

1. İÇİNDEKİLER

	Sayfa
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
2.1 Olasılık.....	2
2.2 Rasgele Değişken	2
2.2.1 Kesikli Rasgele Değişken	3
2.2.2 Sürekli Rasgele Değişken	4
2.3 Olasılık Fonksiyonu	4
2.3.1 Kesikli Rasgele Değişkenin Olasılık Fonksiyonu	4
2.3.2 Sürekli Rasgele Değişkenin Olasılık Fonksiyonu	5
2.4 Dağılım Fonksiyonu (Birikimli Dağılım Fonksiyonu).....	6
2.5 Beklenen Değer.....	7
2.6 Varyans	8
2.7 Kovaryans.....	9
2.8 Standartlaştırılmış Rasgele Değişken.....	9
2.9 Korelasyon Katsayısı	9
2.10 Kovaryans Matris	10
2.11 Gerçek Hata ve Hata Yayılma Kuralı	10
2.12 Genel Varyans ve Kovaryans Yayılma Kuralı	11
3. İSTATİSTİKİ DAĞILIMLAR	13
3.1 Normal Dağılım	13
3.2 Normal Dağılmış Rasgele Değişken Vektörü ve Doğrusal Fonksiyonları	15
3.3 Rasgele Hataların Dağılımı	16
3.4 χ^2 -Dağılımı	18
3.4.1 Merkezsel χ^2 -Dağılımı.....	18
3.4.2 Merkezsel olmayan χ^2 -Dağılımı	20
3.5 F-Dağılımı	21
3.5.1 Merkezsel F-Dağılımı.....	21
3.5.2 Merkezsel olmayan F-Dağılımı.....	22
3.6 t-Dağılımı (Student Dağılımı)	23
3.7 Karesel Biçimin Dağılımı ve İki Karesel Biçimin Bağımsızlığı	24
3.7.1 Bazı İstatistik Dağılımlara İlişkin Matlab Fonksiyonları	24
4. HİPOTEZ TESTLERİ.....	26
4.1 Beklenen Değerin Test Edilmesi (Parametre Testi)	28
4.1.1 Toplum Varyansı σ^2 'nin Bilinmesi Durumu	28
4.1.2 Toplum Varyans Kestirimi s^2 'nin Bilinmesi Durumu	30
4.2 Varyans Testi.....	33
4.2.1 Bir Varyansın Test Edilmesi (Tek Yanlı Soru).....	33
4.2.2 Bir Varyansın Test Edilmesi (Çift Yanlı Soru).....	34
4.2.3 İki Varyansın Test Edilmesi ve Birleştirilmiş Varyans	35

4.2.4	Bartlett Homojenlik Testi.....	36
4.3	İki Beklenen Değerin Test Edilmesi.....	37
4.4	Doğrusal Hipotez Testi.....	38
4.4.1	Doğrusal Hipotezin Karesel Biçime Etkisi.....	38
4.4.2	Doğrusal Hipotez Testi.....	40
4.5	Doğrusal Hipotez Testine Bağlı Özel Uygulamalar.....	40
4.5.1	Parametre Testi	40
4.6	Dengeleme Modelinin Test Edilmesi	42
4.7	Uyşumsuz Ölçü Testi.....	43
4.8	Uyşumsuz Nokta Testi	46

2. GİRİŞ

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1 Olasılık

Karşılaşılabılır olaylar S örnek uzayı, gerçekleşme olasılığı incelenen olay ise A kümesi olarak tanımlanmış olsun ($A \subset S$). Eğer bu kümelerin eleman sayıları ($s(A)$ ve $s(S)$) belirli ise, A olayının gerçekleşme olasılığı $P(A)$ aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(S)} \quad (2.1)$$

A ve B gibi iki olayın olasılığı için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. $A \cap B = \emptyset$ ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
2. $A \cap B \neq \emptyset$ ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Bir A olayının olasılığı bir B olayına bağlı ise, A olayına bağımlı olay, A olayının olasılığına ise koşullu olasılık denir. B olayına bağlı A olayının olasılığı $P(A/B)$ aşağıdaki eşitlik ile tanımlanır:

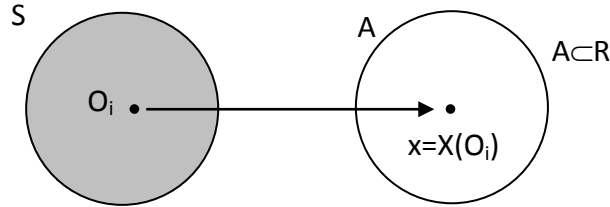
$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (2.2)$$

Burada, B olayı biliniyorken A olayının olasılığı ile ilgilenilir. $P(A/B)$ ifadesi, B verildiğinde A 'nın ortaya çıkma veya B ortaya çıktıktan sonra A 'nın ortaya çıkma olasılığı olarak okunur. A olayının ortaya çıkma olasılığı, B olayının ortaya çıkmasından sonra incelendiğinden, $P(A/B)$ koşullu olasılığının örnek uzayı B olur. Bu nedenle B 'ye indirgenmiş örnek uzayı da denir.

3.2 Rasgele Değişken

S örnek uzayının her bir basit olayını yalnız gerçek bir değere dönüştüren X

fonksiyonuna **rasgele değişken** denir. Her basit O_i olayı için $x=X(O_i)$ 'dir. Her rasgele değişken gerçekte bir fonksiyondur ve örnek uzayından gerçekteki sayı kümesine bir dönüşümdür.



Şekil 4.1 Örnek uzaydaki bir olayın rasgele değişken kümesine izdüşümü

O_i , örnek uzayında basit bir olay iken, bu olayı R (Gerçek sayı kümesi)'de görüntüleyen X fonksiyonunun aldığı değer $x=X(O_i)$ olup, bir anlamda $O_i \in S$ yerine $x \in R$ alınmaktadır. Gerçek değerli bir fonksiyon olarak tanımlanan X rasgele değişkeninin aldığı tüm değerler bu değişkenin değer kümesini, yani,

$$X: S \rightarrow A \subset R, A=X(S)$$

A kümesini verir. Bu küme bu yeni fonksiyonun tanım kümesi olur.

X rasgele değişkeni, örnek uzayından gerçekteki sayı kümesine bir dönüşüm olarak tanımlandığından, örnek uzayının her ögesi tek bir gerçekteki sayı ile eşlendirilir. Bu yüzden X 'e **tek boyutlu rasgele değişken** de denir.

3.2.1 Kesikli Rasgele Değişken

X rasgele değişkeninin R 'deki değer kümesi olan A , sayılabilir veya sayılabilir sonsuz bir küme ise X 'e **kesikli** (süreksiz) rasgele değişken denir. X kesikli bir rasgele değişken iken bunun değer kümesi

$$A=\{x_i \mid i=1, 2, 3, \dots\}$$

biçiminde noktalardan oluşan bir sayı kümesidir. Bir zar atılışı, bir depodaki kusurlu malların sayısı vb. için tanımlanabilecek rasgele değişkenler kesikli olur.

3.2.2 Sürekli Rasgele Değişken

X rasgele değişkeninin R'deki değer kümesi A, sayılamaz bir küme ise, X'e **sürekli** rasgele değişken adı verilir.

Rasgele değişkenin R'de aldığı değerler topluluğunun sayılamaz bir küme olması, örnek uzayının R'nin bir veya daha fazla aralıklarına görüntülenmesi demektir. Bu nedenle, X sürekli bir rasgele değişken iken,

$$A=\{ x \mid a \leq x \leq b \}$$

olur. Bazı durumlarda $A=R$ bile olabilir;

$$A=\{ x \mid -\infty \leq x \leq \infty \}$$

Rasgele değişken tam sayı ise kesikli, diğer durumlarda sürekli. Örneğin iki nirengi noktası arasındaki kenar uzunluğu, bir noktada yapılan doğrultu değerleri, bir gruptaki insanların boy uzunlukları vb. sürekli rasgele değişkene örneklerdir.

3.3 Olasılık Fonksiyonu

Örnek uzayında tanımlanabilen her olay, X rasgele değişkeni cinsinden yazılabildiğine göre, ilgilenilen tüm olasılıklar X'e bağlı bir fonksiyonla tanımlanabilir. Böylesi bir fonksiyona **olasılık fonksiyonu** denir.

3.3.1 Kesikli Rasgele Değişkenin Olasılık Fonksiyonu

Değer kümesi A olan bir X kesikli rasgele değişkeninin aldığı bir değer (x) için olasılığını veren $p(x)$ fonksiyonuna olasılık fonksiyonu denir. $p(x)$ fonksiyonunun bir olasılık fonksiyonu olabilmesi için, aşağıdaki özelliklerin sağlanması gerekir;

- Her $x \notin A$ için $p(x)=0$,
- Her $x \in A$ için $0 < p(x) \leq 1$,
- $\sum_{x \in A} p(x) = 1$.

3.3.2 Sürekli Rasgele Değişkenin Olasılık Fonksiyonu

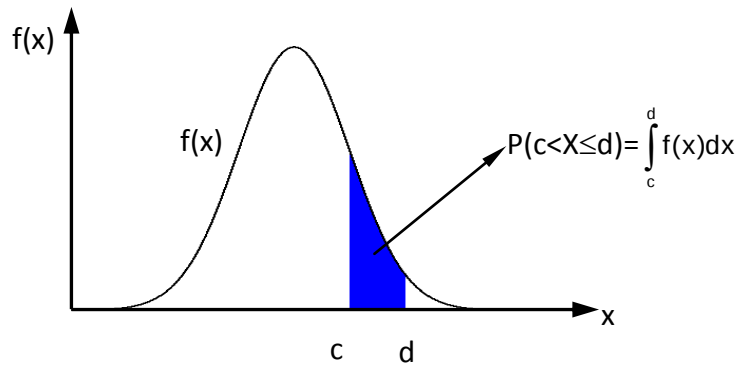
X sürekli rasgele değişkeninin belirli bir aralıkta olma olasılığını veren $f(x)$ fonksiyonuna sürekli rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu (kısaca, **olasılık yoğunluk fonksiyonu**) adı verilir. $f(x)$ fonksiyonunun, $A=\{x \mid a < x \leq b\}$ değer kümesi için tanımlanan bir X sürekli rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu olabilmesi için,

- Her $x \notin A$ için $f(x)=0$,
- Her $x \in A$ için $f(x)>0$,
- $P(X \in A)=P(a < x \leq b)=\int_a^b f(x)dx=1$ olmalıdır.

$A=\{x \mid a < x \leq b\}$ değer kümesi için tanımlanan bir X sürekli rasgele değişkeninin c ve d değerleri arasında olma olasılığı

$$P(c < X \leq d) = \int_c^d f(x)dx \quad (B=\{x \mid c < x \leq d\}; B \subset A) \quad (2.3)$$

biçiminde elde edilir. Bu $f(x)$ 'in eğrisiyle $x=c$, $x=d$ doğruları ve x eksenı arasındaki alandır.



Şekil 4.3 X sürekli ve $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu iken $P(c < X \leq d)$ olasılığı

Not 2.1: $P(X=a) = \int_a^a f(x)dx = 0$ olduğu için, X 'in verilen bir değere eşit çıkma olasılığı her zaman sıfırdır. Bu nedenle X 'in a ve b değerleri arasında olma olasılıkları

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$$

biçimlerinde yazılabilir.

3.4 Dağılım Fonksiyonu (Birikimli Dağılım Fonksiyonu)

X rasgele değişkeninin verilen bir değere (x) eşit veya küçük çıkma olasılığını doğrudan veren fonksiyona **dağılım fonksiyonu** denir. Dağılım fonksiyonu $F(x)$ ile gösterilir.

Örneğin,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu ile tanımlanan bir X rasgele değişkeninin a gibi bir değerden ($0 < a < 1$) küçük veya eşit çıkma olasılığı,

$$P(X \leq a) = \int_0^a 2x dx = x^2 \Big|_0^a = a^2 \text{ dir.}$$

Öyleyse, $F(x)$ dağılım fonksiyonu, $F(x) = x^2$ olur. Böylece, $F(x)$ fonksiyonu elimizde mevcut iken, olasılıkların bulunması için integral hesabı yapmamıza gerek kalmaz.

Tanım 2.1 : $X: S \rightarrow A$, $A_i = \{ t \mid t < x \}$ ve $A \subset \mathbb{R}$ iken, $P(X \in A_1) = P(X \leq x) = F(x)$ ilişkisine karşılık gelen $F(x)$ 'e X 'in dağılım fonksiyonu denir. $F(x)$ 'in değer kümesi de $[0,1]$ aralığındadır. Dağılım fonksiyonu, X 'in verilen bir değere eşit veya küçük olma olasılığını veren bir fonksiyon olduğuna göre, dağılım fonksiyonunun olasılık fonksiyonları ile olan ilişkisi

şöyledir;

- $P(X \leq x) = F(x)$
- $P(X > x) = 1 - F(x)$
- $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$, $(x_1 \leq x_2)$

3.5 Beklenen Değer

Matematiksel olarak beklenen değer ($E(X)$), kesikli ve sürekli rasgele değişkenler için aşağıdaki biçimde tanımlanır;

$$X \text{ kesikli ise ; } E(X) = \sum_{x \in A} xp(x) \quad (p(x): \text{kesikli rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu}) \quad (2.4)$$

$$X \text{ sürekli ise; } E(X) = \int_{x \in A} xf(x)dx \quad (f(x): \text{olasılık yoğunluk fonksiyonu}) \quad (2.5)$$

Beklenen değere ilişkin aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- $u(x)$, X rasgele değişkenin bir fonksiyonu ise,
 - $E(u(x)) = \sum_{x \in A} u(x)p(x)$, X -kesikli
 - $E(u(x)) = \int_A u(x)f(x)dx$ X -sürekli
 - a bir sabit sayı iken $E(a) = a$ olur.
- 2. a bir sabit sayı ve $u(x)$ X rasgele değişkeninin bir fonksiyonu iken, $E(au(x)) = aE(u(x))$ 'dir.
- 3. $u(x)$ ve $v(x)$, X rasgele değişkeninin iki fonksiyonu, a ve b ise sabit sayılar iken, $E(au(x) + bv(x)) = aE(u(x)) + bE(v(x))$ 'dir.
- 4. $E(X - E(X)) = 0$ 'dır. (İspat: $E(X) = \mu$ ile $E(X - \mu) = 0$)

5. $X_1, X_2, \dots, X_n$ beklenen değerleri $E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n)$ olan rasgele değişkenler olsun. Rasgele değişkenlerin toplamının beklenen değeri, $E(X_1+X_2+\dots+X_n) = E(X_1)+E(X_2)+\dots+E(X_n)$ olur.

3.6 Varyans

Bir rasgele değişkenin beklenen değeri (ortalaması) olasılık fonksiyonunun merkezi hakkında bilgi verir. Ancak ortalama değer bir deneyden bir başka deneye rasgele değişkenin dağılımı ya da yayılımı hakkında bilgi vermez. İşte varyans, dağılımın, değişimin ve yayılımın ölçüsü olarak kullanılır.

X rasgele değişkeninin beklenen değeri $E(X)=\mu$ ise, varyansı,

$$\sigma^2 = V(X) = E((X-\mu)^2) \quad (2.6)$$

biçiminde tanımlanır. Yani varyans, X 'in kendi beklenen değerinden sapmasının karesinin beklenen değeridir.

(2.4) eşitliği, bir önceki bölümde açıklanan beklenen değer özellikleri kullanılarak aşağıdaki biçimde de yazılabilir;

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 \quad (2.7)$$

İspat: $\sigma^2 = E((X-\mu)^2) = E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) = E(X^2) - 2E(X)\mu + E(\mu^2) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$.

(2.7) eşitliği, olasılık fonksiyonu bilinen bir rasgele değişkenin varyansının bulunmasında kolaylık sağlar. Örneğin, olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olan bir rasgele değişkenin varyansı için, (2.5) ve birinci beklenen değer özelliğinden

$$\mu = E(X) = \int_{x \in A} xf(x)dx \text{ ve } E(X^2) = \int_{x \in A} x^2 f(x)dx$$

beklenen değerleri hesaplanıp, (2.7)'de yerine yazılarak varyans elde edilir.

3.7 Kovaryans

Kovaryans, iki rasgele değişken arasındaki korelasyonu gösteren bir parametredir (Demirel, 2009). X_i ve X_j rasgele değişkenleri arasındaki kovaryans,

$$\sigma_{ij} = E((X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)) \quad (2.8)$$

ile tanımlanır.

3.8 Standartlaştırılmış Rasgele Değişken

Beklenen değeri sıfır ve varyansı 1 olan bir rasgele değişkene **standartlaştırılmış rasgele değişken** denir. Bir rasgele değişkeni, standartlaştırılmış rasgele değişkene dönüştürmek için değişkenden beklenen değeri çıkartılır ve standart sapmasına bölünür. Beklenen değeri μ ve standart sapması σ olan bir X rasgele değişkeninin, standartlaştırılmış biçimi,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \quad (E(Z)=0, V(Z)=1) \quad (2.9)$$

olur.

3.9 Korelasyon Katsayısı

Kovaryans her değeri alabilir. Bu nedenle rasgele değişkenler arasındaki korelasyonu tanımlamak için uygun bir ölçüt değildir. Bunun yerine, rasgele değişkenlerin standartlaştırılmış değerlerinin çarpımının beklenen değerine eşit olan **korelasyon katsayısı** kullanılır. X_i ve X_j rasgele değişkenlerinin korelasyon katsayısı,

$$\rho_{ij} = E\left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \frac{X_j - \mu_j}{\sigma_j}\right) = \frac{E((X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j))}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (2.10)$$

biçiminde tanımlanır. Korelasyon katsayısı -1 ile $+1$ arasında değer alır.

3.10 Kovaryans Matris

n adet rasgele değişken $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ve bunların beklenen değerleri $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ vektör altında toplansın;

$$\underbrace{\mathbf{x}=[X_1 \ X_2 \ \dots X_n]^T}_{\text{Rasgele değişken vektörü}}, \quad \underbrace{\boldsymbol{\mu}=[\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_n]^T}_{\text{Beklenen değer vektörü}}$$

Bu iki vektörün farkı ile bu farkın devriğinin çarpımının beklenen değeri alınırsa **kovaryans (varyans-kovaryans) matris** elde edilir;

$$E((\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T)=\mathbf{C}_{xx} \quad (2.11)$$

(2.6) ve (2.8) eşitliklerinden görülebileceği gibi $n \times n$ boyutlu kovaryans matrisin köşegen elemanları rasgele değişkenlerin varyanslarını, diğer elemanları ise değişkenler arasındaki kovaryansları içerir;

$$\mathbf{C}_{xx} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ sim. & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

3.11 Gerçek Hata ve Hata Yayılma Kuralı

Bir rasgele deney (gözlem) sonucunda bir büyüklüğün değeri x elde edilmiş olsun. Bu büyüklüğün beklenen değeri $E(X)=\mu$ biliniyorsa, x ölçüsünün **gerçek hatası** (veya kısaca hatası),

$$\varepsilon=x-\mu \quad (2.13)$$

biçiminde tanımlanır.

Ölçülere (rasgele değişken değerlerine) ilişkin hataların bu ölçülerin fonksiyonlarını nasıl etkilediğini gösteren bağıntıya **hata yayılma kuralı** adı verilir (Demirel, 2009): x_1 , x_2 ve x_3 ölçülerine bağlı iki fonksiyon y_1 ve y_2 olsun;

$$y_1=f_1(x_1,x_2,x_3) \text{ ve } y_2=f_2(x_1,x_2,x_3).$$

Ölçülerdeki hatalar ε_1 , ε_2 ve ε_3 olduğuna göre düzeltilmiş (hatadan arındırılmış) y_1 ve y_2 değerleri, Taylor açılımı kullanılarak,

$$y_1-\varepsilon_{y1}=f_1(x_1,x_2,x_3)-(\partial f_1/\partial x_1)\varepsilon_1-(\partial f_1/\partial x_2)\varepsilon_2-(\partial f_1/\partial x_3)\varepsilon_3 \quad (2.14a)$$

$$y_2-\varepsilon_{y2}=f_2(x_1,x_2,x_3)-(\partial f_2/\partial x_1)\varepsilon_1-(\partial f_2/\partial x_2)\varepsilon_2-(\partial f_2/\partial x_3)\varepsilon_3 \quad (2.14b)$$

çıkar. $(\partial f_1/\partial x_i)=a_i$ ve $(\partial f_2/\partial x_i)=b_i$ ($i=1,2,3$) gösterimleri kullanılarak, ölçülerdeki hataların fonksiyonlarda neden olduğu hataları veren bağıntılar elde edilir;

$$-\varepsilon_{y1}=-(\partial f_1/\partial x_1)\varepsilon_1-(\partial f_1/\partial x_2)\varepsilon_2-(\partial f_1/\partial x_3)\varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_{y1}=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3 \quad (2.15a)$$

$$-\varepsilon_{y2}=-(\partial f_2/\partial x_1)\varepsilon_1-(\partial f_2/\partial x_2)\varepsilon_2-(\partial f_2/\partial x_3)\varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_{y2}=b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+b_3\varepsilon_3 \quad (2.15b)$$

3.12 Genel Varyans ve Kovaryans Yayılma Kuralı

(2.14) eşitliklerinde geçen ölçülerin varyansları σ_1^2 , σ_2^2 ve σ_3^2 ; kovaryansları σ_{12} , σ_{13} ve σ_{23} ise, y_1 ve y_2 fonksiyonlarının varyans ve kovaryansları aşağıdaki biçimde elde edilir (ispatı için Demirel,2009);

$$\sigma_{y1}^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + a_3^2 \sigma_3^2 + 2a_1a_2 \sigma_{12} + 2a_1a_3 \sigma_{13} + 2a_2a_3 \sigma_{23} \quad (2.16a)$$

$$\sigma_{y2}^2 = b_1^2 \sigma_1^2 + b_2^2 \sigma_2^2 + b_3^2 \sigma_3^2 + 2b_1b_2 \sigma_{12} + 2b_1b_3 \sigma_{13} + 2b_2b_3 \sigma_{23} \quad (2.16b)$$

$$\sigma_{y_1 y_2} = a_1 b_1 \sigma_1^2 + a_2 b_2 \sigma_2^2 + a_3 b_3 \sigma_3^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \sigma_{12} + (a_1 b_3 + a_3 b_1) \sigma_{13} + (a_2 b_3 + a_3 b_2) \sigma_{23} \quad (2.16c)$$

Fonksiyonların varyans ve kovaryanslarının elde edilmesi için daha kolay bir yol, matris yöntemidir: (2.15) eşitlikleri aşağıdaki biçimde ifade edilebilir;

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{y1} \\ \varepsilon_{y2} \end{pmatrix}}_{dy} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}}_F \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}}_{dx} \rightarrow dy = F dx \quad (2.17)$$

y_1 ve y_2 fonksiyonlarının kovaryans matrisi C_{yy} , buradan,

$$C_{yy} = F C_{xx} F^T \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{y1}^2 & \sigma_{y1 y2} \\ \sigma_{y1 y2} & \sigma_{y2}^2 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ sim. & & \sigma_3^2 \end{pmatrix} F^T \quad (2.18)$$

çıkar. (2.17) biçiminde yazılabilen her türlü fonksiyonun kovaryans matrisi, (2.18)'de olduğu gibi elde edilir: Bu kurala, **genel varyans-kovaryans yayılma kuralı** denir.

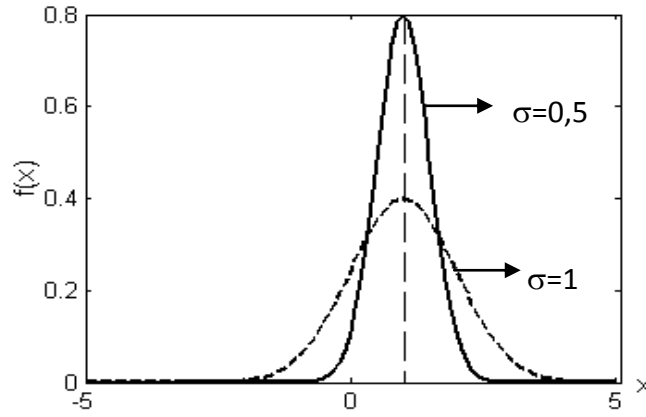
4. İSTATİSTİKİ DAĞILIMLAR

4.1 Normal Dağılım

Tanım 3.1: Beklenen değeri μ ve varyansı σ^2 olan bir X rasgele değişkeni,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty \quad (3.1)$$

(olasılık) yoğunluk fonksiyonuna sahipse, bu rasgele değişken normal dağılımlıdır denir ve $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ şeklinde ifade edilir.



Şekil 3.1 ($\mu=1, \sigma=0,5$) ve ($\mu=1, \sigma=1$) için normal dağılım yoğunluk fonksiyonları

Tanım 3.2: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ değişkeni, $(X-\mu)/\sigma$ dönüşümü ile standartlaştırılırsa, yeni değişken standart normal dağılıma ($N(0,1)$) sahip olur;

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(\mu=0, \sigma^2=1) \rightarrow Z \sim N(0,1) \quad (3.2)$$

Yoğunluk fonksiyonu için $f(x)$ yerine $f(z)$ kullanılır ($z=(x-\mu)/\sigma$).

Tanım 3.3: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ değişkenine ilişkin bir takım olasılık hesapları, yoğunluk fonksiyonunun altında kalan ilgili bölgenin alanının hesaplanmasıyla elde edilir;

$$P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = P(z_1 < Z \leq z_2) = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz, \quad z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma \text{ ve } z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$$

$$P(X > x) = \int_x^{\infty} f(x) dx = P(Z > z) = \int_z^{\infty} f(z) dz, \quad z = (x - \mu)/\sigma$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z f(z) dz, \quad z = (x - \mu)/\sigma$$

Tanım 3.4: X rasgele değişkeninin x'den küçük veya eşit olma olasılığı, $P(X \leq x)$, $F(x)$ dağılım fonksiyonu ile elde edilir. Aynı olasılık $\Phi(z)$ standart normal dağılımın dağılım fonksiyonuyla da belirlenir (İstatistiki tablolar, $\Phi(z)$ için düzenlenmiştir). Böylece, Tanım 3.3'deki olasılıklar $\Phi(z)$ dağılım fonksiyonu ile kolaylıkla hesaplanır:

1. $P(x_1 < X \leq x_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$, $z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma$ ve $z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$
2. $P(X > x) = 1 - \Phi(z)$, $z = (x - \mu)/\sigma$ (Olasılık tanımı gereğince, tüm olasılık 1'e eşittir)
3. $P(X \leq x) = \Phi(z)$, $z = (x - \mu)/\sigma$

Not 3.1: $\Phi(z)$ olasılık değeri, Matlab'de `normcdf(z)` ile hesaplanır.

Örnek 3.1: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ için, bazı olasılıklar kolayca elde edilebilir, örneğin,

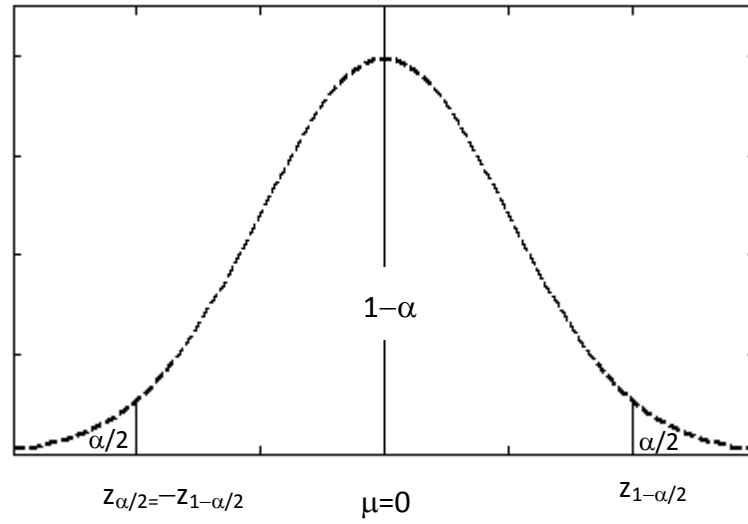
1. $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 = 0,683 = \%68,3$
2. $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) - (1 - \Phi(3)) = 2\Phi(3) - 1 = 0,997 = \%99,7.$

Tanım 3.5: $P(X \leq x_\alpha) = \Phi(z_\alpha) = \alpha$ olasılığını veren z_α değeri standart normal dağılımın α olasılığı için sınır değeri olarak adlandırılır. $1 - \Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha = \Phi(z_{1-\alpha})$ olduğundan, $\Phi(-z_\alpha) = \Phi(z_{1-\alpha})$ bulunur. Böylece, $\alpha/2$ olasılığı için aşağıdaki eşitlik geçerli olur (Şekil

3.2).

$$z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2} \quad (3.3)$$

Not 3.2: $z_{1-\alpha}$ sınır değeri, Matlab'de `norminv(1- $\alpha$ )` ile hesaplanır.



Şekil 3.2 Standart normal dağılımın $\alpha/2$ olasılığı için alt sınır ($z_{\alpha/2}$) ve üst sınır ($z_{1-\alpha/2}$) değerleri

4.2 Normal Dağılmış Rasgele Değişken Vektörü ve Doğrusal Fonksiyonları

Tanım 3.6: $n \times 1$ boyutlu beklenen değer vektörü ($\mu = [\mu_1 \ \mu_2 \dots \mu_n]^T$) ve $n \times n$ boyutlu pozitif tanımlı bir kovaryans matrisi (C_{xx}) sahip $n \times 1$ boyutlu rasgele değişken vektörü $\mathbf{x} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]^T$ için

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{C}_{xx})^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \mathbf{C}_{xx}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} \quad (3.4)$$

yoğunluk fonksiyonu geçerliyse, $\mathbf{x}$ rasgele değişken vektörü, “çok-değişkenli normal dağılımlıdır” denir: Bu, $\mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}_{xx})$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.7: $\mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}_{xx})$ vektörü, $m \times n$ boyutlu bir $\mathbf{K}$ katsayılar matrisi ve $m \times 1$ boyutlu bir $\mathbf{c}$ katsayılar vektörü ile $\mathbf{y} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ biçiminde elde edilen $m \times 1$ boyutlu $\mathbf{y}$ rasgele değişken vektörü normal dağılımlıdır; $\mathbf{y} \sim N(\mathbf{K}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{c}, \mathbf{K}\mathbf{C}_{xx}\mathbf{K}^T)$. Burada, $m \times m$ boyutlu $\mathbf{K}\mathbf{C}_{xx}\mathbf{K}^T$ matrisi, $\mathbf{y}$ değişken vektörünün varyans-kovaryans yayılma kuralı ile elde edilmiş kovaryans matrisidir.

4.3 Rasgele Hataların Dağılımı

Bilindiği üzere, bir X rasgele değişkeninin beklenen değeri μ ve varyansı σ^2 ,

$$\mu = E(X), \sigma^2 = E((X - \mu)^2) \quad (3.5)$$

ile tanımlanır. X 'e ilişkin bu μ ve σ^2 parametrelerinin belirlenmesi için evrensel küme yerine, bir örnek küme (örnek uzay) seçilir. Bu örnek kümede yapılan rasgele deneyin sonuçları (ölçüler veya örnek noktalar) yardımıyla μ ve σ^2 kestirilir. Ölçü, yani örnek nokta (x), X 'in bir temsilidir; bu nedenle, ilgili ölçünün aynı normal dağılıma sahip olduğu kabul edilir; $x \sim N(\mu, \sigma^2)$. Örnek kümenin doğru seçildiği varsayımı altında, ölçü ile μ 'ye yaklaşılr; ancak ortada her zaman bir sapma bulunur. Ölçme işleminin doğasında olan bu sapma, (2.13) eşitliği ile hata olarak tanımlanmıştı;

$$\varepsilon = x - \mu$$

Rasgele özellikteki bu hata, sıfır beklenen değeri ve σ^2 varyansı ile normal dağılımlıdır;

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.6)$$

İspat: $\varepsilon = x - \mu$ ifadesinin beklenen değeri alınır, $E(\varepsilon) = E(x - \mu) = E(x) - E(\mu) = \mu - \mu = 0$ elde

edilir. Aynı eşitliğe, varyans yayılma kuralı uygulanırsa, $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_x^2 = \sigma^2$ bulunur: Böylece, $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ olur.

Doğal Sonuç: Rasgele hataların belli aralıklarda olma olasılıkları Tanım 4'e göre kolaylıkla elde edilebilir. Örneğin, $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ ise, ε hatasının $-\sigma$ ve σ arasında olma olasılığı,

$$P(-\sigma < \varepsilon \leq \sigma) = 2\Phi(1) - 1 = \%68,3;$$

$-1,96\sigma$ ve $1,96\sigma$ arasında olma olasılığı,

$$P(-1,96\sigma < \varepsilon \leq 1,96\sigma) = 2\Phi(1,96) - 1 = \%95;$$

ve -3σ ve 3σ arasında olma olasılığı,

$$P(-3\sigma < \varepsilon \leq 3\sigma) = 2\Phi(3) - 1 = \%99,7' \text{ dir.}$$

Bir hatanın -3σ ve 3σ aralığı dışında olma olasılığı $1 - 0,997 = \%0,3$ gibi küçük bir olasılıktır. Bu nedenle, genliği 3σ 'dan büyük olan hataların ilgili dağılıma uymadıkları, dolayısıyla kaba hata oldukları yargısı, bu basit çıkarımla ilintilidir.

Uygulamada μ beklenen değerinin bilinmesi mümkün olmadığından, $\varepsilon = x - \mu$ ifadesine göre x 'de ne kadar hatanın var olduğu da belirsizdir. Bu nedenle, olabildiğince fazla sayıda gerçekleştirilen ölçüler (x_i , $i=1,2,...,n$) yardımıyla beklenen değerin en uygun (en büyük olasılıklı) değeri belirlenir. Gauss, ölçülerin aynı normal dağılıma sahip olmaları durumunda, ($x_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i=1,2,...,n$) en uygun değerin, bir aritmetik ortalama değeri olduğunu göstermiştir; $\hat{x} = \bar{x} = [x]/n$. Bu basit aritmetik ortalama, μ için yansız (unbiased) bir kestiricidir; yani aritmetik ortalamanın beklenen değeri, toplumun beklenen değerine eşittir; $E(\bar{x}) = \mu$.

İspat: $E(\bar{x}) = (1/n)E(x_1 + x_2 + ... + x_n) = (1/n)(n\mu) = \mu$.

Ölçülerin aritmetik ortalamadan sapmalarının karelerinin toplamının, $(n-1)$ fazla ölçü sayısına oranı,

$$s^2 = \frac{(\bar{x} - x_1)^2 + \dots + (\bar{x} - x_n)^2}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2, \quad (3.7)$$

σ^2 varyansının yansız bir kestiricisidir; $E(s^2) = \sigma^2$

İspat: (3.7) eşitliğinde $\bar{x} - x_i = (\bar{x} - \mu) - (x_i - \mu)$ yazılır ve eşitliğin beklenen değeri alınır,

$$\begin{aligned} E(s^2) &= \frac{1}{n-1} E\left\{ \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2 \right\} = \frac{1}{n-1} E\left\{ \sum_{i=1}^n ((\bar{x} - \mu)^2 - 2(\bar{x} - \mu)(x_i - \mu) + (x_i - \mu)^2) \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} E\{n(\bar{x} - \mu)^2 - 2(\bar{x} - \mu)(n\bar{x} - n\mu) + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\} = \frac{1}{n-1} (-nE((\bar{x} - \mu)^2) + E(\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2)) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $E((\bar{x} - \mu)^2)$ değeri, $\bar{x}$ aritmetik ortalamasının varyansıdır; yani, $E((\bar{x} - \mu)^2) = \sigma^2/n$ 'dir. Diğer taraftan $E((x_i - \mu)^2) = \sigma^2$ olduğundan,

$$E\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right) = \sum_{i=1}^n E((x_i - \mu)^2) = n\sigma^2 \text{ dir.}$$

Böylece, s^2 'nin σ^2 varyansının yansız bir kestiricisi olduğu ispatlanır;

$$E(s^2) = \frac{1}{n-1} (-nE((\bar{x} - \mu)^2) + E(\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2)) = \frac{1}{n-1} (-\sigma^2 + n\sigma^2) = \sigma^2.$$

4.4 χ^2 -Dağılımı

χ^2 -dağılımı (ki-kare dağılımı) test işlemlerinde kullanılan önemli dağılımlardan biridir.

4.4.1 Merkezsel χ^2 -Dağılımı

Tanım 3.8: $\mathbf{x} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]^T$ rasgele değişken vektörü $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ beklenen değerli ve $\mathbf{C}_{xx} = \mathbf{I}$

varyans matrisi ile normal dağılımlı olsun; $\mathbf{x} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Bir başka deyişle, n adet rasgele değişken standart normal dağılıma sahipse ($X_i \sim N(0,1)$; $i=1,2,\dots,n$), $\kappa = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = (X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2)$ karesel biçimi n serbestlik derecesiyle χ^2 -dağılımına sahiptir denir;

$$\kappa = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = (X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2) \sim \chi^2(n) \quad \{ \mathbf{x} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \text{ ise} \} \quad (3.8)$$

Bu dağılımın yoğunluk fonksiyonu,

$$f(\kappa) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \kappa^{(n/2)-1} e^{-\kappa/2}, \quad 0 < \kappa \leq \infty \quad (3.9)$$

ile tanımlanır. Burada Γ , gama fonksiyonudur.

Tanım 3.9: $\mathbf{x} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]^T$ rasgele değişken vektörü $\mathbf{0}$ beklenen değerli ve $\mathbf{C}_{xx}$ kovaryans matrisi ile normal dağılımlı olsun; $\mathbf{x} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{C}_{xx})$. $\mathbf{x}^T \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{x}$ karesel biçimi n serbestlik derecesiyle χ^2 -dağılımına sahiptir denir (İspatı için Koch, (1999;s.124-125));

$$\mathbf{x}^T \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{x} \sim \chi^2(n) \quad \{ \mathbf{x} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{C}_{xx}) \text{ ise} \} \quad (3.10)$$

Eğer, $\mathbf{C}_{xx}$ bir varyans matrisi, yani $\mathbf{C}_{xx} = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ ise, yukarıdaki tanımdan, rasgele değişkenlerin standart sapmalarına oranlarının karelerinin toplamının n serbestlik derecesiyle χ^2 -dağılımlı olduğu ortaya çıkar;

$$((X_1/\sigma_1)^2 + \dots + (X_n/\sigma_n)^2) \sim \chi^2(n) \quad (3.11)$$

Not 3.3: $f(\kappa, n)$ olasılık fonksiyon değeri, Matlab'de `chi2pdf( $\kappa, n$ )` ile hesaplanır.

Tanım 3.10: $\kappa \sim \chi^2(n)$ rasgele değişkeninin bir χ^2 değerinden küçük olma olasılığı, $P(\kappa \leq \chi^2)$, χ^2 dağılımının dağılım fonksiyonu ($F(\chi^2; n)$) ile elde edilir;

$$P(\kappa \leq \chi^2) = F(\chi^2; n) \quad (3.12)$$

Not 3.4: $F(\chi^2; n)$ olasılık değeri, Matlab'de `chi2cdf` (χ^2, n) ile hesaplanır.

Tanım 3.11: $F(\chi^2_{\alpha, n}; n) = \alpha$ olasılığını veren $\chi^2_{\alpha, n}$ değerine, χ^2 dağılımının α olasılığı için sınır değeri denir.

Not 3.5: $\chi^2_{\alpha, n}$ değeri, Matlab'de `chi2inv` (α, n) ile hesaplanır.

4.4.2 Merkezsel olmayan χ^2 -Dağılımı

Tanım 3.11: $\mathbf{x} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]^T$ rasgele değişken vektörü $\boldsymbol{\mu}$ beklenen değerli ve $\mathbf{C}_{xx} = \mathbf{I}$ kovaryans matrisi ile normal dağılımlı olsun; $\mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$. $\kappa = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = (X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2)$ karesel biçimi n serbestlik derecesi ve $\lambda = \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu}$ dış-merkezlik parametresiyle merkezsel olmayan χ^2 -dağılımına sahiptir denir;

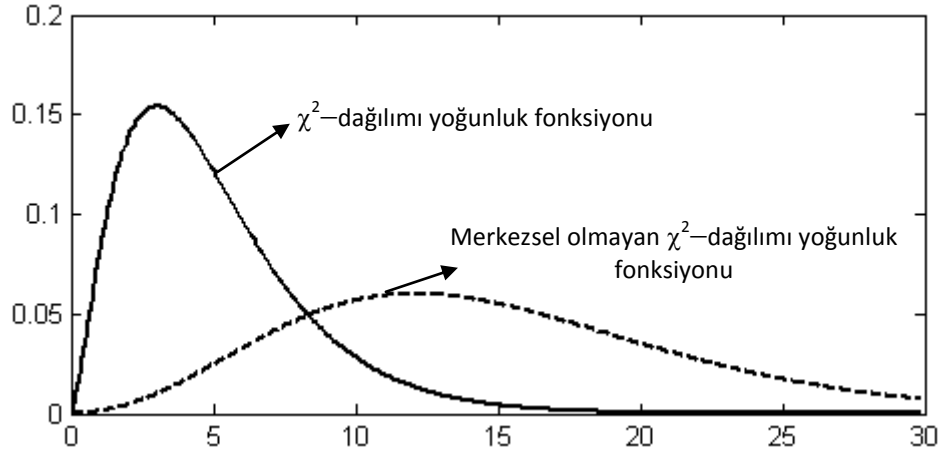
$$\kappa = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \sim \chi'^2(n, \lambda) \quad \{ \mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}) \text{ ise} \} \quad (3.13)$$

$\lambda = 0$ ise, dağılım (merkezsel) χ^2 -dağılımlı olur.

Tanım 3.12: $\mathbf{x} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]^T$ rasgele değişken vektörü $\boldsymbol{\mu}$ beklenen değerli ve $\mathbf{C}_{xx}$ kovaryans matrisi ile normal dağılımlı olsun; $\mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}_{xx})$. $\mathbf{x}^T \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{x}$ karesel biçimi n serbestlik derecesi ve $\lambda = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{C}_{xx}^{-1} \boldsymbol{\mu}$ dış-merkezlik parametresiyle merkezsel olmayan χ^2 -dağılımına sahiptir denir;

$$\mathbf{x}^T \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{x} \sim \chi'^2(n, \lambda) \quad \{ \mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}_{xx}) \text{ ise} \} \quad (3.14)$$

$\lambda = 0$ ise, dağılım (merkezsel) χ^2 -dağılımlı olur.



Şekil 3.3 Merkezsel ve merkezsel olmayan χ^2 -dağılımı yoğunluk fonksiyonları

Tanım 3.13: $\kappa \sim \chi'^2(n, \lambda)$ değişkeninin bir χ'^2 değerinden küçük olma olasılığı, $P(\kappa \leq \chi'^2)$, merkezsel olmayan χ^2 dağılımının dağılım fonksiyonu ($F(\chi'^2; n, \lambda)$) ile belirlenir:

$$P(\kappa \leq \chi'^2) = F(\chi'^2; n, \lambda) \quad (3.15)$$

Not 3.6: $F(\chi'^2; n, \lambda)$ olasılık değeri, Matlab'de `ncx2cdf( $\chi'^2, n, \lambda$ )` ile hesaplanır.

4.5 F–Dağılımı

F–dağılımı (Fisher dağılımı) ve merkezsel olmayan F–dağılımı hipotez testlerinde kullanılan dağılımlardır.

4.5.1 Merkezsel F–Dağılımı

Tanım 3.14: a ve b rasgele değişkenleri bağımsız ve χ^2 -dağılımlı olsunlar; $a \sim \chi^2(n_a)$, $b \sim \chi^2(n_b)$. $w = (a/n_a)/(b/n_b)$ rasgele değişkeni (merkezsel) F-dağılımlıdır;

$$w = \frac{(a/n_a)}{(b/n_b)} \sim F(n_a, n_b) \quad \{ a \sim \chi^2(n_a), b \sim \chi^2(n_b) \text{ ise} \} \quad (3.16)$$

Tanım 3.15: $w \sim F(n_a, n_b)$ değişkeninin bir F_0 değerinden küçük olma olasılığı, $P(w \leq F_0)$, F-dağılımının dağılım fonksiyonu ($F(F_0; n_a, n_b)$) ile elde edilir;

$$P(w \leq F_0) = F(F_0; n_a, n_b) \quad (3.17)$$

Not: $F(F_0; n_a, n_b)$ olasılık değeri, Matlab’de `fcdff(F0, na, nb)` ile hesaplanır.

Tanım 16: $F(F_{na,nb,\alpha}; n_a, n_b) = \alpha$ olasılığını veren $F_{na,nb,\alpha}$ değerine, F-dağılımının α olasılığı için sınır değeri denir.

Not: $F_{na,nb,\alpha}$ olasılık değeri, Matlab’de `finv( $\alpha$ , na, nb)` ile hesaplanır.

4.5.2 Merkezsel olmayan F–Dağılımı

Tanım 17: a ve b rasgele değişkenleri bağımsız ve $a \sim \chi'^2(n_a, \lambda)$, $b \sim \chi^2(n_b)$ olsunlar. $w = (a/n_a)/(b/n_b)$ rasgele değişkeni merkezsel olmayan F–dağılımlıdır;

$$w = \frac{(a/n_a)}{(b/n_b)} \sim F(n_a, n_b, \lambda) \quad \{ a \sim \chi'^2(n_a, \lambda), b \sim \chi^2(n_b) \text{ ise} \} \quad (3.18)$$

Tanım 18: $w \sim F(n_a, n_b, \lambda)$ değişkeninin bir F'_0 değerinden küçük olma olasılığı, $P(w \leq F'_0)$, merkezsel olmayan F–dağılımının dağılım fonksiyonu ($F(F'_0; n_a, n_b, \lambda)$) ile elde edilir;

$$P(w \leq F'_0) = F(F'_0; n_a, n_b, \lambda) \quad (3.19)$$

Not: Matlab'de $F(F'_0; n_a, n_b, \lambda)$ olasılık değeri, $ncfcdf(F'_0, n_a, n_b, \lambda)$ ile hesaplanır.

4.6 t–Dağılımı (Student Dağılımı)

Tanım 19: Birbirinden bağımsız x ve a değişkenleri, $x \sim N(0,1)$ ve $a \sim \chi^2(n_a)$ ise, $y = x / \sqrt{a/n_a}$ değişkeni t–dağılımlıdır denir;

$$y = \frac{x}{\sqrt{a/n_a}} \sim t(n_a) \quad \{x \sim N(0,1) \text{ ve } a \sim \chi^2(n_a) \text{ ise}\} \quad (3.20)$$

Tanım 20: $y \sim t(n_a)$ rasgele değişkeninin bir t değerinden küçük olma olasılığı, $P(y \leq t)$, t–dağılımının dağılım fonksiyonu ile belirlenir;

$$P(y \leq t) = F(t; n_a) \quad (3.21)$$

Not: Matlab'de $F(t; n_a)$ olasılığı, $tcdf(t, n_a)$ ile hesaplanır.

Tanım 21: $F(t_{n_a, \alpha}; n_a) = \alpha$ olasılığını veren $t_{n_a, \alpha}$ değerine, t–dağılımının α olasılığı için sınır değeri denir.

Not: $t_{n_a, \alpha}$ sınır değeri, Matlab'de $tinva(\alpha, n_a)$ ile hesaplanır.

4.7 Karesel Biçimin Dağılımı ve İki Karesel Biçimin Bağımsızlığı

Tanım 22 (*Karesel Biçimin Dağılımı*): $\mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}_{xx})$ olsun. Eğer $\mathbf{A}\mathbf{C}_{xx} = \mathbf{A}\mathbf{C}_{xx}\mathbf{A}\mathbf{C}_{xx}$ ise ($\mathbf{A}\mathbf{C}_{xx}$ idempotentse),

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \sim \chi'^2(\text{rank} \mathbf{A}, \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}) \quad (3.22)$$

olur.

Tanım 23 (*Düzeltilmelerin Ağırlıklı Kareleri Toplamının Dağılımı*): $n \times 1$ boyutlu $\mathbf{I}$ ölçü vektörü normal dağılımlı olsun; $\mathbf{I} \sim N(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{C}_{II})$. Kestirim sonucunda düzeltme vektörü, $\mathbf{v} = -\mathbf{R}\mathbf{I}$ ($\mathbf{R}$: redüdüans matris) ve ağırlık karelerinin toplamı $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{I}^T \mathbf{R}^T \mathbf{P} \mathbf{R} \mathbf{I} = \mathbf{I}^T \mathbf{R} \mathbf{I}$ olur. $\mathbf{R}\mathbf{C}_{II}$ idempotent bir matris ve $\text{rank} \mathbf{R}$, serbestlik derecesine (f) eşittir. Böylece, Tanım 22'ye göre, $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{I}^T \mathbf{R} \mathbf{I} \sim \chi'^2(f, \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{x})$ olur. $\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$ olduğundan dağılım merkezsel biçime dönüşür; sonuç olarak, düzeltilmelerin ağırlık kareleri toplamı, f serbestlik derecesiyle χ^2 -dağılımlı olur;

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \sim \chi^2(f) \quad (3.23)$$

Tanım 23 (*İki Karesel Biçimin Bağımsızlığı*): $\mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}_{xx})$ olsun. $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ ve $\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$ karesel biçimleri, $\mathbf{A}\mathbf{C}_{xx}\mathbf{B} = \mathbf{0}$ veya $\mathbf{B}\mathbf{C}_{xx}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ise bağımsızdır.

4.7.1 Bazı İstatistik Dağılımlara İlişkin Matlab Fonksiyonları

Yukarıda söz edilen Matlab fonksiyonları Çizelge 3.1'de özetlenmiştir.

Çizelge 3.1 Bazı istatistik dağılımlara ilişkin Matlab fonksiyonları

Açıklama	Fonksiyon	Matlab fonksiyonu
Standart normal dağılım fonksiyonu	$P(X \leq x) = \Phi(z)$ $, z = (x - \mu) / \sigma$	<code>normcdf(z)</code>
Standart normal dağılımın $1 - \alpha$ güven düzeyi sınır değeri	$z_{1-\alpha}$	<code>norminv(1-α)</code>
χ^2 -dağılım olasılık fonksiyonu	$f(\kappa, n)$	<code>chi2pdf(κ, n)</code>
χ^2 -dağılımının dağılım fonksiyonu	$P(\kappa \leq \chi^2) = F(\chi^2; n)$	<code>chi2cdf(χ^2, n)</code>
χ^2 -dağılımının α olasılığı için sınır değeri	$\chi^2_{\alpha, n}$	<code>chi2inv(α, n)</code>
Merkezsiz olmayan χ^2 -dağılımının dağılım fonksiyonu	$P(\kappa \leq \chi'^2) = F(\chi'^2; n, \lambda)$	<code>ncx2cdf(χ'^2, n, λ)</code>
F-dağılımının dağılım fonksiyonu	$P(w \leq F_0) = F(F_0; n_a, n_b)$	<code>fcdf(F_0, n_a, n_b)</code>
F-dağılımının α olasılığı için sınır değeri	$F_{n_a, n_b, \alpha}$	<code>finv(α, n_a, n_b)</code>
Merkezsiz olmayan F-dağılımının dağılım fonksiyonu	$P(w \leq F'_0) = F(F'_0; n_a, n_b, \lambda)$	<code>ncfcdf(F'_0, n_a, n_b, λ)</code>
t-dağılımının dağılım fonksiyonu	$P(y \leq t) = F(t; n_a)$	<code>tcdf(t, n_a)</code>
t-dağılımının α olasılığı için sınır değeri	$t_{n_a, \alpha}$	<code>tinv(α, n_a)</code>

5. HİPOTEZ TESTLERİ

Bir nirengi ağına ilişkin bir üçgenin üç iç açısı (α_1 , α_2 ve α_3), bir ölçü için standart sapması σ olan bir teodolitle ölçülmüş ve $\alpha_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, $\alpha_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ ve $\alpha_3 \sim N(\mu_3, \sigma^2)$ olsun. Temel beklenti, üç açının toplamının 200 gon'a eşit olmasıdır. Ancak, ölçülerdeki hatalardan dolayı bunun sağlanmayacağı önceden bilinir. 200 gon'dan olan sapmanın rasgele hataların bir sonucu olup olmadığını irdeleyelim: Bunun için $w = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - 200$ hatasının "0" kabul edilip edilmeyeceğinin belirlenmesi gerekir. Açı değerleri normal dağılımlı olduğundan, w kapanma hatası da normal dağılımlıdır; bir önceki bölümde verilen Tanım 5'e göre, $w \sim N(\mu_w = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - 200 = 0, \sigma_w^2 = 3\sigma^2)$ olur. Bölüm 3.3'de geçen "Doğal Sonuçta" olduğu gibi, gözlenen w 'nin belli bir olasılıkla hangi sınırlar içinde kalması gerektiği irdelenebilir: Bunun için,

$$P(\mu_w - z_{1-\alpha/2}\sigma_w < w \leq \mu_w + z_{1-\alpha/2}\sigma_w) = 1 - \alpha$$

olasılığını (güven düzeyini) veren $(\mu_w - z_{1-\alpha/2}\sigma_w)$, $(\mu_w + z_{1-\alpha/2}\sigma_w)$ aralık tahmini yapılmalıdır. Eğer, w hatası bu sınırlar içinde kalıyorsa, $1 - \alpha$ olasılığı ile hatanın ilgili normal dağılımda olduğu, dolayısıyla gözlenen hatanın, açılardaki rasgele hatalardan kaynaklandığı sonucuna varılır. w 'nin aralık dışında olması ise, tersine, hatanın ilgili normal dağılıma uymadığını, böylece gözlenen hatanın rasgele hataların etkisi ile açıklanamayacağını gösterir. Ancak her iki durum için verilecek kararda, her zaman α kadar bir yanılma payının (yanılma olasılığının) var olacağı göz önünde tutulmalıdır. Bu nedenle, hipotez testlerinde "1. tür hata" olarak da adlandırılan α için küçük bir olasılık değeri öngörülür (örneğin, $\alpha = \%5$); karar işlemleri buna göre yapılır.

Eğer w kapanma hatası, $\%95$ olasılıklı bir aralık olan $\pm 1,96\sqrt{3}\sigma$ değerleri içinde kalıyorsa, yani, Bölüm 3.3'deki "Doğal Sonuç" ile belirtildiği gibi,

$$P(-1,96\sqrt{3}\sigma < w \leq 1,96\sqrt{3}\sigma) = \%95$$

ise, kapanma hatasının $\%95$ olasılıkla rasgele hatalardan kaynaklandığı sonucuna ulaşılır: Örneğin, $\sigma = 1$ mgon olursa, $\%95$ olasılıklı güven aralığı, $\pm 3,39$ mgon'dur. Öyleyse, $\pm 3,39$ mgon değerini aşan üçgen kapanma hatası, ölçülerdeki rasgele

hataların sonucu olarak açıklanamaz. Ancak yapılan bu yorumun da %5’lik bir yanılma olasılığını taşıdığı unutulmamalıdır.

Yukarıdaki örnekte aslında, dolaylı olarak, bir test yapılmıştır: Sorulan soru ise, “*w gözleminin beklenen değeri sıfır mıdır?*”. Eğer kapanma hatası, 3,39 değerinden küçükse hata sıfır kabul edilebilir (beklenen değerinin sıfır olduğunu hatırlayınız); tam tersine büyükse sıfır kabul edilemez. Bu çıkarım, $T = |w - \mu_w| / \sigma_w$ büyüklüğünün $z_{1-\alpha/2}$ sınır değeriyle karşılaştırılması ile bulunacak sonuçla özdeştir. İstatistiksel testlerde, T gibi elde edilen test büyüklüğü ve güven sınırı karşılaştırılarak sonuca varılır.

Soru sorulduktan sonra, iki hipotez ortaya konur: Bunlardan soruya ilişkin oluşturulana sıfır hipotezi (H_0 : null hypothesis), sıfır hipotezine karşı oluşturulan hipoteze ise karşıt hipotez (H_1 : alternative hypothesis) adı verilir. Daha sonra, test büyüklüğü ve güven sınırı oluşturularak karşılaştırma yapılır. Genellikle,

$$\text{Test büyüklüğü} < \text{Güven sınırı}$$

ise H_0 kabul, dolayısıyla H_1 reddedilir.

Hipotez testlerinde, özetle, şu işlem sırası takip edilir;

$$\text{Soru} \rightarrow \text{Hipotezler} \rightarrow \text{Test büyüklüğü} \rightarrow \text{Güven Sınırı} \rightarrow \text{Karşılaştırma} \rightarrow \text{Karar} \quad (4.1)$$

Hipotezlerin kabul edilmesinde iki tür hatayla karşılaşılır. Birinci tür hata (Type I error) denilen hata, daha önce bahsedilen yanılma olasılığı ile özdeştir; doğru olan bir sıfır hipotezinin yanlışlıkla reddedilmesi olasılığı olarak adlandırılır. Bununla birlikte, testlerde ikinci tür hata (Type II error) denilen bir hata daha bulunur. Bu hata ise, doğru olan bir karşıt hipotezin yanlışlıkla reddedilmesi (veya yanlış olan bir sıfır hipotezinin, yanlışlıkla, doğru kabul edilmesi) olasılığına eşittir. Bunların tümleyenlerine, yani %100 olan bütün olasılıktan farklarına ise, sırasıyla “güven düzeyi (confidence level)” ve “test gücü (power of the test)” denir. Tanımdan gidilecek olunursa, örneğin, test gücü, doğru olan bir karşıt hipotezin doğru olarak kabul edilmesi olasılığıdır. Hipotez testlerindeki söz konusu hatalar ve bunların tümleyenleri (güven düzeyi ve test gücü) Çizelge 4.1’de özetlenmiştir.

Çizelge 4.1 Hipotez testlerinde hata türleri, güven düzeyi ve test gücü
(H_0 : Sıfır hipotezi; H_1 : Karşıt hipotez)

		Test sonucu kabul edilen hipotez	
		H_0	H_1
Doğru hipotez	H_0	<i>Doğru Karar; Güven düzeyi (1-α)</i>	<i>Yanlış Karar; Birinci tür hata (α)</i>
	H_1	<i>Yanlış Karar; İkinci tür hata</i>	<i>Doğru Karar; Test gücü</i>

Yanılma olasılığı azalınca, güven düzeyi artar; diğer taraftan, test gücü azalır. Hangi hipotezin doğru veya geçerli olduğunu bilmek olanaklı değildir. Bu nedenle, hata türleri önceden bilinemez. Yanılma olasılığı için testlerde küçük bir değer (genellikle, %0,1, %1 veya %5) seçilerek, hem güven düzeyinin yüksek olması hem de test gücünün düşük olmaması sağlanır. Test işlemleri, sıfır hipotezinin doğru olduğu varsayımına göre sonuçlandırılır. Bu nedenle, test işlemi sonucunda sıfır hipotezi ya “1- α güven düzeyi ile kabul edilir...” ya da “ α yanılma olasılığı ile reddedilir”.

İlerleyen bölümlerde, istatistikte geçen bazı klasik test işlemlerine değinilecek, daha sonra “doğrusal hipotez testi” başlığı altında bu test işlemleri irdelenerek, bazı jeodezik istatistik test konularından söz edilecektir.

5.1 Beklenen Değerin Test Edilmesi (Parametre Testi)

5.1.1 Toplum Varyansı σ^2 'nin Bilinmesi Durumu

Soru→ Kestirilen a gibi bir parametrenin beklenen değeri, μ_0 gibi bir değere eşit midir?

Hipotezler→ $H_0: E(a)=\mu_0$, $H_1: E(a)\neq \mu_0$ (4.2)

$$\text{Test Büyüklüğü} \rightarrow T_a = \frac{|a - \mu_0|}{\sigma_a} \quad (4.3)$$

Not: a'nın standart sapması σ_a , σ kullanılarak hesaplanır. Örneğin a parametresi n ölçüden elde edilmiş bir aritmetik ortalama ise, kofaktörü, $Q_{aa}=1/n$; standart sapması $\sigma_a = \sigma / \sqrt{n}$ olur.

$$\text{Güven Sınırı} \rightarrow z_{1-\alpha/2} \text{ (Standart normal dağılımın güven sınırı)} \quad (4.4)$$

Karar $\rightarrow T_a < z_{1-\alpha/2}$ ise α yanlışma olasılığı ya da $1-\alpha$ güven düzeyi ile H_0 kabul edilir. Yani, a ile μ_0 arasındaki sapma raslantısaldır; a parametresi yerine μ_0 kullanılabilir. $T_a \geq z_{1-\alpha/2}$ ise, H_0 reddedilir; H_1 kabul edilir. Bir başka deyişle, a ile μ_0 arasındaki fark rasgele hataların bir sonucu olarak yorumlanmalıdır.

Doğal Sonuç: (4.3)'de verilen T_a test büyüklüğünün karesi olan T_a^2 , serbestlik derecesi 1 olan χ^2 -dağılımlı olur (Bölüm 3.4.1, Tanım 8); $P(T_a^2 < \chi_{1,1-\alpha}^2) = 1-\alpha$ olduğundan, yukarıda açıklanan test işlemi T_a^2 test büyüklüğü ve $\chi_{1,1-\alpha}^2$ güven sınırı kullanılarak da gerçekleştirilebilir. $\alpha=\%5$ için,

$$z_{1-\alpha/2} = 1,96 = \sqrt{\chi_{1,1-\alpha}^2} = \sqrt{3,8415} \text{ 'dir.}$$

Örnek 1: Bir üçgenin üç iç açısı, bir ölçü için standart sapması 0,5 mgon olan bir teodolitle 5'er kez ölçülerek $\alpha_1=85,4512$ gon, $\alpha_2=55,2412$ gon ve $\alpha_3=59,3088$ gon bulunmuştur. Üçgen kapanma hatası rasgele hataların bir sonucu mudur? $\alpha=\%5$ yanlışma olasılığı ile test ediniz.

Çözüm: Kapanma hatası $w=200-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=-1,2$ mgon, standart sapması ise, $\sigma_w^2 = \sigma_{\alpha_1}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2 + \sigma_{\alpha_3}^2 = 3(0,5^2)/5 = 0,15$ mgon²'den, $\sigma_w = 0,387$ mgon; beklenen değeri ise 0'dır. Bu nedenle, problem, elde edilen w'nin 0 olup olmadığının irdelenmesidir. H_0 :

$E(w)=0$ hipotezi, $H_1: E(w) \neq 0$ karşıt hipotezine karşı test edilir. Test büyüklüğü, (2.2)'den

$$T_w = |-1,2-0|/0,387=3.11,$$

güven sınırı ise, (2.3)'den $z_{0,975}=1,96$ bulunur. $T_w > 1,96$ olduğundan, H_0 hipotezi %5 yanılma olasılığı ile reddedilir. Bu nedenle, w 'nin sıfırdan sapması anlamlıdır, rasgele hataların bir sonucu olarak algılanmamalıdır.

Örnek 2: Bir uzunluk, bir ölçü için standart sapması $\sigma=1+2\text{ppm}$ olan bir elektronik uzaklık ölçerle 3 kez ölçülerek $L=100,567$ m bulunmuştur. Uzunluğun gerçek değeri, $S=100,550$ m ise, L ölçüsünde bir kaba olup olmadığını test ediniz ($\alpha=\%0,1$).

Çözüm: Ölçüdeki hata, $\varepsilon=L-S=100,567-100,550=17$ mm, standart sapması ise, $\sigma_\varepsilon=\sigma_L=(1+2 \times 100,567 \times 10^{-3})/\sqrt{3}=0,48$ mm'dir. Hipotezler, $H_0: E(\varepsilon)=0$, $H_1: E(\varepsilon) \neq 0$ biçimindedir. Test büyüklüğü, (2.2)'den, $T_\varepsilon=|\varepsilon|/\sigma_\varepsilon=35,42$, güven sınırı ise (2.3)'den, $\alpha=\%0,1$ için $z_{1-\alpha/2}=3,29$ 'dur. $T_\varepsilon > z_{1-\alpha/2}$ olduğundan, ε hatasının rasgele hatalardan kaynaklanmadığı sonucuna ulaşılır. Bir başka deyişle, %99,9 güven düzeyi ile L ölçüsü uyumsuz ölçüdür.

5.1.2 Toplum Varyans Kestirimi s^2 'nin Bilinmesi Durumu

Soru ve hipotezler bir önceki bölümdekilerle aynı olsun. σ^2 'nin kestirim değeri s^2 biliniyorsa, test edilecek parametrenin standart sapması s^2 ile bulunur. Bu durumda, test büyüklüğü ve güven sınırı aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\text{Test Büyüklüğü} \rightarrow T_a = \frac{|a - \mu_0|}{s_a} \quad (4.5)$$

$$\text{Güven Sınırı} \rightarrow t_{f, 1-\alpha/2} \text{ (t-dağılımının güven sınırı)} \quad (4.6)$$

Karar $\rightarrow T_a < t_{f, 1-\alpha/2}$ ise α yanılma olasılığı ya da $1-\alpha$ güven düzeyi ile H_0 kabul edilir. Yani, a ile μ_0 arasındaki sapma raslantısaldır; a parametresi yerine μ_0 kullanılabilir. $T_a \geq t_{f, 1-\alpha/2}$ ise, H_0 reddedilir; H_1 kabul edilir.

Not 1: a 'nın standart sapması s_a , s kullanılarak hesaplanır. Örneğin a parametresi n ölçüden elde edilmiş bir aritmetik ortalama ise, kofaktörü, $Q_{aa}=1/n$; standart sapması $s_a=s/\sqrt{n}$ olur.

Not 2: f , s^2 'nin hesabındaki fazla ölçü sayısı; serbestlik derecesidir.

Doğal Sonuç: (4.5)'de verilen T_a test büyüklüğünün karesi olan T_a^2 , serbestlik dereceleri 1 ve f olan F-dağılımlı olur (Bölüm 3.5.1, Tanım 14); $P(T_a^2 < F_{1,f,1-\alpha}) = 1-\alpha$ olduğundan, yukarıda açıklanan test işlemi T_a^2 test büyüklüğü ve $F_{1,f,1-\alpha}$ güven sınırı kullanılarak da gerçekleştirilebilir.

Örnek 3: Aynı koordinat sistemindeki 6 noktanın iki periyot koordinatları arasında yapılan bir benzerlik dönüşümü sonunda ölçek çarpanı λ için $\hat{\lambda}=1,00258965411$ kestirim değeri elde edilmiştir. Düzeltmelerin kareleri toplamı $\Omega=150,00 \text{ mm}^2$, λ 'nın ağırlık katsayısı $Q_\lambda=5 \times 10^{-8} \text{ mm}^{-2}$ olduğuna göre, iki periyot arasında geçen zamanda bir deformasyon meydana gelip gelmediğini %95 güven düzeyi ile belirleyiniz.

Çözüm : Deformasyon, şekil değişimi anlamına gelir. Örneğin bir uzunluğun kısalması veya uzaması o uzunlukta bir deformasyon olduğunu gösterir. Benzerlik dönüşümünde elde edilen ölçek çarpanı, böylesi bir deformasyona karşılıktır; ölçek çarpanı 1 ise şekil değişimi olmamıştır.

Öyleyse, problem şu soruyla ele alınmalıdır; “Kestirilen ölçek çarpanının 1’den sapması anlamlı mıdır?” Hipotezler; $H_0: E(\hat{\lambda})=1$ ve $H_1: E(\hat{\lambda}) \neq 1$ biçimindedir. $\hat{\lambda}$ 'nın standart sapması;

$$s_{\hat{\lambda}} = s_0 \sqrt{Q_\lambda} = \sqrt{\Omega/f} \sqrt{Q_\lambda} = \sqrt{150/(2 \times 6 - 4)} \sqrt{5 \times 10^{-8}} = 0,0009682 \text{ olur.}$$

Test büyüklüğü, (4.5)'den, $T_\lambda = |1,00258965411 - 1| / (0,0009682) = 2.6747$ ve güven sınırı (4.6) eşitliğinden $t_{8,0,975} = 2.3060$ bulunur. $T_\lambda > t_{8,0,975}$ olduğundan H_0 reddedilir; H_1 kabul

edilir. Yani, kestirilen ölçek çarpanı “1” kabul edilemez; noktaların sınırlandığı bölgede %95 güven düzeyi ile deformasyon oluştuğuna karar verilir.

Örnek 4: Bir noktanın 1999 ve 2002 yıllarında elde edilen x koordinatları aşağıda verilmektedir.

$$x(1999)= 0,000 \text{ m}; x(2000)= 0,010 \text{ m}; x(2001)=0,015 \text{ m}; x(2002)=0,018 \text{ m}$$

Nokta x yönünde anlamlı bir hız bileşenine sahip midir? ($\alpha=5\%$).

Çözüm: Bir t zamanındaki koordinat için $x(t)=x(t_0)+\text{hız}(t-t_0)$ hız denklemi yazılabilir. Başlangıç zamanının $t_0=1999$ ve koordinatların eşit ağırlıklı olduğu kabulleriyle, düzeltme denklemleri;

$$x(1999)-x(1999)+v_1=\Delta x+\text{hız}(1999-1999)\rightarrow 0 \text{ mm} + v_1=\Delta x+0\text{hız}$$

$$x(2000)-x(1999)+v_2=\Delta x+\text{hız}(2000-1999)\rightarrow 10 \text{ mm}+v_2=\Delta x+1\text{hız}$$

$$x(2001)-x(1999)+v_3=\Delta x+\text{hız}(2001-1999)\rightarrow 15 \text{ mm}+v_3=\Delta x+2\text{hız}$$

$$x(2002)-x(1999)+v_4=\Delta x+\text{hız}(2002-1999)\rightarrow 18 \text{ mm}+v_4=\Delta x+3\text{hız}$$

olur. Normal denklemler, $4\Delta x+6\text{hız}=43$ ve $6\Delta x+14\text{hız}=94$, çözülerek, bilinmeyenler, $\Delta x=1,9 \text{ mm}$ ve $\text{hız}=5,9 \text{ mm/yıl}$ olarak elde edilir. Düzeltmelerin kareleri toplamı, $\Omega=12,7 \text{ mm}^2$, ile bir ölçünün standart sapması, $s=(\Omega/f)^{0,5}=(12,7/(4-2))^{0,5}=2,52 \text{ mm}$ bulunur. “hız” bilinmeyeninin standart sapması, ağırlık katsayısı $Q_h=0,2$ ile, $s_{\text{hız}}=s\sqrt{Q_h}=2,52\sqrt{0,2}=1,13 \text{ mm/yıl}$ ’dır.

Hızın anlamlı olup olmadığını belirlemek için, $H_0: E(\text{hız})=0$ hipotezi $H_1: E(\text{hız})\neq 0$ hipotezine karşı test edilir. Test büyüklüğü $T_{\text{hız}}=|\text{hız}-0|/s_{\text{hız}}=5,9/1,13=5,22$, $t_{f=2,(1-\alpha/2)}=0,975=4,3$ güven sınırından büyük olduğu için H_0 reddedilir. Dolayısıyla kestirilen hız bileşeninin 0’dan sapması anlamlıdır; hız, rasgele hataların etkisi olarak düşünülmemelidir.

5.2 Varyans Testi

5.2.1 Bir Varyansın Test Edilmesi (Tek Yanlı Soru)

Serbestlik derecesi f olan bir kestirim sonucunda elde edilen s^2 varyansının herhangi bir σ_1^2 varyansına eşit ya da bundan büyük olup olmadığının test edilmesinde aşağıdaki işlemler gerçekleştirilir;

$$\text{Hipotezler} \rightarrow H_0: E(s^2) = \sigma^2 = \sigma_1^2, H_1: E(s^2) = \sigma^2 > \sigma_1^2 \quad (4.7)$$

$$\text{Test Büyüklüğü} \rightarrow T_s = \frac{fs^2}{\sigma_1^2} \quad (4.8)$$

$$\text{Güven Sınırı} \rightarrow \chi_{f,1-\alpha}^2 \text{ (}\chi^2\text{-dağılımının güven sınırı)} \quad (4.9)$$

Karar $\rightarrow T_s < \chi_{f,1-\alpha}^2$ ise α yanılma olasılığı ile H_0 kabul edilir. Yani, s^2 ile σ_1^2 arasındaki sapma raslantısaldır; s^2 ile σ_1^2 eşit kabul edilir. Aksi halde H_0 reddedilir; s^2 varyansı, σ_1^2 varyansından büyüktür.

Not 1: Yukarıdaki test işlemi, genellikle, sayı değeri olarak s^2 'nin σ_1^2 varyansından büyük olması durumunda iki varyansın birbirine eşit olup olmadığının test edilmesi için yapılır.

Not 2: Söz konusu test işlemi, $H_0: E(s_0^2) = \sigma_0^2$, $H_1: E(s_0^2) > \sigma_0^2$ biçiminde oluşturulan hipotezlerle, Baarda yöntemine göre uyuşumsuz ölçü araştırması (data snooping) öncesinde yapılan global teste dönüşür. Eğer bu test sonucunda, karşıt hipotez kabul edilirse, ölçüler arasında bir uyuşumsuz ölçü olduğuna karar verilir ve Baarda yöntemi uygulanır. Burada s_0^2 , dengeleme sonrası elde edilen birim ağırlıklı ölçünün varyansı (a-posteriori variance); σ_0^2 , dengeleme öncesi öngörülen birim ağırlıklı ölçünün varyansıdır (a-priori variance).

5.2.2 Bir Varyansın Test Edilmesi (Çift Yanlı Soru)

Serbestlik derecesi f olan bir kestirim sonucunda elde edilen s^2 varyansının herhangi bir σ_1^2 varyansına eşit olup olmadığının test edilmesinde aşağıdaki işlemler gerçekleştirilir;

$$\textbf{Hipotezler} \rightarrow H_0: E(s^2) = \sigma^2 = \sigma_1^2 , H_1: E(s^2) = \sigma^2 \neq \sigma_1^2 \quad (4.10)$$

$$\textbf{Test Büyüklüğü} \rightarrow T_s = \frac{\sigma_1}{s} \quad (4.11)$$

$$\textbf{Güven Sınırı} \rightarrow q_1 = \sqrt{f / \chi_{f,1-\alpha/2}^2} \text{ ve } q_2 = \sqrt{f / \chi_{f,\alpha/2}^2} \quad (\chi^2\text{-dağılımının güven sınırları}) \quad (4.12)$$

Karar $\rightarrow q_1 < T_s < q_2$ ise α yanılma olasılığı ile H_0 kabul edilir. Yani, s^2 ile σ_1^2 arasındaki sapma raslantısaldir; s^2 ile σ_1^2 eşittir. $T_s \leq q_1$ ya da $T_s \geq q_2$ ise, H_0 reddedilir; s^2 varyansı, σ_1^2 varyansına eşit değildir.

Not : Yukarıdaki test işlemi, genellikle, sayı değeri olarak s^2 'nin σ_1^2 varyansından küçük olması durumunda iki varyansın birbirine eşit olup olmadığının test edilmesi için yapılır.

5.2.3 İki Varyansın Test Edilmesi ve Birleştirilmiş Varyans

Serbestlik dereceleri f_1 ve f_2 olan iki ayrı dengeleme sonrasında $s_{0,1}^2$ ve $s_{0,2}^2$ varyansları elde edilmiş olsun. Bu iki varyansın birbirine eşit olup olmadığını test etmek için aşağıda işlemler gerçekleştirilir;

Hipotezler → $H_0: E(s_{0,1}^2) = E(s_{0,2}^2)$, $H_1: E(s_{0,1}^2) \neq E(s_{0,2}^2)$ (4.13)

Test Büyüklüğü → $T_f = \frac{s_{0,1}^2}{s_{0,2}^2}$, ($s_{0,1}^2 > s_{0,2}^2$ ise) ; $T_f = \frac{s_{0,2}^2}{s_{0,1}^2}$ ($s_{0,2}^2 > s_{0,1}^2$ ise) (4.14)

Güven Sınırı → $F_{f_1, f_2, 1-\alpha}$ ($s_{0,1}^2 > s_{0,2}^2$ ise) ; $F_{f_2, f_1, 1-\alpha}$ ($s_{0,2}^2 > s_{0,1}^2$ ise) (F-dağılımının güven sınırı) (4.15)

Karar → Test büyüklüğü, ilgili güven sınırından küçükse, α yanılma olasılığı ile H_0 kabul edilir. Yani, iki varyans birbirine eşit kabul edilir. Aksi halde H_0 reddedilir; yani, iki varyans birbirinden farklıdır.

Not : İlgili test sonucunda iki varyans birbirine eşit çıkıyorsa, bu iki varyans yerine tek bir varyans öngörülebilir. Buna birleştirilmiş varyans (pooled variance) adı verilir;

$$s_0^2 = \frac{f_1 s_{0,1}^2 + f_2 s_{0,2}^2}{f_1 + f_2} \quad (4.16)$$

Birleştirilmiş varyans, iki periyot ölçülerinin karşılaştırılmasında uygulanan deformasyon analizinde önemlidir.

5.2.4 Bartlett Homojenlik Testi

Birden çok sayıda varyansın birbirine eşit olup olmadığının belirlenmesi için uygulanır.

Hipotezler → $H_0: E(s_{0,1}^2) = E(s_{0,2}^2) = \dots = E(s_{0,m}^2)$, $H_1: E(s_{0,1}^2) \neq E(s_{0,2}^2) \neq \dots \neq E(s_{0,m}^2)$ (4.17)

Test Büyüklüğü → $T_f = \frac{k}{p}$, $(k = [f] \ln \left(\frac{[fs_0^2]}{[f]} - [f \ln(s_0^2)] \right))$, $p = 1 + \frac{\left([1/f] - \frac{1}{[f]} \right)}{3(m-1)}$ (4.18)

Güven Sınırı → $\chi_{f,1-\alpha}^2$ (f=m-1) (4.19)

Karar → Test büyüklüğü, ilgili güven sınırından küçükse, α yanılma olasılığı ile H_0 kabul edilir. Yani, varyanslar birbirine eşit kabul edilebilir. Aksi halde H_0 reddedilir; yani, varyanslar birbirinden farklıdır.

Not : İlgili test sonucunda varyanslar birbirine eşit çıkıyorsa, bunlar yerine birleştirilmiş varyans kullanılabilir;

$$s_0^2 = \frac{[fs_0^2]}{[f]} = \frac{f_1 s_{0,1}^2 + f_2 s_{0,2}^2 + \dots + f_m s_{0,m}^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_m} \quad (4.20)$$

5.3 İki Beklenen Değerin Test Edilmesi

Serbestlik dereceleri f_1 ve f_2 , bir ölçü için geçerli varyansları $s_{0,1}^2$ ve $s_{0,2}^2$ olan iki dengeleme sonucunda ağırlık katsayıları Q_{a1} ve Q_{a2} olan a_1 ve a_2 parametrelerinin birbirine eşit olup olmadığı test edilmek istensin. Bu amaçla aşağıdaki işlemler gerçekleştirilir:

İki varyans eşit mi?→Öncelikle, $s_{0,1}^2$ ve $s_{0,2}^2$ varyanslarının istatistiksel olarak eşit olması gerekir. Bu amaçla Bölüm 4.2.3’de verilen varyans testi uygulanır; iki varyans eşitse, (4.16) eşitliğinden birleştirilmiş varyans (s_0^2) hesaplanır.

Hipotezler→ $H_0: E(a_1)=E(a_2)$, $H_1: E(a_1) \neq E(a_2)$ (4.21)

Test Büyüklüğü→ $T_a = \frac{|a_1 - a_2|}{s_0 \sqrt{Q_{a1} + Q_{a2}}}$ (4.22)

Güven Sınırı→ $t_{f,1-\alpha/2}$ (t-dağılımının güven sınırı) , $f=f_1+f_2$ (4.23)

Karar→ $T_a < t_{f,1-\alpha/2}$ ise H_0 hipotezi kabul edilir; yani, a_1 ve a_2 parametreleri arasındaki fark raslantısaldır, birbirine eşit alınabilir. Aksi durumda, iki parametrenin farklı

olduğuna karar verilir.

5.4 Doğrusal Hipotez Testi

Jeodezik çalışmalarda uygulanan çoğu istatistiki test işlemi, “doğrusal hipotez testi” adı verilen testin özel halleridirler. Bu bölümde öncelikle, doğrusal hipotezlerin dengelemeye etkisinden ve bir doğrusal hipotez testinin genel biçiminden bahsedilecek; ilerleyen bölümlerde doğrusal hipotez testine dayanan test yöntemleri ele alınacaktır.

5.4.1 Doğrusal Hipotezin Karesel Biçime Etkisi

$n \times 1$ boyutlu ölçü vektörü I normal dağılımlı olsun: $I \sim N(Ax, \sigma_0^2 P^{-1})$. Gauss-Markoff modeli böylece,

$$E(I) = I + v = Ax \quad ; \quad P \quad (4.24)$$

olur. Burada, A , $n \times u$ boyutlu katsayılar matrisidir ($\text{rank} A = u$).

En küçük kareler yöntemine göre $u \times 1$ boyutlu bilinmeyen vektörü x ve $n \times 1$ boyutlu düzeltme vektörü v aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$x = (A^T P A)^{-1} A^T P I \quad \text{ve} \quad v = Ax - I \quad (4.25)$$

Düzeltilmelerin ağırlıklı kareleri toplamı

$$\Omega = v^T P v \quad (4.26)$$

ile σ_0^2 varyansının kestirim değeri $s_0^2 = \Omega / f$ olur. Burada f , (4.24) modelinin serbestlik derecesidir ($f = n - u$).

Şimdi, bilinmeyenlerin, $Hx = w$ biçiminde bir doğrusal fonksiyonu sağlaması istensin.

Bunun için h adet $\mathbf{Hx}=\mathbf{w}$ koşul denklemi (4.24) modelinde düşünülür: Düzeltmelerin ağırlıklı karelerinin toplamını bu koşul altında minimum yapan Lagrange fonksiyonu göz önüne alındığında normal denklemler,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_H \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \quad (4.27a)$$

bulunur. Koşul denklemleri nedeniyle, bu normal denklemlerden, önceki $\mathbf{x}$ yerine, $\mathbf{x}_H$ elde edilir. Dolayısıyla, düzeltme vektörü

$$\mathbf{v}_H = \mathbf{A}\mathbf{x}_H - \mathbf{l} \quad (4.27b)$$

çıkar. Düzeltmelerin ağırlıklı kareleri toplamı

$$\Omega_H = \mathbf{v}_H^T \mathbf{P} \mathbf{v}_H \quad (4.27c)$$

ile σ_0^2 varyansının kestirim değeri $s_{0,H}^2 = \Omega_H / f_H$ olur. Burada f_H , içerisinde $\mathbf{Hx}=\mathbf{w}$ koşul denklemleri bulunan modelin serbestlik derecesidir;

$$f_H = f + h \quad (4.27d)$$

Eğer elimizde ilk dengeleme sonuçları bulunuyorsa, (4.27c) eşitliğindeki Ω_H 'ın elde edilmesi için (4.27a) normal denklemlerinin oluşturulmasına, yani, içerisinde $\mathbf{Hx}=\mathbf{w}$ koşul denklemlerinin bulunduğu ikinci bir dengeleme yapmaya gerek yoktur: Ω_H aşağıdaki gibi doğrudan elde edilebilir;

$$\Omega_H = \Omega + R = \Omega + (\mathbf{Hx} - \mathbf{w})^T (\mathbf{H}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H}^T)^{-1} (\mathbf{Hx} - \mathbf{w}) \quad (4.28)$$

Burada R değeri, $\mathbf{Hx}=\mathbf{w}$ koşul denklemlerinin düzeltmelerin ağırlıklı kareleri toplamına etkisini gösterir. R karesel biçiminin serbestlik derecesi, f_H 'dir.

5.4.2 Doğrusal Hipotez Testi

(4.24) modelindeki $\mathbf{x}$ bilinmeyenler vektörü için geçerli, $\mathbf{Kx}=\boldsymbol{\psi}$ biçimindeki bir eşitliğin geçerli olup olmadığı test edilmek istensin. Bunun için, sıfır hipotezi (doğrusal hipotez),

$$H_0: \mathbf{Kx}-\boldsymbol{\psi}=\mathbf{0}, \quad (4.29)$$

$H_1: \mathbf{Kx}-\boldsymbol{\psi} \neq \mathbf{0}$ karşıt hipotezine karşı test edilmelidir. Buna göre, $\mathbf{Kx}=\boldsymbol{\psi}$ koşul denklemleri (4.24) modelinde düşünülür ve (4.28) eşitliğindeki R büyüklüğü,

$$R=(\mathbf{Kx}-\boldsymbol{\psi})^T (\mathbf{K}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{K}^T)^{-1} (\mathbf{Kx}-\boldsymbol{\psi}) \quad (4.30)$$

elde edilir. Eğer (4.29) hipotezi doğruysa R büyüklüğü sıfıra gitmelidir. Bunun için, F-dağılımlı olan aşağıdaki test büyüklüğü kullanılır;

$$T = \frac{(R/h)}{(\Omega/f)} \sim F(h,f) \quad (4.31)$$

Eğer T büyüklüğü F-dağılımının $1-\alpha$ güven düzeyi için elde edilen $F_{h,f, 1-\alpha}$ güven sınırından küçükse (4.29) hipotezi kabul edilir. Yani, $\mathbf{Kx}=\boldsymbol{\psi}$ eşitliği $1-\alpha$ yanılma olasılığı ile doğrudur. Aksi halde, söz konusu eşitlik geçerli değildir.

5.5 Doğrusal Hipotez Testine Bağlı Özel Uygulamalar

5.5.1 Parametre Testi

(4.24) modelinde bir x_j bilinmeyeninin bir μ_j değerine eşit olup olmadığı test edilmek istensin. Bunun için dengelemenin fonksiyonel modeli

$$\mathbf{A}=[\mathbf{A}_1 \mathbf{a}_j] \text{ ve } \mathbf{x}=[\mathbf{x}_1 x_j]^T \quad (4.32)$$

biçiminde iki parçada düşünülür. Buna göre sıfır hipotezi ve karşıt hipotezi aşağıdaki biçimde oluşturulur;

$$H_0: x_j - \mu_j = 0 \rightarrow H_0: [\mathbf{0} \ 1] \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ x_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mu_j \end{bmatrix} \right) = 0 \text{ ve } H_1: x_j - \mu_j \neq 0 \rightarrow H_1: [\mathbf{0} \ 1] \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ x_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mu_j \end{bmatrix} \right) \neq 0 \quad (4.33)$$

(4.30) eşitliğinde $\mathbf{K} = [\mathbf{0} \ 1]$, $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \ x_j]^T$ ve $\boldsymbol{\psi} = [\mathbf{0} \ 1] [\mathbf{0} \ \mu_j]^T$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$R = (x_j - \mu_j) \left([\mathbf{0} \ 1] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_j^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1 & \mathbf{a}_j^T \mathbf{P} \mathbf{a}_j \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} (x_j - \mu_j) = (x_j - \mu_j)^2 \left([\mathbf{0} \ 1] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{x_1 x_1} & \mathbf{Q}_{x_1 x_j} \\ \mathbf{Q}_{x_1 x_j}^T & \mathbf{Q}_{x_j x_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (4.34)$$

çıkar. Böylece

$$R = (x_j - \mu_j)^2 / Q_{x_j x_j} \quad (4.35)$$

elde edilir. (4.35) eşitliği (4.31)'de düşünülürse, $h=1$ ile

$$T = \frac{(x_j - \mu_j)^2}{s_0^2 Q_{x_j x_j}} \sim F(h=1, f) \quad (4.36)$$

bulunur. Buna göre, $T < F_{1, f, 1-\alpha}$ ise sıfır hipotezi ($H_0: x_j - \mu_j = 0$) $1-\alpha$ güven düzeyi ile kabul edilir. Yani, x_j 'nin μ_j 'den sapması anlamlı değildir: Bu nedenle, x_j yerine μ_j kabul edilebilir.

Not: T'nin karakökü alındığında, yeni test büyüklüğü f serbestlik derecesiyle t-dağılımlı olur ve $\sqrt{T}$ büyüklüğünün $t_{f, 1-\alpha/2}$ ile karşılaştırılması yoluna gidilebilir ($t_{f, 1-\alpha/2} = \sqrt{F_{1, f, 1-\alpha}}$ olduğunu hatırlayınız). Böylece, Bölüm 4.1.2'de açıklanan parametre test yöntemi, doğrusal hipotez testi ile ispat edilmiş olur.

5.6 Dengeleme Modelinin Test Edilmesi

$I + \mathbf{v}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1$ düzeltme denklemleri ve $\mathbf{P}$ ağırlık matrisinden oluşan bir dengeleme modeli, ek parametrelerle ($\mathbf{x}_E$) genişletilmiş olsun;

$$I + \mathbf{v}_2 = [\mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_E] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} \quad (4.37)$$

Dengeleme modelinin ek parametrelerle genişletilmesinin uygun olup olmadığını belirlemek için $H_0: \mathbf{x}_E = \mathbf{0}$ biçimindeki sıfır hipotezinin $H_1: \mathbf{x}_E \neq \mathbf{0}$ karşıt hipotezine karşı test edilmesi gerekir. Bunun için, (4.37) modelinde $\mathbf{x}_E = \mathbf{0}$ koşul denklemleri düşünülür. Bu durumda elde edilecek düzeltmelerle ($\mathbf{v}_H$), (4.28)'den,

$$\Omega_H = \Omega_2 + R \quad (4.38)$$

bulunur. Böylece, (4.31) eşitliğine göre test büyüklüğü,

$$T = \frac{(\Omega_H - \Omega_2) / (f_H - f_2)}{\Omega_2 / f_2} \quad (4.39)$$

olur. Doğaldır ki, (4.37) modelinde $\mathbf{x}_E = \mathbf{0}$ koşulunun düşünülmesi durumunda model, ilk modele dönüşür; $\mathbf{v}_H = \mathbf{v}_1$ ve $\Omega_H = \Omega_1 = \mathbf{v}_H^T \mathbf{P} \mathbf{v}_H = \mathbf{v}_1^T \mathbf{P} \mathbf{v}_1$ olur. Buna göre, (4.39) test büyüklüğü aşağıdaki biçimde yazılır;

$$T = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) / (f_1 - f_2)}{\Omega_2 / f_2} \quad (4.40)$$

(4.40) test büyüklüğü, $(f_1 - f_2)$ ve f_2 serbestlik dereceleriyle F -dağılımlıdır ($T \sim F((f_1 - f_2), f_2)$). Eğer, $T < F_{f_1 - f_2, f_2, 1 - \alpha}$ ise $H_0: \mathbf{x}_E = \mathbf{0}$ hipotezi $1 - \alpha$ güven düzeyi ile kabul edilir. Bir başka deyişle, modelin genişletilmesine gerek yoktur. İlk modelin kullanılması daha anlamlıdır.

5.7 Uyuşumsuz Ölçü Testi

$\{I+v=Ax, P\}$ dengeleme modelinde i. ölçüde kaba hata olduğundan şüpheleniliyorsa i. ölçüye ilişkin düzeltme denkleminde bilinmeyen Δ_i hata büyüklüğünün de geçmesi gerekir. Böylece dengeleme modeli

$$I+v_{\Delta}=Ax+e \Delta_i, P \quad (4.41)$$

biçiminde genişletilmelidir. Burada e , i. elemanı 1 diğerleri 0 olan $n \times 1$ boyutlu bir vektördür.

i. ölçünün gerçekten kaba hatalı olup olmadığı, bir başka deyişle Δ_i 'nin sıfır kabul edilip edilemeyeceğinin testi için,

$$H_0: \Delta_i=0 \text{ ve } H_1: \Delta_i \neq 0 \quad (4.42)$$

hipotezleri oluşturulur. Bu hipotezler aşağıdaki biçimde yazılabilir;

$$H_0: [0 \ 1] \begin{bmatrix} x \\ \Delta_i \end{bmatrix} = 0 \text{ ve } H_1: [0 \ 1] \begin{bmatrix} x \\ \Delta_i \end{bmatrix} \neq 0 \quad (4.43)$$

(4.9) eşitliği ile verilen doğrusal hipotezle karşılaştırılma yapılırsa, $K=[0 \ 1]$ olduğu görülür. Buna göre, $[0 \ 1][x^T \ \Delta_i] = 0$ hipotezinin, (4.41) modelinden elde edilecek $\Omega_{\Delta} = v_{\Delta}^T P v_{\Delta}$ karesel biçimine etkisi, (4.30)'dan,

$$R_i = (\Delta_i) ([0 \ 1] \begin{bmatrix} A^T P A & A^T P e \\ e^T P A & e^T P e \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})^{-1} (\Delta_i) = (\Delta_i) ([0 \ 1] \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{x\Delta_i} \\ Q_{x\Delta}^T & Q_{\Delta_i\Delta_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})^{-1} (\Delta_i) = \Delta_i^2 (Q_{\Delta_i\Delta_i})^{-1} \quad (4.44)$$

bulunur. $Q_{\Delta_i\Delta_i}$, alt matrislerle matris tersi alma yöntemine göre (block inverse method),

$$Q_{\Delta_i\Delta_i} = (e^T P e - e^T P A (A^T P A)^{-1} A^T P e)^{-1} \quad (4.45)$$

biçiminde elde edilir. Dengeleme Hesabı dersinden $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ matris çarpımının dengeli ölçülerin ağırlık katsayıları matrisine ($\bar{\mathbf{Q}}_{ll}$) eşit olduğu göz önüne alınır ve ölçülerin korelasyonsuz olduğu varsayılırsa, (4.45) eşitliği daha yalın bir biçime dönüşür;

$$Q_{\Delta_i \Delta_i} = (P_i - \mathbf{e}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{Q}}_{ll} \mathbf{P} \mathbf{e})^{-1} = (P_i - P_i^2 \bar{Q}_{ll})^{-1} = 1/(P_i r_i) \quad (4.46)$$

Burada, $\bar{\mathbf{Q}}_{ll}$ $\{\mathbf{I} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{P}\}$ modelinde i. dengeli ölçünün ağırlık katsayısı, r_i ise fazla ölçü (redündans) payıdır. Böylece, (4.44)'deki R_i karesel biçimi,

$$R_i = \Delta_i^2 P_i r_i \quad (4.47)$$

olur. Δ_i büyüklüğü, $\{\mathbf{I} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{P}\}$ modelinin çözümünden elde edilecek, düzeltme vektörünün i. elemanı v_i 'ye bağlı olarak $\Delta_i = -v_i / r_i$ biçimindedir (bak. Koch, 1999; s. 210). v_i düzeltmesinin ağırlık katsayısı $Q_{v_i v_i}$ ile redündans payı arasında $Q_{v_i v_i} = r_i / P_i$ bağıntısı geçerli olduğundan, R_i karesel biçimi,

$$R_i = v_i^2 / Q_{v_i v_i} \quad (4.48)$$

olarak elde edilir. Buna göre, test büyüklüğü,

$$T_i = \frac{v_i^2}{(\Omega_{\Delta} / f_{\Delta}) Q_{v_i v_i}} \quad (4.49)$$

serbestlik dereceleri 1 ve f_{Δ} olan F-dağılımına uyar. Diğer yandan, Ω_{Δ} ve f_{Δ} için

$$\Omega_{\Delta} = \Omega_H - R_i = \Omega - R_i = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} - R_i = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} - \frac{v_i^2}{Q_{v_i v_i}}, \quad f_{\Delta} = f - 1 \quad (4.50)$$

geçerlidir. $s_{0,i}^2 = (\Omega_{\Delta} / f_{\Delta})$ denirse, (4.49) test büyüklüğü,

$$T_i = \frac{v_i^2}{s_{0,i}^2 Q_{v_i}} \quad (4.51)$$

biçimine dönüşür. Eğer T test büyüklüğü, $F_{1,(f_\Delta=f-1),1-\alpha}$ güven sınırından küçükse, $H_0: \Delta_i=0$ hipotezi $1-\alpha$ güven düzeyi ile kabul edilir. Bir başka deyişle, i. ölçüde kaba hata yoktur.

Not: (4.51) test büyüklüğünün karekökü alınırsa, elde edilen test büyüklüğü, t–testine göre uyumsuz ölçü işleminde kullanılan normlandırılmış düzeltmeye döner; güven sınırı ise $f-1$ serbestlik derecesi ve $1-\alpha/2$ olasılığına göre hesaplanır.

$$\sqrt{T_i} = \bar{v}_{i,t} = \frac{|v_i|}{s_{0,i} \sqrt{Q_{v_i}}} \quad ; \text{ Güven sınırı: } t_{f-1,1-\alpha/2} \quad (4.52)$$

Diğer yandan, T_i test büyüklüğü ile aşağıdaki biçimde yeni bir değişken tanımlansın,

$$\tau_i^2 = \frac{f T_i}{f-1+T_i} \quad (4.53)$$

Bu yeni değişkenin karekökü ile yeni bir değişken oluşturulursa,

$$\tau_i = \left(\frac{f T_i}{f-1+T_i} \right)^{1/2} = \left(\frac{R_i}{\Omega/f} \right)^{1/2} = \frac{|v_i|}{s_0 \sqrt{Q_{v_i}}} = \bar{v}_{i,p} \quad (4.54)$$

Pope yöntemine göre uyumsuz ölçü araştırmasında kullanılan normlandırılmış düzeltme elde edilir. τ_i değişkeni 1 ve $f-1$ serbestlik dereceleriyle Tau-dağılımlıdır. Tau-dağılımının güven sınırı, (4.53)’den,

$$\tau_{1,f-1,1-\alpha} = \left(\frac{f F_{1,f-1,1-\alpha}}{f-1+F_{1,f-1,1-\alpha}} \right)^{1/2} \quad (4.55)$$

elde edilir.

Not: α yanlışma olasılığı, tüm ölçüler için geçerlidir. Uyuşumsuz ölçü araştırmasında, her bir ölçü tek tek kuşkulu görüldüğünden, test işlemlerinde tek boyutlu yanlışma olasılığı $\alpha_0 = \alpha/n$ kullanılır.

5.8 Uyuşumsuz Nokta Testi

$\{I+v=Ax, P\}$ dengeleme modeli, $h \times 1$ boyutlu Δ ek parametreleriyle genişletilsin;

$$I+v_{\Delta}=Ax+Z\Delta, P \quad (4.56)$$

$\Delta=0$ koşul denklemleri (4.56)'da düşünülürse, düzeltmelerin ağırlıklı karelerinin toplamı Ω_{Δ} ,

$$R=\Omega_H-\Omega_{\Delta}=\Omega-\Omega_{\Delta}=v^T P v - v^T P Z (Z^T P Q_{vv} P Z)^{-1} Z^T P v \quad (4.57)$$

kadar değişecektir (Koch, 1999; s. 303). Buna göre Δ vektörünün sıfıra eşit olup olmadığının testi için,

$$T = \frac{R/h}{\Omega_{\Delta}/f_{\Delta}} \sim F(h, f_{\Delta}) \quad (4.58)$$

kullanılır. Ω_{Δ}' yı bulmak için (4.56) modeli çözülmelidir. Ancak, (4.53)'teki dönüşüme benzer bir dönüşüm uygulanırsa,

$$\tau = \left(\frac{f T}{f-h+hT} \right)^{1/2} = \left(\frac{R/h}{\Omega/f} \right)^{1/2} \sim \tau(h, f-h) \quad (4.59)$$

(4.56) modelinin çözülmesine gerek kalmaz ($\tau(h, f-h)$, Tau-dağılımını ifade eder). Bazı problemler için R artışı kolayca elde edilir; bunlardan ilki bir önceki bölümde Pope

yöntemine göre uyşumsuz ölçü testi için elde edilmiştir. Bir diğr problem, iki boyutlu koordinat dönüşümlerinde uygulanan “uyşumsuz nokta testi” dir.

Benzerlik dönüşümü yapıldıktan sonra i. noktanın düzeltmeleri, v_{x_i} ve v_{y_i} , bunların ağırlık katsayıları ise, $Q_{v_i v_i}$ olsun. Buna göre, test büyüklüğü, (4.59)’dan,

$$\tau_{(xy)} = \sqrt{\frac{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2}{2s_0^2 Q_{v_i v_i}}} \sim \tau(h=2, f-2) \quad (4.60)$$

biçiminde elde edilir. Test büyüklüğü için Tau-dağılımının güven sınırı, (4.55)’e benzer biçimde,

$$\tau_{2,f-2,1-\alpha} = \left(\frac{f F_{2,f-2,1-\alpha}}{f-2 + 2F_{2,f-2,1-\alpha}} \right)^{1/2} \quad (4.61)$$

bulunur. Benzerlik dönüşümünde $f=2p-4$ ’tür (p: eşlenik nokta sayısı). Diğr yandan, birinci serbestlik derecesi 2 ise

$$F_{2,f,1-\alpha} = \frac{f}{2} \left(\frac{1}{\alpha^{2/f}} - 1 \right) \quad (4.62)$$

eşitliği geçerlidir (Koch, 1999; s. 130). (4.62), (4.61)’de düşünülürse,

$$\tau_{2,f-2,1-\alpha} = \sqrt{(p-2)(1-\alpha^{1/(p-3)})} \quad (4.63)$$

bulunur. Uyşumsuz ölçü araştırmasında olduğı gibi, burada da her bir nokta çifti tek tek kuşkuu görölür. Bu nedenle, test işleminde α toplam yanılma olasılığı yerine $\alpha_0=\alpha/p$ kullanılmalıdır. Böylece, “uyşumsuz nokta” testinde kullanılan (4.60) test büyüklüğü için güven sınırı olarak aşağıdaki büyüklük kullanılır.

$$\tau_{2,f-2,1-\alpha/p} = \sqrt{(p-2)(1-(\alpha/p)^{1/(p-3)})} \quad (4.64)$$

Eğer, $\tau_{(xy)} < \tau_{2,f-2,1-\alpha/p}$ ise i. nokta uyşumludur; aksi durumda, ilgili nokta eşlenik nokta kümesinden çıkarılarak, yeni bir benzerlik dönüşümü yapılmalıdır.

Uygulama: Birinci koordinat sistemindeki nokta koordinatları aşağıda verilen eşlenik nokta kümesi yardımıyla, ikinci sisteme dönüştürölmek istenmektedir:

NN	x_1 (m)	y_1 (m)	x_2 (m)	y_2 (m)
1	4550736.1896	-84396.5917	4550922.001	-84362.436
2	4551309.0808	-81783.0327	4551494.925	-81748.852
3	4552299.2540	-87685.0577	4552485.013	-87650.880
4	4553026.9496	-79041.6745	4553212.802	-79007.468
5	4555194.2611	-79818.0031	4555380.132	-79783.800
6	4549423.3004	-87549.1124	4549609.050	-87514.975
7	4554790.9589	-86332.4049	4554976.770	-86298.220
8	4555680.3976	-88688.4145	4555866.181	-88654.222

- Benzerlik dönüşümü uygulayarak dönüşüm parametrelerini hesaplayınız.
- Ölçek faktörünün 1'den sapmasının anlamlı olup olmadığını test ediniz.
- Uyşumsuz nokta olup olmadığını test ediniz.
- Afin dönüşümü uygulayarak dönüşüm parametrelerini hesaplayınız.
- Afin dönüşümden elde edilen iki ölçek faktörün ve iki dönüklüğün birbirine eşit olup olmadığını ayrı ayrı test ediniz.
- Afin dönüşümü yerine benzerlik dönüşümü uygulanabilir mi? Test ediniz.

Not: Tüm test işlemlerinde toplam yanılma olasılığı; $\alpha = \%5$.