.8b)$$

elde edilir. (5.8) eşitlikleri uygulamada kolaylık sağlar.

Yanı sıra, yukarıdaki eşitliklerde çekül sapması bileşenleri jeoit üzerinde ele alınmıştır. Gerçekte bunlar fiziksel yeryüzündeki

koordinatlara göre elde edilir. Bunları jeoide indirgemeden, (5.7) eşitliğine (veya (5.8) eşitliklerine) (3.12)'de verilen ortometrik düzeltmeyle aynı olan gravite düzeltmesi getirilir;

$$N_B - N_A = \sum \varepsilon \Delta s + \text{gravite düzeltmesi} \quad (5.9)$$

Böylece ε 'ların jeoide indirgenmesine gerek kalmadan, astronomik nivelman işlemi gerçekleştirilir.

Helmert astronomik nivelman yöntemi N 'yi g 'nin yönüyle, bir önceki bölümde verilen gravimetrik yöntem ise N 'yi g 'nin (veya Δg 'nin) büyüklüğü ile belirler. Helmert eşitliğinde, integral bir profil boyuncadır. Bu nedenle, sınırlı bir alanda çekül sapmasının bilinmesi yeterlidir. Ancak bu yöntem yalnız karada kullanılabilir. Gravimetrik yöntem ise ilgili gravite bilgisinin olması durumunda tüm yeryuvarı için olan çalışmaya uygundur. Bu nedenle astrojeodezik yöntem, astronomik koordinat belirleme işleminin zorluğu ve karada profil-profil uygulanması gerekliliği nedenleriyle genellikle jeoidin ölçeklendirilmesi amacıyla kullanılır.

5.3 GPS/Nivelman Yöntemi (Geometrik Yöntem)

Bu yöntem küçük alanlarda jeoit modeli oluşturmak için kullanılır. Belli sayıda noktada hem elipsoidal yükseklik (h) hem de ortometrik yükseklik (H) bilgisi bulunuyorsa, bu noktalarda elde edilecek " $N=h-H$ " jeoit yükseklikleri için

$$N = \sum a_{ij} x^i y^j = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots \quad (5.10)$$

yüzey polinomu öngörülür. Burada x ve y , noktaların dik koordinatlarıdır.

Polinomun belirlenmesi için en küçük kareler dengelemesi gerçekleştirilir. n sayıda nokta için düzeltme denklemleri, örneğin 2. dereceden yüzey için ($n > 6$),

$$N_1+V_1= a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}y_1+a_{20}x_1^2+a_{11}x_1y_1+a_{02}y_1^2,$$

...

$$N_n+V_n= a_{00}+a_{10}x_n+a_{01}y_n+a_{20}x_n^2+a_{11}x_ny_n+a_{02}y_n^2,$$

şeklinde oluşturulur. Burada a katsayıları bilinmeyen olarak ele alınır. Matris düzeninde bu düzeltme denklemleri,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{bmatrix}}_I + \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}}_V = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_n^2 & x_ny_n & y_n^2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{20} \\ a_{11} \\ a_{02} \end{bmatrix}}_x \quad (5.11)$$

şeklinde ifade edilebilir. $v=Ax-I$ yapısındaki düzeltme denklemleri ve $P=I$ ağırlık matrisi ile normal denklemler ($A^TPAx-A^TPI=0$) oluşturulur. Normal denklemlerin çözümünden bilinmeyenler vektörü " $x=(A^TPA)^{-1}A^TPI$ " elde edilir. Buradan v düzeltme vektörü hesaplanarak, düzeltmelerin kareleri toplamı (v^Tv), bir ölçünün standart sapması ($s=\sqrt{v^Tv/(n-6)}$) ve parametrelerin standart sapmaları (s_i ; $i=a_{00},...,a_{02}$) hesaplanır. Yüzey polinomunun bölgede yapılacak çalışmalarda kullanılabilmesi için elde edilen parametrelerin anlamlı olup olmadıklarının test edilmesi gerekir. Bu amaçla, her bir parametre için aşağıdaki test büyüklüğü hesaplanır;

$$T=\frac{|a|}{s_a} \quad (5.12)$$

T test büyüklüğü t-dağılımının α yanılma olasılığına karşılık güven sınırı değeri " $t_{n-6,1-\alpha/2}$ " den büyükse ilgili parametrenin anlamlı olduğuna karar verilir. Eğer anlamlı olmayan parametreler varsa bunlar ilgili modelden çıkarılır; yeni bir dengeleme yapılarak geriye kalan parametreler anlamlı oluncaya kadar işlemler tekrarlanır.

Bölge için geçerli bir jeoit modelinin yukarıdaki biçimde elde edilmesiyle, bölgenin içinde x ve y koordinatları bilinen herhangi bir noktanın jeoit yüksekliği ilgili modelden belirlenir.

Not 5.1: Bölge için dik koordinatlar büyük değerler olabilir (örneğin, Gauss-Krüger koordinatları; x_g ve y_g). Bunlarla çalışmak, yukarıdaki dengeleme modelinde nümerik hatalara neden olur. Bu nedenle, modelde katsayı olarak geçecek x ve y koordinatlarına

$$x = \frac{x_g - \bar{x}_g}{1000} \quad \text{ve} \quad y = \frac{y_g - \bar{y}_g}{1000} \quad (\bar{x}_g \text{ ve } \bar{y}_g; \text{ ağırlık merkezi koordinatları})$$

şeklinde geçiş yapılır; yani, koordinatlar küçültülür. **Modelin tespitinden sonra** bölge için ilgili ağırlık merkezi koordinatları da verilir. Bunlar yardımıyla jeoit yüksekliği **modelden** belirlenecek noktaların x ve y koordinatları hesaplanarak, bulunan modelden jeoit yükseklikleri elde edilir.

Kaynaklar

- Abart, C., (2005). Assessment of Solution Strategies for GRACE Gravity Field Processing, Yüksek Lisans Tezi, Graz University of Technology, Graz.
- Atayer, E.S., (2012). Yeryuvarı Gravite Alanının Aylık GRACE Çözümleri ile İzlenmesi ve Duyarlılığı üzerine bir İnceleme, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Atayer, E.S. ve Aydın, C., (2012). GRACE RLO4 ve RLO5 Sürümlerinin Hız Alanında Karşılaştırılması, TUJK 2012 Çalıştay- Yerel Jeoitlerin Belirlenmesi, 29-30 Kasım, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon.
- Aydın, C., (2007). Marmara Bölgesi Gravite Değişimlerinin Belirlenmesi için Model Tasarımı, Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Barthelmes, F., (2009). Definition of Functionals of the Geopotential and Their Calculation from Spherical Harmonic Models, Scientific Technical Report STRO9/02, GFZ Helmholtz-Zentrum Potsdam, Germany.
- Erol, B., (2007). Investigations on Local Geoids for Geodetic Applications, Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Han, S.-C., Shum, C.K., Bevis, M., Ji, C. ve Kuo, C.-Y., (2006). Crustal Dilatation Observed by GRACE After the 2004 Sumatra-Andaman Earthquake, Science, 313: 658-662.
- Heiskanen W.A. ve Moritz H., (1967). Physical Geodesy, Freeman, San Francisco, London; Çeviren: Gürkan, O., (1984), Fiziksel Jeodezi, KTÜ Matbaası, Trabzon.
- Hofmann-Wellenhof, B. ve Moritz, H., (2006). Physical Geodesy, Second Edition, Springer, Wien-Newyork.
- Kılıçoğlu, A., Fırat, O., Demir, C., (2004). The new gravimetric geoid model for Turkey (TGO3), IAG International Symposium, Gravity, Geoid and Space Missions. Book of Abstracts, Porto, Portugal.
- Torge, W., (2001). Geodesy, 3rd Edition, Walter de Gruyter, Berlin.
- Torge, W., (1989). Gravimetry, Walter de Gruyter, Berlin.
- Üstün, A., (2006). Fiziksel Jeodezi, Lisans Ders Notları, Selçuk Üniversitesi, Konya.