



Trigonometrik Nivelman Ağ Dengelemesi

Prof. Dr. U. Doğan & Prof. Dr. C. Aydın

YTÜ-Harita Mühendisliği Bölümü, Jeodezi Anabilim Dalı
İstanbul, Mart 2021

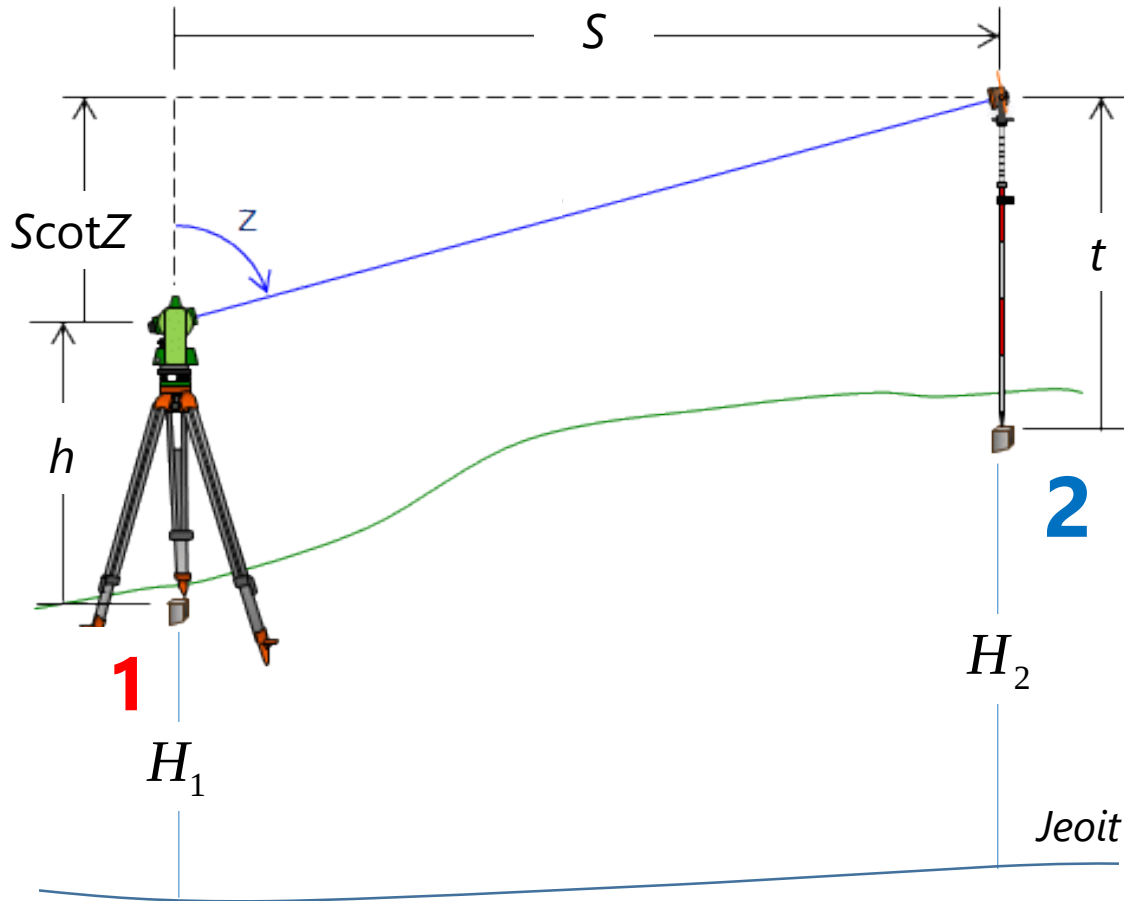
Trigonometrik Nivelman

- Yatay kontrol ağlarında noktaların çoğunlukla ulaşımı zor olan yerlerde bulunmasından dolayı geometrik nivelman yönteminin uygulanması zordur ve ekonomik değildir.
- Bu noktalar arasındaki yükseklik farkları genellikle trigonometrik nivelman yöntemiyle belirlenir.
- Trigonometrik nivelman **düşey açı** gözlemlerine dayanır.
- Noktalar arasındaki uzunluklar büyük olduğundan kırılma ve yeryuvarının küresellik etkisinin göz önüne alınması gerekir.

Trigonometrik Nivelman

- Trigonometrik nivelman ağlarının dengelenmesinde 2 yöntem bulunur:
- ✓ Düşey açılar ölçü olduğuna göre yazılan düzeltme denklemleriyle çözüm
- ✓ Yükseklik farkları ölçü olduğuna göre yazılan düzeltme denklemleriyle çözüm

Trigonometrik Nivelman



Bakılan 2 noktasının yüksekliği:

$$H_2 = H_1 + S \cot Z + h - t + K$$

Alet yüksekliği

Hedef (işaret) yüksekliği

Yeryuvarı eğriliği ve kırılma etkisi

$$K = \frac{0.87}{2 \times (6373 \times 10^3)} S^2$$

Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Düşey Açılar* Ölçü Olduğuna Göre Düzeltme Denklemleri

$$H_2 = H_1 + S \cot Z + h - t + K$$



*Düşey Açı **Ölçü** olduğu için*



$$H_2 = H_1 + S \cot(Z + v_Z) + h - t + K$$



Taylor Açılımına göre doğrusallaştırma yapılır



Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Düşey Açılar* Ölçü Olduğuna Göre Düzeltme Denklemleri

$$H_{2,0} + \delta H_2 = H_{1,0} + \delta H_1 - \frac{S}{\rho \sin^2 Z} v_Z + S \cot Z + h - t + K$$

2'nin yaklaşık yüksekliği

1'in yaklaşık yüksekliği

$$\frac{S}{\rho \sin^2 Z} v_Z = \delta H_1 - \delta H_2 + \overbrace{(S \cot Z + h - t + K)}^{\Delta H_{12}} - \overbrace{(H_{2,0} - H_{1,0})}^{\Delta H_{12,0}}$$



Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Düşey Açılar* Ölçü Olduğuna Göre Düzeltme Denklemleri

Düşey açılar (Z'ler) ölçü olduğuna göre düzeltme denklemleri

$$v_Z = \underbrace{\left(\rho \frac{\sin^2 Z}{S} \right)}_{\text{Durulan Nokta}} \delta H_1 - \underbrace{\left(\rho \frac{\sin^2 Z}{S} \right)}_{\text{Bakılan Nokta}} \delta H_2 + \left(\rho \frac{\sin^2 Z}{S} \right) (\Delta H_{12} - \Delta H_{12,0})$$

Z'den bulunan yükseklik farkı *Yaklaşık yüksekliklerden bulunan yükseklik farkı*



Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Düşey Açılar* Ölçü Olduğuna Göre Düzeltme Denklemleri

Düşey açılar (Z'ler) ölçü olduğuna göre dengelemede ağırlıklar

$$P_Z = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_Z^2}$$

→ Birim ağırlıklı ölçünün varyansı

→ Z düşey açı ölçüsünün varyansı



Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Yükseklik Farkları* Ölçü Olduğuna Göre Düzeltme Denklemleri

$$H_2 = H_1 + S \cot Z + h - t + K$$



$$\Delta H_{12} = S \cot Z + h - t + K$$

Z'den hesaplanan bu yükseklik farkı ölçü olarak alınır.



Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Yükseklik Farkları* Ölçü Olduğuna Göre Düzeltme Denklemleri

$$\Delta H_{12} + v_{\Delta H_{12}} = \delta H_2 - \delta H_1 + (H_{2,0} - H_{1,0})$$



$$v_{\Delta H_{12}} = \underbrace{\delta H_2}_{\text{Bakılan Nokta}} - \underbrace{\delta H_1}_{\text{Durulan Nokta}} + (\Delta H_{12,0} - \Delta H_{12})$$

Bakılan Nokta *Durulan Nokta*



Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Yükseklik Farkları* Ölçü Olduğuna Göre Düzeltme Denklemleri

Yükseklik Farkları (Δ 'lar) ölçü olduğuna göre dengelemede ağırlıklar

$$P_{\Delta H_{12}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\Delta H_{12}}^2}$$

→ Birim ağırlıklı ölçünün varyansı

→ Yükseklik farkının varyansı

$$\sigma_{\Delta H_{12}}^2 = \frac{S^2}{\rho^2 \sin^4 Z} \sigma_Z^2$$

Yükseklik farkları ölçü olduğuna göre yapılan dengelemede, ΔH 'ların varyanslarını düşey açı varyanslarından bu şekilde hesaplamak gerekir. Bu varyanslar ile her bir yükseklik farkının ağırlığı (P) bulunur.

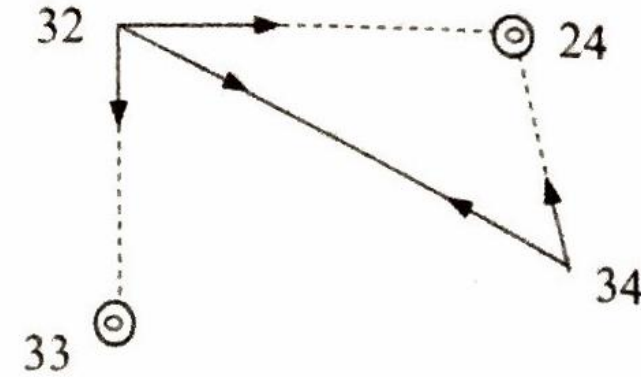


Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Uygulama-1* (Demirel H, 2009)

UYGULAMA-1

Yandaki şekilde işaretli doğrultularda düşey açılar ölçülmüştür. Z_{ik} düşey açı ölçüleri, alet yüksekliğindeki yatay uzunluklar (S_{ik}), alet yükseklikleri (h), işaret yükseklikleri (t) aşağıda verilmektedir.

Bilinen yükseklikler (sabit): $H_{24} = 1274.086$ m
 $H_{33} = 1566.792$ m



DN	BN	Z (gon)	σ_Z (mgon)	S (m)	h (m)	t (m)
32	24	107.3617	1.50	3538.710	1.58	1.40
	34	110.9464	1.50	3610.579	1.58	1.40
	33	102.1894	1.50	3438.562	1.58	1.40
34	32	89.0887	0.75	3610.579	1.46	1.40
	24	95.7618	0.75	3226.606	1.46	1.40

Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Uygulama-1 (Demirel H, 2009)*

ÇÖZÜM:

ÖLÇÜ SAYISI: $n = 5$ adet düşey açı (ya da 5 adet yükseklik farkı)

BİL. SAYISI : $u = 2$ adet noktanın yüksekliği

SERBESTLİK DERECEİ: $f = n - u = 5 - 2 = 3 > 0$ **DENGELEME YAPILABİLİR**



Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: Uygulama-1 (Demirel H, 2009)

Katsayı ve -l hesabı:

$$S \cot Z + h - t + K$$

İki önceki sütun
elemanlarının
çarpımından bulunur.

DN	BN	S Cot Z (m)	K (m)	ΔH_0 (m)	ΔH (m)	$\Delta H - \Delta H_0$ (cm)	$\rho \sin^2 Z / S$ (mgon/cm)	-l (mgon)
32	24	-411.0407	0.8547	-410.0060	-410.0060	0	0.1775	0
	34	-627.0149	0.8898	-625.9009	-625.9451	-4.42	0.1712	-0.7567
	33	-118.3023	0.8070	-117.3000	-117.3153	-1.53	0.1849	-0.2829
34	32	624.9643	0.8898	625.9009	625.9141	1.32	0.1712	0.2260
	24	215.1243	0.7106	215.8949	215.8949	0	0.1964	0

Bu sütun ΔH 'lar hesaplandıktan sonra
elde edilen yaklaşık yüksekliklerden bulunur. Bu yükseklikler şöyledir:

$$H_{32,0} = H_{24} - \Delta H_{32,24} = 1684.0920 \text{ m}$$

$$H_{34,0} = H_{24} - \Delta H_{34,24} = 1058.1911 \text{ m}$$



Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Uygulama-1 (Demirel H, 2009)*

Düzeltilme Denklemleri: $\rho \frac{\sin^2 Z}{S}$ katsayıları yerine konur.

Durulan Nokta için aynısı,
Bakılan Nokta için tersi

	δH_{32}	δH_{34}	$-l$ (mgon)
$V_{32,24}$	0.1775	0	0
$V_{32,34}$	0.1712	-0.1712	-0.7567
$V_{32,33}$	0.1849	0	-0.2829
$V_{34,32}$	-0.1712	0.1712	0.2260
$V_{34,24}$	0	0.1964	0

A

-l

Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Uygulama-1 (Demirel H, 2009)*

Ağırlık Matrisi: $\mathbf{P} = \text{diag}(1 \ 1 \ 1 \ 4 \ 4)$

Normal Denklemler ve Çözümü:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.2122 & -0.1465 \\ -0.1465 & 0.3008 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \begin{bmatrix} 0.3366 \\ -0.2843 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 7.0995 & 3.4584 \\ 3.4584 & 5.0087 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1.4066 \\ -0.2599 \end{bmatrix} \text{ (cm)}$$

Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Uygulama-1 (Demirel H, 2009)*

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{l} \Rightarrow \mathbf{v} = [0.25 \ -0.47 \ -0.02 \ -0.06 \ -0.05]^T \text{ (mgon)}$$

$$[P_{vv}] = 0.31 \quad , \quad [P_{vv}] = [P \ 1 \ 1] - \mathbf{n}^T \mathbf{x} = 0.86 - 0.55 = 0.31 \text{ mgon}^2$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{[P_{vv}]}{n - u}} = \sqrt{\frac{0.31}{5 - 2}} = 0.32 \text{ mgon}$$

Dengeli yükseklikler ve standart sapmaları:

j	$H_j = H_{j0} + \delta x \text{ (m)}$	$s_{H_j} = s_0 \sqrt{Q_{H_j H_j}} \text{ (cm)}$
32	1684.1061	0.86
34	1058.1885	0.72

Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Uygulama-1 (Demirel H, 2009)*

Dengeli Ölçüler ve Dengelemenin Denetimi:

i	k	$\bar{Z}_{ik} = Z_{ik} + v_{ik}$	$H_k - H_i$	$S_{ik} \cot \bar{Z}_{ik} + h_i - t_k + K_{ik}$
32	24	107.36195	- 410.0200	- 410.0200
	34	110.94593	- 625.9176	- 625.9175
	33	102.18938	- 117.3141	- 117.3140
34	32	89.08864	625.9176	625.9176
	24	95.76175	215.8975	215.8975

↓
Dengeli düşey açılar

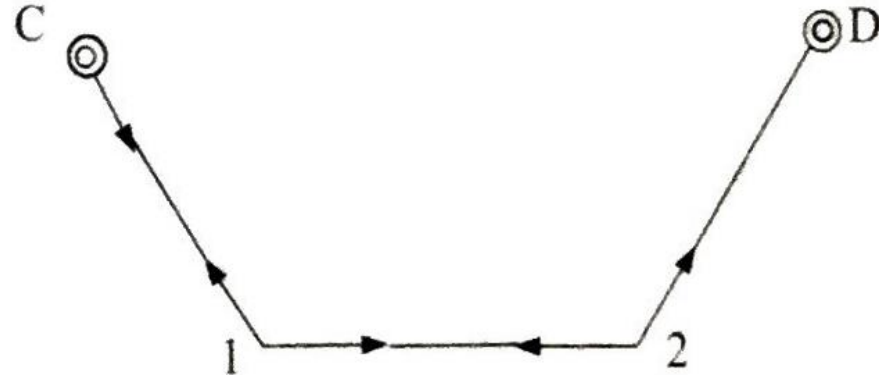
↓
Dengeli yükseklik farkları



Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Uygulama-2 (Demirel H, 2009)*

UYGULAMA-2 1 ve 2 noktalarının yüksekliklerini belirlemek için okla belirtilen doğrultularda düşey açılar ölçülmüştür. Alet ve işaret yükseklikleri eşittir. Düşey açı ölçüleri (Z) ve alet yüksekliği için geçerli yatay uzunluklar (S) aşağıda veriliyor.

DN	BN	Z (gon)	S (m)
C	1	105.1234	2516.48
1	C	94.8990	2516.48
1	2	102.3522	1310.92
2	1	97.6573	1310.92
2	D	98.0964	1846.74



C ve D noktalarının yükseklikleri; $H_C = 876.480$ m ve $H_D = 681.100$ m (sabit).

Ölçüler, hesaplanan yükseklik farkları olduğuna göre 1 ve 2 noktalarının dengeli yüksekliklerini ve standart sapmalarını bulunuz. Sonuçları denetleyerek dengelemenin doğru olup olmadığını belirtiniz.

Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Uygulama-2 (Demirel H, 2009)*

ÇÖZÜM:

ÖLÇÜ SAYISI: $n = 5$ adet düşey açı (5 adet yükseklik farkı)

BİL. SAYISI : $u = 2$ adet noktanın yüksekliği

SERBESTLİK DERECEİ: $f = n - u = 5 - 2 = 3 > 0$ **DENGELEME YAPILABİLİR**



Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Uygulama-2 (Demirel H, 2009)*

Yaklaşık nokta yükseklikleri; $H_{1,0} = H_C + S_{C1} \cot Z_{C1} + K_{C1} = 673.9518 \text{ m}$

$$H_{2,0} = H_D - S_{2D} \cot Z_{2D} - K_{2D} = 625.6303 \text{ m}$$

Katsayı ve -I hesabı:

DN	BN	S cot Z (m)	K (m)	ΔH_0 (m)	ΔH (m)	$\Delta H_0 - \Delta H$ (mm)
C	1	-202.9601	0.4319	-202.5282	-202.5282	0
1	C	202.0689	0.4319	202.5282	202.5008	27.4
1	2	-48.4583	0.1172	-48.3215	-48.3411	19.6
2	1	48.2624	0.1172	48.3215	48.3796	-58.1
2	D	55.2371	0.2326	55.4697	55.4697	0

Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Uygulama-2 (Demirel H, 2009)*

Düzeltilme Denklemleri:

	δH_1	δH_2	-1	$P = 1/S_{km}^2$
$V_{C,1}$	1	0	0	0.16
$V_{1,C}$	-1	0	27.4	0.16
$V_{1,2}$	-1	1	19.6	0.58
$V_{2,1}$	1	-1	-58.1	0.58
$V_{2,D}$	0	-1	0	0.29

*Hata Kuramı ve Parametre Kestirimi dersinde öğretildiği gibi yapılmış!
Ancak gerçek bir uygulamada Z'lerin standart sapmalarından 11 no'lu
yansıda belirtildiği gibi hesaplanmalıdır.*

**Bu noktada şunu da belirtmek gerekir: Söz konusu ağırlık yaklaşımı oldukça yeterlidir (sinZ'nin dördüncü kuvveti!)*

Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Uygulama-2 (Demirel H, 2009)*

Normal Denklemler ve Çözümü:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.48 & -1.16 \\ -1.16 & 1.45 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \begin{bmatrix} 49.45 \\ -45.07 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.8116 & 1.4493 \\ 1.4493 & 1.8491 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 24.2637 \\ -11.6711 \end{bmatrix} (\text{mm})$$

Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Uygulama-2 (Demirel H, 2009)*

Düzeltilmeler ve birim ağırlıklı ölçünün standart sapması:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{l} \Rightarrow \mathbf{v} = [24.26 \quad 3.14 \quad -16.33 \quad -22.17 \quad 11.67]^T \text{ (mm)}$$

$$[P_{vv}] = 574.98 \text{ mm}^2, \quad [P_{vv}] = [P_{ll}] - \mathbf{n}^T \mathbf{x} = 2300.79 - 1725.86 = 574.93 \text{ mm}^2$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{[P_{vv}]}{n - u}} = \sqrt{\frac{574.98}{5 - 2}} = 13.84 \text{ mm}$$

Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Uygulama-2 (Demirel H, 2009)*

Dengeli Yükseklikler ve Standart Sapmaları:

j	$H_j = H_0 + \delta x$ (m)	$s_{H_j} = s_0 \sqrt{Q_{H_j H_j}}$ (mm)
1	673.9761	18.63
2	625.6186	18.82

Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Uygulama-2 (Demirel H, 2009)*

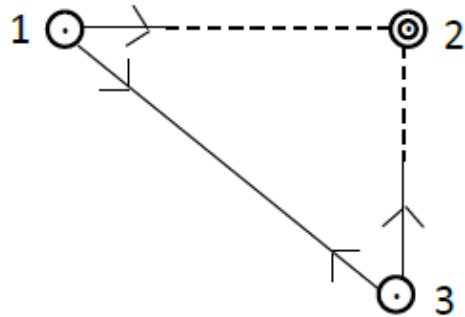
Dengeli Yükseklik Farkları ve Dengelemenin Denetimi:

i	k	$\Delta\bar{H}_{ik} = \Delta H_{ik} + v_{ik}$	$\Delta\bar{H}_{ik} = H_k - H_i$
C	1	- 202.5039	- 202.5039
1	C	202.5039	202.5039
1	2	- 48.3574	- 48.3575
2	1	48.3574	48.3575
2	D	55.4814	55.4814



Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Uygulama-3*

UYGULAMA 3: Şekildeki trigonometrik nivelman ağında işaretli düşey açılar ölçülmüştür. Düşey açılar (Z) eşit ağırlıklıdır. Düşey açılar yardımıyla elde edilen kırılma ve yeryuvarı eğriliği etkisi giderilmiş yükseklik farkları (ΔH), kenar uzunlukları (S) ve $\sin^2 Z$ büyüklükleri aşağıda verilmektedir.



DN	BN	ΔH (m)	S (m)	$\sin^2 Z$
1	2	-410,0060	3538,7	0,986688
	3	-625,9451	3610,6	0,970725
3	1	625,9141	3610,6	0,970911
	2	215,8949	3226,6	0,995570

$H_2 = 1300,001$ m

1 ve 3 noktalarının dengeli yüksekliklerini, standart sapmalarını bulunuz.

Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Uygulama-3*

Serbestlik Derecesi: $n = 4$; $u = 2$; $f = n - u = 2 > 0$ dengeleme vardır.
açılar $\rightarrow$ mgon; uzunluklar $\rightarrow$ cm

Katsayı ve $-l$ hesabı:

DN	BN	ΔH (m)	ΔH_0 (m)	$\Delta H - \Delta H_0$ (cm)	$\rho \frac{\sin^2 Z}{S}$	$-l$ (mgon)
1	2	-410,0060	-410,0060	0	0,1775	0
	3	-625,9451	-625,9451	0	0,1712	0
3	1	625,9141	625,9451	-3,10	0,1712	-0,5307
	2	215,8949	215,9391	-4,42	0,1964	-0,8681

Yaklaşık yükseklik hesabı;

$$\Delta H_{12} = H_2 - H_{1,0} = -410,0060$$

$$H_{1,0} = H_2 - (-410,0060) = 1300,001 + 410,0060 = 1710,007 \text{ m}$$

$$\Delta H_{13} = H_{3,0} - H_{1,0} = -625,9451$$

$$H_{3,0} = H_{1,0} - (625,9541) = 1710,007 - 625,9451 = 1084,0619 \text{ m}$$

Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Uygulama-3*

A, I, Normal denklemler, çözümü, düzeltmeler ve birim ağırlıklı ölçünün standart sapması

$$A = \begin{bmatrix} 0,1775 & 0 \\ 0,1712 & -0,1712 \\ -0,1712 & 0,1712 \\ 0 & 0,1964 \end{bmatrix}; I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5307 \\ 0,8681 \end{bmatrix}; N = \begin{bmatrix} 0,0901 & -0,0586 \\ -0,0586 & 0,0972 \end{bmatrix}; n = \begin{bmatrix} -0,0909 \\ 0,2614 \end{bmatrix}$$

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} 18,2580 & 11,0119 \\ 11,0119 & 16,9305 \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} 1,2191 \\ 3,4243 \end{bmatrix}; v^T = [0,2164 \quad -0,3776 \quad -0,1532 \quad -0,1956]$$

$$[PVV] = 0,25106 \text{ mgon}^2; [PVV]_{\text{kontrol}} = 0,25106 \text{ mgon}^2; s_0 = \sqrt{\frac{0,25106}{2}} = 0,3543 \text{ mgon}$$

Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Uygulama-3*

Dengeli yükseklikler ve standart sapmaları;

$$H_1 = H_{1,0} + \delta H_1 = 1710,007 + (1,2191/100) = 1710,0192 \text{ m}$$

$$H_3 = H_{3,0} + \delta H_3 = 1084,0619 + (3,4243/100) = 1084,0961 \text{ m}$$

$$S_{H1} = S_0 * \sqrt{18,2580} = 1,52 \text{ cm}$$

$$S_{H3} = S_0 * \sqrt{16,9305} = 1,46 \text{ cm}$$

Trig. Niv. Ağ Dengelemesi: *Alıştırmalar*

1. *Uygulama 1 için dengeli ölçülerin standart sapmalarını hesaplayınız.*
2. *Uygulama 1'i **yükseklik farkları ölçü olduğuna göre** düzeltme denklemlerini oluşturarak çözünüz.*
3. *Uygulama 3'ü **yükseklik farkları ölçü olduğuna göre** düzeltme denklemlerini oluşturarak çözünüz.*
4. *Uygulama 3'ü yükseklik farkları ölçü olduğuna göre çözdükten sonra dengelemenin ana denetimini yapınız.*

Ders duyuruları, soru ve görüşleriniz için:



Prof. Dr. Uğur DOĞAN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/dogan>

dogan@yildiz.edu.tr



Prof. Dr. Cüneyt AYDIN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/caydin>

caydin@yildiz.edu.tr; caydin78@gmail.com