



Hata Yayılma Kuralları

Prof. Dr. U. DOĞAN , Prof. Dr. C. AYDIN, Dr. Öğr . Üyesi D. ÖZ DEMİR

YTÜ-Harita Mühendisliği Bölümü, Jeodezi Anabilim Dalı
İstanbul, Ekim 2020

Hata Yayılma Kuralları

- Doğrultu, uzunluk vb. elemanlar doğrudan ölçülebilmektedir.
- Bu ölçüler kullanılarak başka büyüklükler de matematiksel olarak hesaplanabilmektedir.
- Ölçüler hatalı olduğundan bu ölçülerden hesaplanan büyüklükler de hatalıdır.
- Ölçü hatalarının, ölçülerin fonksiyonlarını nasıl etkilediğini gösteren bağıntıya "**Hata Yayılma Kuralı**" denir.

Hata Yayılma Kuralları: *(Gerçek) hataların yayılması*

- L_1, L_2 ve L_3 ölçülerinin doğrusal iki fonksiyonu aşağıdaki gibi olsun

$$y_1 = a_0 + a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3$$

a_k ve b_k katsayıları
($k=0, 1, 2, 3$)



**bilinen hatasız
büyüklükler**

$$y_2 = b_0 + b_1 L_1 + b_2 L_2 + b_3 L_3$$



Hata Yayılma Kuralları: *(Gerçek) hataların yayılması*

Ölçüler yerine beklenen değerleri-**düzeltilmiş değerleri**- ($L_i - \varepsilon_i$ ($i = 1, 2, 3$)) yazılırsa;

Fonksiyonların beklenen değerleri:

$$y_1 - \varepsilon_{y_1} = a_0 + a_1(L_1 - \varepsilon_1) + a_2(L_2 - \varepsilon_2) + a_3(L_3 - \varepsilon_3)$$

$$y_2 - \varepsilon_{y_2} = b_0 + b_1(L_1 - \varepsilon_1) + b_2(L_2 - \varepsilon_2) + b_3(L_3 - \varepsilon_3)$$



Hata Yayılma Kuralları: *(Gerçek) hataların yayılması*

(Gerçek) hatalar;

$$\varepsilon_{y_1} = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_3$$

$$\varepsilon_{y_2} = b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + b_3 \varepsilon_3$$

$$y_1 = a_0 + a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3$$

$$y_2 = b_0 + b_1 L_1 + b_2 L_2 + b_3 L_3$$

Ölçü hatalarının ölçülerin doğrusal fonksiyonlarını nasıl etkilediğini gösteren eşitliklere **(gerçek) hataların yayılma kuralı** denir.



Hata Yayılma Kuralları : *(Gerçek) hataların yayılması*

Hesaplanan büyüklükler ölçülerin doğrusal olmayan fonksiyonları şeklinde ise;

$$y = f(L_1, L_2, \dots, L_n)$$

Yine aynı şekilde, ölçüler yerine beklenen değerleri yazılırsa; $L_i - \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

$$y - \varepsilon_y = f(L_1 - \varepsilon_1, L_2 - \varepsilon_2, L_3 - \varepsilon_3, \dots, L_n - \varepsilon_n)$$

Bu fonksiyona Taylor açılımı uygulanırsa;

$$y - \varepsilon_y = f(L_1, L_2, \dots, L_n) + \frac{\partial y}{\partial L_1}(-\varepsilon_1) + \frac{\partial y}{\partial L_2}(-\varepsilon_2) + \dots + \frac{\partial y}{\partial L_n}(-\varepsilon_n) + \text{ikinci ve daha yüksek dereceden terimler}$$



Hata Yayılma Kuralları : *(Gerçek) hataların yayılması*

ε_i hataları çok küçük olduğundan göz ardı edilir.

$$y - \varepsilon_y = f(L_1, L_2, \dots, L_n) + \frac{\partial y}{\partial L_1}(-\varepsilon_1) + \frac{\partial y}{\partial L_2}(-\varepsilon_2) + \dots + \frac{\partial y}{\partial L_n}(-\varepsilon_n) + \text{ikinci ve daha yüksek dereceden terimler}$$



$$\varepsilon_y = \frac{\partial y}{\partial L_1} \varepsilon_1 + \frac{\partial y}{\partial L_2} \varepsilon_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial L_n} \varepsilon_n$$

**Doğrusal olmayan
fonksiyonlar için hata
yayılma kuralı**

Yukarıdaki hata yayılma kuralı, aslında, «doğrusal» ya da «doğrusal olmayan» diye ayırt etmeksizin tüm fonksiyonlar için geçerlidir.



Hata Yayılma Kuralları : *(Gerçek) hataların yayılması-Matris Gösterimi*

$$\varepsilon_y = \underbrace{\frac{\partial y}{\partial L_1}}_{a_1} \varepsilon_1 + \underbrace{\frac{\partial y}{\partial L_2}}_{a_2} \varepsilon_2 + \dots + \underbrace{\frac{\partial y}{\partial L_n}}_{a_n} \varepsilon_n \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_y = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \dots + a_n \varepsilon_n$$

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$$

Katsayılar vektörü

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Hata vektörü

$$\varepsilon_y = \mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon}$$



Hata Yayılma Kuralları : (Gerçek) hataların yayılması-Matris Gösterimi

1. fonksiyon (y1)

$$\varepsilon_{y_1} = \underbrace{\frac{\partial y_1}{\partial L_1}}_{a_1} \varepsilon_1 + \underbrace{\frac{\partial y_1}{\partial L_2}}_{a_2} \varepsilon_2 + \dots + \underbrace{\frac{\partial y_1}{\partial L_n}}_{a_n} \varepsilon_n$$

2. fonksiyon (y2)

$$\varepsilon_{y_2} = \underbrace{\frac{\partial y_2}{\partial L_1}}_{b_1} \varepsilon_1 + \underbrace{\frac{\partial y_2}{\partial L_2}}_{b_2} \varepsilon_2 + \dots + \underbrace{\frac{\partial y_2}{\partial L_n}}_{b_n} \varepsilon_n$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix}$$

Katsayılar Matrisi

$$\varepsilon_y = \begin{bmatrix} \varepsilon_{y_1} \\ \varepsilon_{y_2} \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Hata vektörleri

$$\varepsilon_y = \mathbf{F} \varepsilon$$



Hata Yayılma Kuralları: *Varyans-Kovaryans yayılma kuralı*

- ❖ Ölçülerin gerçek hataları genellikle bilinmediğinden ölçülerin fonksiyonlarına etkileri de bilinmez.
- ❖ Ölçülerin fonksiyonlarının varyans ve kovaryansları, ölçülerin varyans ve kovaryansları yardımıyla hesaplanabilir. Buna **varyans-kovaryans yayılma kuralı** adı verilir.

- ✓ L1, L2 ve L3 ölçülerinin iki fonksiyonu y_1 ve y_2 olsun.
- ✓ Ölçüler m kez tekrarlansın. Böylece her bir fonksiyon için $m \times 1$ boyutlu hata vektörü oluşur. Hata yayılma kuralına göre bu vektörler aşağıdaki gibi olur:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{y_1} = a_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 + a_3 \boldsymbol{\varepsilon}_3$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{y_2} = b_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + b_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 + b_3 \boldsymbol{\varepsilon}_3$$



Hata Yayılma Kuralları: *Varyans-Kovaryans Yayılma Kuralı*

Fonksiyon hatalarının karelerinin toplamı ve karşılıklı çarpımlarının toplamı

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{y_1}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{y_1} = a_1^2 \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_2^2 \boldsymbol{\varepsilon}_2^T \boldsymbol{\varepsilon}_2 + a_3^2 \boldsymbol{\varepsilon}_3^T \boldsymbol{\varepsilon}_3 + 2a_1 a_2 \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_2 + 2a_1 a_3 \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_3 + 2a_2 a_3 \boldsymbol{\varepsilon}_2^T \boldsymbol{\varepsilon}_3$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{y_2}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{y_2} = b_1^2 \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_1 + b_2^2 \boldsymbol{\varepsilon}_2^T \boldsymbol{\varepsilon}_2 + b_3^2 \boldsymbol{\varepsilon}_3^T \boldsymbol{\varepsilon}_3 + 2b_1 b_2 \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_2 + 2b_1 b_3 \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_3 + 2b_2 b_3 \boldsymbol{\varepsilon}_2^T \boldsymbol{\varepsilon}_3$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{y_1}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{y_2} = a_1 b_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_2 b_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2^T \boldsymbol{\varepsilon}_2 + a_3 b_3 \boldsymbol{\varepsilon}_3^T \boldsymbol{\varepsilon}_3 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_2 + (a_1 b_3 + a_3 b_1) \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_3 + (a_2 b_3 + a_3 b_2) \boldsymbol{\varepsilon}_2^T \boldsymbol{\varepsilon}_3$$

$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n]^T$ hata vektöründeki hataların karelerinin toplamı, yani $[\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}]$, vektörün normuna yani $\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ 'a eşittir.

m'ye böler ve

$$\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{y_1}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{y_1}}{m} = \sigma_{y_1}^2, \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{y_2}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{y_2}}{m} = \sigma_{y_2}^2, \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{y_1}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{y_2}}{m} = \sigma_{y_1 y_2}$$

$$\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_i^T \boldsymbol{\varepsilon}_i}{m} = \sigma_{y_i}^2, \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_i^T \boldsymbol{\varepsilon}_k}{m} = \sigma_{ik}$$

olduğunu düşünürsek



Hata Yayılma Kuralları: *Varyans-Kovaryans Yayılma Kuralı*

$$\varepsilon_{y_1} = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3$$

$$\varepsilon_{y_2} = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3$$

Varyans-Kovaryans Yayılma Kuralı:

$$\sigma_{y_1}^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + a_3^2\sigma_3^2 + 2a_1a_2\sigma_{12} + 2a_1a_3\sigma_{13} + 2a_2a_3\sigma_{23}$$

$$\sigma_{y_2}^2 = b_1^2\sigma_1^2 + b_2^2\sigma_2^2 + b_3^2\sigma_3^2 + 2b_1b_2\sigma_{12} + 2b_1b_3\sigma_{13} + 2b_2b_3\sigma_{23}$$

$$\sigma_{y_1y_2} = a_1b_1\sigma_1^2 + a_2b_2\sigma_2^2 + a_3b_3\sigma_3^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sigma_{12} + (a_1b_3 + a_3b_1)\sigma_{13} + (a_2b_3 + a_3b_2)\sigma_{23}$$



Hata Yayılma Kuralları: *Varyans Yayılma Kuralı*

Ölçüler arasında korelasyon yoksa, yukarıdaki kural **varyans yayılma kuralı** haline dönüşür.

$$\varepsilon_{y_1} = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3$$

$$\varepsilon_{y_2} = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3$$

Varyans Yayılma Kuralı:

$$\sigma_{y_1}^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + a_3^2\sigma_3^2$$

$$\sigma_{y_2}^2 = b_1^2\sigma_1^2 + b_2^2\sigma_2^2 + b_3^2\sigma_3^2$$

$$\sigma_{y_1y_2} = a_1b_1\sigma_1^2 + a_2b_2\sigma_2^2 + a_3b_3\sigma_3^2$$



Hata Yayılma Kuralları : *Varyans-Kovaryans Yayılma Kuralı (Matris Gösterimi-1)*

İki fonksiyon düşünölsün:

$$y_1 = f_1(L_1, L_2, L_3)$$

$$y_2 = f_2(L_1, L_2, L_3)$$

Ölçöler?

1.Adım

$$\ell = [L_1 \ L_2 \ L_3]^T$$

Kovaryans Matrisi

$$\mathbf{C}_{\ell\ell} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

2.Adım

Hata yayılma kuralı

3.Adım

$$\varepsilon_{y_1} = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3$$

$$\varepsilon_{y_2} = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3$$

Katsayılar vektörü

4.Adım

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]$$

$$\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3]$$

Fonksiyonların varyansları ve kovaryansı

$$\sigma_{y_1}^2 = \mathbf{a}\mathbf{C}_{\ell\ell}\mathbf{a}^T$$

$$\sigma_{y_2}^2 = \mathbf{b}\mathbf{C}_{\ell\ell}\mathbf{b}^T$$

$$\sigma_{y_1y_2} = \mathbf{a}\mathbf{C}_{\ell\ell}\mathbf{b}^T = \mathbf{b}\mathbf{C}_{\ell\ell}\mathbf{a}^T$$



Hata Yayılma Kuralları : *Varyans-Kovaryans Yayılma Kuralı (Matris Gösterimi-2)*

İki fonksiyon düşünölsün:

$$y_1 = f_1(L_1, L_2, L_3)$$

$$y_2 = f_2(L_1, L_2, L_3)$$

Ölçüler?

1.Adım

$$\ell = [L_1 \quad L_2 \quad L_3]^T$$

Kovaryans Matrisi

$$\mathbf{C}_{\ell\ell} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

2.Adım

Hata yayılma kuralı

3.Adım

$$\varepsilon_{y_1} = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3$$

$$\varepsilon_{y_2} = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3$$

Katsayılar matrisi

4.Adım

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

Genel Hata Yayılma Kuralı

Fonksiyonların kovaryans matrisi

$$\mathbf{C}_{yy} = \mathbf{F}\mathbf{C}_{\ell\ell}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1}^2 & \sigma_{y_1y_2} \\ \sigma_{y_1y_2} & \sigma_{y_2}^2 \end{bmatrix}$$

Örnek-1: *Varyans-kovaryans yayılma kuralı*

1, 2 ve 3 no'lu noktaların yüksekliklerinin kovaryans matrisi aşağıda veriliyor:

$$\mathbf{C}_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,00 & 4,00 & 0,00 \\ 4,00 & 6,25 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 2,56 \end{bmatrix} cm^2$$

- a) 1 ve 2 noktaları arasındaki yükseklik farkının (h_1) standart sapmasını belirleyiniz.
- b) 2 ve 3 noktaları arasındaki yükseklik farkının (h_2) standart sapmasını belirleyiniz.
- c) h_1 ve h_2 yükseklik farklarının kovaryans matrisini belirleyiniz.



Örnek-1: *Varyans-kovaryans yayılma kuralı*

Çözüm:

$$\mathbf{x} = [H_1 \quad H_2 \quad H_3]^T$$

Rasgele değişkenler vektörü

Birim → cm

a)

$$h_1 = H_2 - H_1 \rightarrow$$

Hata Yayılma Kuralı

$$dh_1 = -dH_1 + dH_2$$



Varyans-Kovaryans Yayılma Kuralı

$$\begin{aligned}\sigma_{h_1}^2 &= (-1)^2 \sigma_1^2 + (1)^2 \sigma_2^2 + 2 \times (-1) \times (1) \sigma_{12} \\ &= 4 + 6,25 - 2 \times 4 = 2,25 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\sigma_{h_1} = 1,5 \text{ cm}$$



ε hataları yerine «d» diferansiyel değişimini düşünebiliriz. Soruların çözümünde bu gösterim kullanılacaktır.



Örnek-1: *Varyans-kovaryans yayılma kuralı*

Çözüm:

$$\mathbf{x} = [H_1 \quad H_2 \quad H_3]^T$$

Rasgele değişkenler vektörü

Birim → cm

b)

Hata Yayılma Kuralı

$$h_2 = H_3 - H_2 \longrightarrow dh_2 = -dH_2 + dH_3$$

Varyans-Kovaryans Yayılma Kuralı

$$\begin{aligned}\sigma_{h_2}^2 &= (-1)^2 \sigma_2^2 + (1)^2 \sigma_3^2 + 2 \times (-1) \times (1) \sigma_{23} \\ &= 6,25 + 2,56 - 2 \times 0 = 8,81 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\sigma_{h_2} = 2,97 \text{ cm}$$



Örnek-1: *Varyans-kovaryans yayılma kuralı*

Çözüm:

$$\mathbf{x} = [H_1 \quad H_2 \quad H_3]^T \quad \text{rasgele değişkenler vektörü}$$

Birim → cm

c)

$$h_1 = H_2 - H_1$$

$$h_2 = H_3 - H_2$$

Hata Yayılma Kuralı

$$dh_1 = -dH_1 + dH_2 + 0 \times dH_3$$

$$dh_2 = 0 \times dH_1 - dH_2 + dH_3$$

Katsayılar Matrisi

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Varyans-Kovaryans Yayılma Kuralı (Genel Hata Yayılma Kuralı)

$$\mathbf{C}_{hh} = \mathbf{F} \mathbf{C}_{xx} \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 2,25 & -2,25 \\ -2,25 & 8,81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{h_1}^2 & \sigma_{h_1 h_2} \\ \sigma_{h_1 h_2} & \sigma_{h_2}^2 \end{bmatrix}$$



(a ve b'deki
çözümlerle
karşılaştırınız)

Örnek-2: *Genel hata yayılma kuralı*

Ölçüler: L_1, L_2, L_3

Aralarındaki korelasyon eşit: $\rho=0,80$

Birim ağırlıklı standart sapma: 1,5 cm

i	L_i (m)	σ_i (cm)
1	100,118	1,56
2	150,364	1,30
3	98,244	1,06

$$X_1 = 2L_1 - L_3$$

$$X_2 = \frac{L_1 L_2}{L_3} - 0,5L_2$$

Fonksiyonlarının kovaryans matrisini, standart sapmalarını ve aralarındaki korelasyonu bulunuz.



Örnek-2: Genel hata yayılma kuralı

Çözüm:

$$\ell = [L_1 \quad L_2 \quad L_3]^T$$

Ölçüler (rasgele değişkenler)
vektörü

Birimler → Uzunluklar(cm)

$$\rho_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{\sigma_i \sigma_k}$$



$$\sigma_{L_1 L_2} = 0,80 \times 1,56 \times 1,30 = 1,6224 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{L_1 L_3} = 0,80 \times 1,56 \times 1,06 = 1,3229 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{L_2 L_3} = 0,80 \times 1,30 \times 1,06 = 1,1024 \text{ cm}^2$$

$$\mathbf{C}_{\ell\ell} = \begin{bmatrix} 2,4336 & 1,6224 & 1,3229 \\ 1,6224 & 1,6900 & 1,1024 \\ 1,3229 & 1,1024 & 1,1236 \end{bmatrix}$$

Ölçülerin kovaryans matrisi



Örnek-2: Genel hata yayılma kuralı

Çözüm:

Birimler → Uzunluklar (cm)

$$X_1 = 2L_1 - L_3$$



Hata Yayılma Kuralı

$$dX_1 = 2dL_1 - dL_3$$

$$X_2 = \frac{L_1 L_2}{L_3} - 0,5L_2$$



$$dX_2 = \frac{L_2}{L_3} dL_1 + \left(\frac{L_1}{L_3} - 0,5\right) dL_2 - \frac{L_1 L_2}{L_3^2} dL_3$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2,00 & 0,00 & -1,00 \\ 1,53 & 0,52 & -1,56 \end{bmatrix}$$

Katsayılar matrisi

Genel Hata Yayılma Kuralı

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}^T \longrightarrow \mathbf{C}_{yy} = \mathbf{F} \mathbf{C}_{\ell\ell} \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 5,5664 & 4,1622 \\ 4,1622 & 3,3662 \end{bmatrix}$$



Örnek-2: Genel hata yayılma kuralı

Çözüm:

Birimler → Uzunluklar (cm)

$$\mathbf{C}_{yy} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1 X_2} \\ \sigma_{X_1 X_2} & \sigma_{X_2}^2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 5,5664 & 4,1622 \\ 4,1622 & 3,3662 \end{bmatrix}$$

Standart Sapmalar

$$\sigma_{X_1} = \sqrt{5,5664} = 2,366 \text{ cm}$$

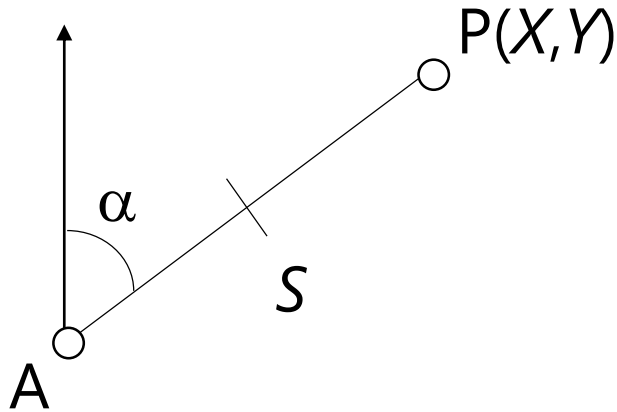
$$\sigma_{X_2} = \sqrt{3,3662} = 1,835 \text{ cm}$$

Korelasyon

$$\rho_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{\sigma_i \sigma_k} = \frac{4,1622}{2,366 \times 1,835} = 0,959$$

Örnek-3: Genel hata yayılma kuralı

P noktasının konumunu belirlemek için α açılık açısı ve S uzunluğu ölçülmüştür. A noktasının X_A , Y_A koordinatları hatalıdır.



$$\alpha = 84,7022 \text{ gon}$$

$$\sigma_{\alpha} = 1,5 \text{ mgon}$$

$$S = 518,356 \text{ m}$$

$$\sigma_S = 5 + 5 \text{ ppm}$$

$$\sigma_{X_A} = 2 \text{ cm}$$

$$\sigma_{Y_A} = 3 \text{ cm}$$

$$\rho_{X_A Y_A} = 0,60$$

- a) P noktasının X ve Y koordinatlarının kovaryans matrisini oluşturunuz.
- b) P noktasının konum hatasını bulunuz.



Örnek-3: Genel hata yayılma kuralı

Çözüm:

$$\ell = [X_A \quad Y_A \quad S \quad \alpha]^T$$

*Rasgele değişkenler
vektörü*

Birimler → Uzunluklar (cm)
Açılar (mgon)

a)

$$\sigma_S = 5 + 5 \times 0,518356 = 0,7592 \text{ cm}$$

$$\sigma_{X_A Y_A} = \rho_{X_A Y_A} \sigma_{X_A} \sigma_{Y_A} = 0,60 \times 2 \times 3 = 3,60 \text{ cm}^2$$

$$\mathbf{C}_{\ell\ell} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_A X_A}^2 & \sigma_{X_A Y_A} & \sigma_{X_A S} & \sigma_{X_A \alpha} \\ \sigma_{X_A Y_A} & \sigma_{Y_A Y_A}^2 & \sigma_{Y_A S} & \sigma_{Y_A \alpha} \\ \sigma_{X_A S} & \sigma_{Y_A S} & \sigma_S^2 & \sigma_{S\alpha} \\ \sigma_{X_A \alpha} & \sigma_{Y_A \alpha} & \sigma_{S\alpha} & \sigma_{\alpha}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,00 & 3,60 & 0 & 0 \\ 3,60 & 9,00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,58 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,25 \end{bmatrix}$$

*Rasgele değişkenlerin
kovaryans matrisi*



Örnek-3: Genel hata yayılma kuralı

Çözüm:

$$\ell = [X_A \quad Y_A \quad S \quad \alpha]^T$$

Birimler → Uzunluklar (cm)
Açılar (mgon)

b)

$$\mathbf{y} = [X \quad Y]^T$$

$$X = X_A + S \cos \alpha$$

$$Y = Y_A + S \sin \alpha$$

$$dX = dX_A + (\cos \alpha) dS + (-S \sin \alpha) d\alpha$$

$$dY = dY_A + (\sin \alpha) dS + (S \cos \alpha) d\alpha$$

cm

cm

cm

cm

m x mgon

?



Örnek-3: Genel hata yayılma kuralı

Çözüm:

$$\begin{aligned} dX &= dX_A + (\cos\alpha)dS + (-S\sin\alpha)d\alpha \\ dY &= dY_A + (\sin\alpha)dS + (S\cos\alpha)d\alpha \end{aligned}$$

cm *cm* *m×mgon*

✓ ✓ ?

$\times 100 \times \pi / (200 \times 1000)$ ile çarpılırsa

cm×radyan=cm birimine dönüşür

Birimler → Uzunluklar (cm)
Açılar (mgon)



Örnek-3: Genel hata yayılma kuralı

Çözüm:

$\rho = 200 \times 1000 / \pi$ dersek

Birimler → Uzunluklar (cm)
Açılar (mgon)

$$\begin{aligned} dX &= dX_A + (\cos\alpha)dS + (-S\sin\alpha / \rho)d\alpha \\ dY &= dY_A + (\sin\alpha)dS + (S\cos\alpha / \rho)d\alpha \end{aligned}$$

→ cm

→ cm

cm olur.

$$\begin{aligned} &(-S\sin\alpha / \rho) \\ &(S\cos\alpha / \rho) \end{aligned}$$

Katsayılarının birimi = cm/mgon
Yani katsayı hesabında S uzunlukları cm alınır. Sonuçta katsayı, S kenarı metre biriminde alınırsa, $2000/\pi$ 'ye bölünmüş olur.



Örnek-3: Genel hata yayılma kuralı

Çözüm:

$$\ell = [X_A \quad Y_A \quad S \quad \alpha]^T$$

Birimler → Uzunluklar (cm)
Açılar (mgon)

b)

$$\mathbf{y} = [X \quad Y]^T$$

$$dX = dX_A + 0,24dS - 0,79d\alpha$$

$$dY = dY_A + 0,97dS + 0,19d\alpha$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,24 & -0,79 \\ 0 & 1 & 0,97 & 0,19 \end{bmatrix}$$

cm/mgon

$$\mathbf{C}_{yy} = \mathbf{F} \mathbf{C}_{\ell\ell} \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 5,44 & 3,40 \\ 3,40 & 9,63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}$$



Örnek-3: *Genel hata yayılma kuralı*

Çözüm:

b)

P noktasının konum hatası

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$$

$$\sigma_P = \sqrt{5,44 + 9,63} = 3,88 \text{ cm} \quad \checkmark$$

Örnek-4: *Varyans-kovaryans yayılma kuralı (açık yazım)*

Bir önceki örnekte P noktasının konum hatasını varyans-kovaryans yayılma kuralını açık olarak uygulayarak çözünüz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}dX &= dX_A + (\cos\alpha)dS + (-S\sin\alpha / \rho)d\alpha \\dY &= dY_A + (\sin\alpha)dS + (S\cos\alpha / \rho)d\alpha\end{aligned}$$



$$\sigma_X^2 = \sigma_{X_A}^2 + (\cos\alpha)^2 \sigma_S^2 + (S\sin\alpha / \rho)^2 \sigma_\alpha^2 + 2(1 \times 0)\sigma_{X_A Y_A}$$

$$\sigma_Y^2 = \sigma_{Y_A}^2 + (\sin\alpha)^2 \sigma_S^2 + (S\cos\alpha / \rho)^2 \sigma_\alpha^2 + 2(0 \times 1)\sigma_{X_A Y_A}$$

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = \sqrt{\sigma_{X_A}^2 + \sigma_{Y_A}^2 + \sigma_S^2 + \frac{S^2}{\rho^2} \sigma_\alpha^2}$$



Örnek-4: *Varyans-kovaryans yayılma kuralı (açık yazım)*

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = \sqrt{\sigma_{X_A}^2 + \sigma_{Y_A}^2 + \sigma_S^2 + \frac{S^2}{\rho^2} \sigma_\alpha^2}$$

Buradan, konum hatasının α 'ya bağlı olmadığı görülür. Yani, konum hatasının ağın dönüklüğünden bağımsız olduğu bu örnek üzerinden ispatlanmış olur.

$$\sigma_P = \sqrt{4 + 9 + (0.7592)^2 + \frac{(518,356)^2 \times (100)^2}{(200000 / \pi)^2} (1,5)^2} = 3,88 \text{ cm} \quad \checkmark$$



Örnek-4: *Varyans-kovaryans yayılma kuralı (açık yazım)*

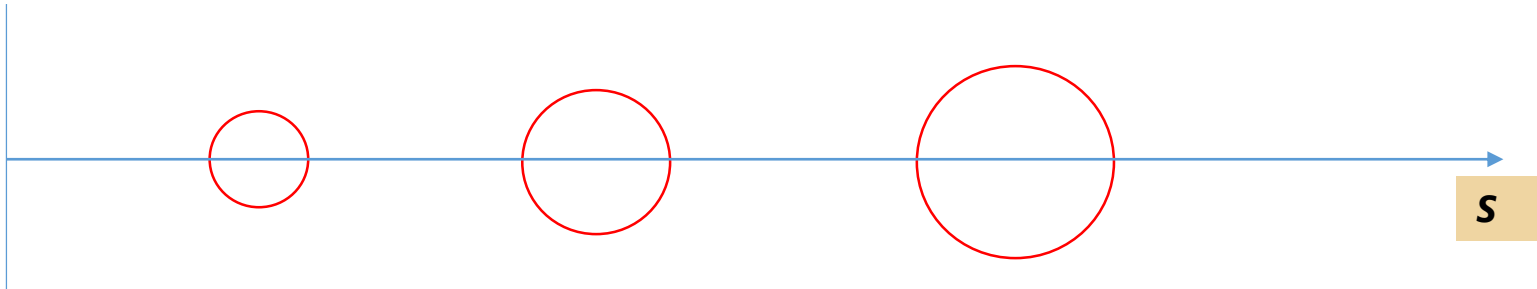
$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = \sqrt{\sigma_{X_A}^2 + \sigma_{Y_A}^2 + \sigma_S^2 + \frac{S^2}{\rho^2} \sigma_\alpha^2}$$



Bu örnekten konum belirlemeye ilişkin bir takım özellikleri çıkarabiliriz: P noktasının konum hatası,

- çıkış alınan A noktasının **konum hatasına** bağlıdır (A noktasının koordinatları arasındaki korelasyona bağlı değildir).
- S kenarına bağlıdır. (S arttıkça konum hatası artar; kutupsal alım, poligon gibi problemlerde neden belli bir kenarı geçmeyecek şekilde konum belirlemesi ya da tesis yapılması gerektiği buradan analitik olarak ortaya çıkar.
- Açı ve kenar ölçme doğruluğu arttıkça konum doğruluğu artar.

**P noktasının
konum hatası**



Hata Yayılma Kuralları: *Ağırlık katsayıları yayılma kuralı*

- Ölçülerin (rasgele değişkenlerin) ağırlık katsayılarının, ölçülerin fonksiyonlarının ağırlık katsayılarını nasıl hesaplandığını gösteren bağıntıya **ağırlık katsayıları yayılma kuralı** denir.

$$\frac{\mathbf{C}_{yy}}{\sigma_0^2} = \frac{\mathbf{F} \mathbf{C}_{xx} \mathbf{F}^T}{\sigma_0^2} \Rightarrow \text{Varyans-Kovaryans Yayılma Kuralı (Genel Hata Yayılma Kuralı)}$$

Hata Yayılma Kuralları: *Ağırlık katsayıları yayılma kuralı*

$$\frac{\mathbf{C}_{yy}}{\sigma_0^2} = \frac{\mathbf{F} \mathbf{C}_{xx} \mathbf{F}^T}{\sigma_0^2}$$



$$\mathbf{Q}_{yy} = \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{C}_{yy}$$

$$\mathbf{Q}_{xx} = \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{C}_{xx} \quad \longrightarrow$$

Ölçüler için ağırlık katsayıları

$$\mathbf{Q}_{yy} = \frac{1}{\cancel{\sigma_0^2}} \mathbf{F} (\cancel{\sigma_0^2} \mathbf{Q}_{xx}) \mathbf{F}^T$$

$$\boxed{\mathbf{Q}_{yy} = \mathbf{F} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{F}^T}$$

Hata Yayılma Kuralları: *Ağırlık katsayıları yayılma kuralı*

$\mathbf{x} = [L_1 \ L_2 \ \dots L_n]^T$ Ölçülerinin ağırlık katsayıları matrisi, örnek olarak $n=3$ için;

$$\mathbf{x} = [L_1 \ L_2 \ \dots L_n]^T$$

$$\mathbf{Q}_{xx} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

İki fonksiyon düşünölsün:

$$y_1 = f_1(L_1, L_2, L_3)$$

$$y_2 = f_2(L_1, L_2, L_3)$$



$$\mathbf{Q}_{yy} = \begin{bmatrix} Q_{y_1y_1} & Q_{y_1y_2} \\ Q_{y_1y_2} & Q_{y_2y_2} \end{bmatrix}$$

Hata Yayılma Kuralları: *Ağırlık katsayıları yayılma kuralı*

Fonksiyonların katsayılar matrisi:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial L_1} & \frac{\partial y_1}{\partial L_2} & \frac{\partial y_1}{\partial L_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial L_1} & \frac{\partial y_2}{\partial L_2} & \frac{\partial y_2}{\partial L_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

$$Q_{y_1 y_1} = \mathbf{a} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{a}^T = a_1^2 Q_{11} + a_2^2 Q_{22} + a_3^2 Q_{33} + 2a_1 a_2 Q_{12} + 2a_1 a_3 Q_{13} + 2a_2 a_3 Q_{23}$$

$$Q_{y_2 y_2} = \mathbf{b} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{b}^T = b_1^2 Q_{11} + b_2^2 Q_{22} + b_3^2 Q_{33} + 2b_1 b_2 Q_{12} + 2b_1 b_3 Q_{13} + 2b_2 b_3 Q_{23}$$

$$Q_{y_1 y_2} = \mathbf{a} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{b}^T = a_1 b_1 Q_{11} + a_2 b_2 Q_{22} + a_3 b_3 Q_{33} + (a_1 b_2 + a_2 b_1) Q_{12} + (a_1 b_3 + a_3 b_1) Q_{13} + (a_2 b_3 + a_3 b_2) Q_{23}$$

Hata Yayılma Kuralları: *Ağırlık yayılma kuralı*

Kofaktör yayılma kuralı

$$\mathbf{Q}_{yy} = \mathbf{F} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{F}^T$$

Ağırlık yayılma kuralı

$$\mathbf{P}_{yy} = (\mathbf{F} \mathbf{P}_{xx}^{-1} \mathbf{F}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{P}_{yy} = \mathbf{Q}_{yy}^{-1} \rightarrow \mathbf{P}_{yy}^{-1} = \mathbf{Q}_{yy}$$

$$\mathbf{P}_{xx} = \mathbf{Q}_{xx}^{-1} \rightarrow \mathbf{P}_{xx}^{-1} = \mathbf{Q}_{xx}$$

Olduğu düşünülürse

Hata Yayılma Kuralları: *Ağırlık yayılma kuralı*

Ölçüler bağımsız, $\sigma_{ik} = 0$ ve buna göre $Q_{ik} = 0$ ise;

$$\mathbf{P}_{xx} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & P_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & P_n \end{bmatrix}; (P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2})$$

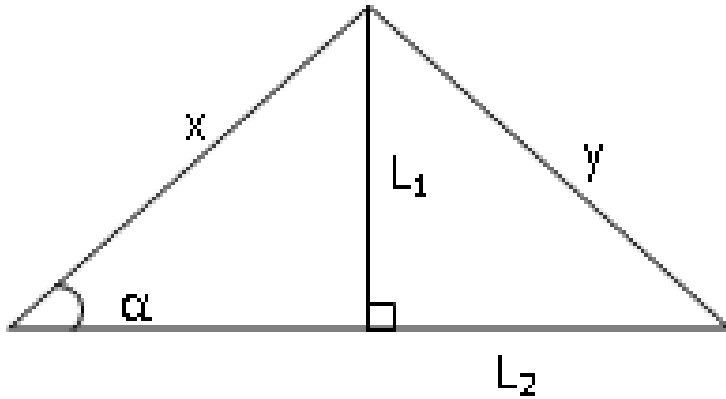
$$\mathbf{Q}_{xx} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & Q_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & Q_{nn} \end{bmatrix}; (Q_{ii} = \frac{1}{P_i})$$

Bağımsız ölçüler için ağırlık yayılma kuralı

$$\frac{1}{P_{y_1}} = \mathbf{a} \mathbf{P}_{xx}^{-1} \mathbf{a}^T = a_1^2 \frac{1}{P_1} + a_2^2 \frac{1}{P_2} + a_3^2 \frac{1}{P_3}$$

Örnek-5: *Ağırlık katsayıları yayılma kuralı*

2009-Sınav sorusu



Şekildeki üçgende L_1 , L_2 uzunlukları ve α açısı ölçülmüştür. Ölçüler, standart sapmaları ve uzunluk ölçüleri arasındaki korelasyon değeri aşağıda verilmiştir.

$$L_1 = 118,906 \text{ m}, \quad \sigma_{L_1} = 10+8 \text{ ppm}$$

$$L_2 = 156,368 \text{ m}, \quad r_{L_1 L_2} = 0,75$$

$$\alpha = 52,6745 \text{ gon}, \quad \sigma_{\alpha} = 1,2 \text{ mgon}$$

- a) L_1 ölçüsü birim ağırlıklı olduğuna göre, ölçülerin ağırlık katsayıları matrisini oluşturunuz.
- b) x ve y büyüklüklerinin ağırlık katsayıları matrisini, standart sapmalarını ve aralarındaki korelasyonu hesaplayınız.



Örnek-5: *Ağırlık katsayıları yayılma kuralı*

Çözüm:

$$\mathbf{l} = [L_1 \quad L_2 \quad \alpha]^T$$

Birimler → Uzunluklar (mm)

Açılar (mgon)

a)

$$\sigma_{L_1} = 10,951 \text{ mm}$$

$$\sigma_{L_2} = 11,251 \text{ mm}$$

$$\sigma_{L_1 L_2} = \rho_{L_1 L_2} \sigma_{L_1} \sigma_{L_2} = 0,75 \times 10,951 \times 11,251 = 92,4073 \text{ mm}^2$$

$$\mathbf{C}_{ll} = \begin{bmatrix} 119,9244 & 92,4073 & 0 \\ 92,4073 & 126,5850 & 0 \\ 0 & 0 & 1,44 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{ll} = \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{C}_{ll} = \begin{bmatrix} 1 & 0,7705 & 0 \\ 0,7705 & 1,0556 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0120 \end{bmatrix}$$

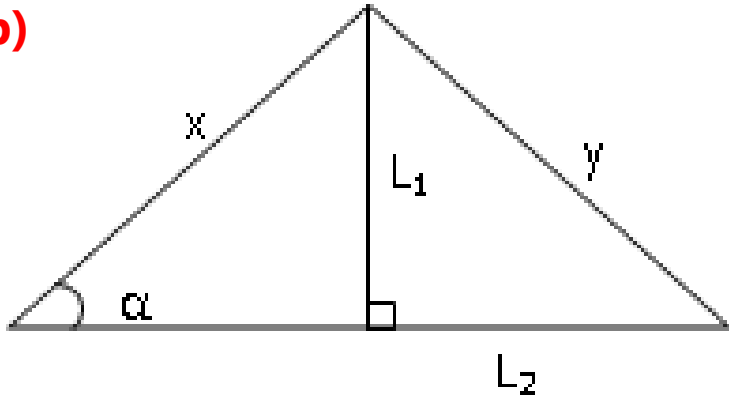


Örnek-5: *Ağırlık katsayıları yayılma kuralı*

Çözüm:

$$\mathbf{l} = [L_1 \quad L_2 \quad \alpha]^T$$

b)



$$x = \frac{L_1}{\sin \alpha}$$

$$y = \sqrt{L_1^2 + L_2^2}$$

$$dx = \frac{1}{\sin \alpha} dL_1 - \frac{\cos \alpha \times L_1}{\sin^2 \alpha} \frac{1}{\rho} d\alpha$$

$$dy = \frac{L_1}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}} dL_1 + \frac{L_2}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}} dL_2$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1,3584 & 0 & -2,3324 \\ 0,6053 & 0,7961 & 0 \end{bmatrix}$$

Birimler → Uzunluklar (mm)

Açılar (mgon)



Örnek-5: *Ağırlık katsayıları yayılma kuralı*

Çözüm:

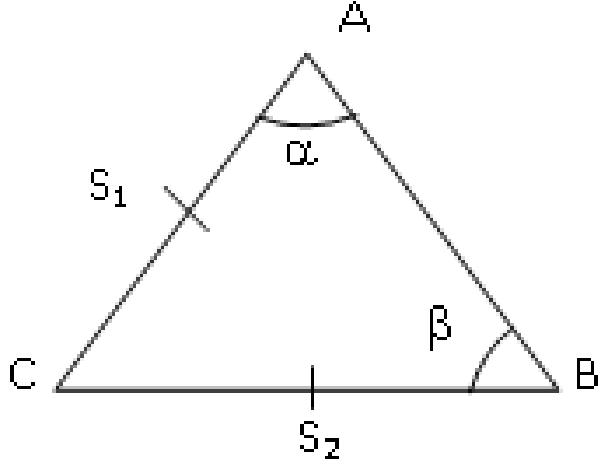
b)

$$\mathbf{Q}_{yy} = \mathbf{F} \mathbf{Q}_{ll} \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 1,9105 & 1,6555 \\ 1,6555 & 1,7780 \end{bmatrix}$$
$$\sigma_x = \sigma_0 \sqrt{Q_{xx}} = 10,951 * \sqrt{1,9105} = 15,136 \text{ mm}$$
$$\sigma_y = \sigma_0 \sqrt{Q_{yy}} = 10,951 * \sqrt{1,7780} = 14,602 \text{ mm}$$
$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_{xx} Q_{yy}}}$$
$$\rho_{xy} = \frac{1,6555}{\sqrt{1,9105 \times 1,7780}} = 0,90$$



Örnek-6: *Varyans-kovaryans yayılma kuralı*

2012-Sınav sorusu



Bir üçgene ilişkin S_1 ve S_2 kenarları ve α açısı ölçülmüştür.

Ölçüler ve standart sapmaları aşağıda verilmektedir;

$S_1 = 500,230$ m, $S_2 = 1500,260$ m ; $\sigma_S = 3 + 5$ ppm
 $\alpha = 100,0261$ gon ve $\sigma_\alpha = 1,0$ mgon

β açısını ve standart sapmasını belirleyiniz.

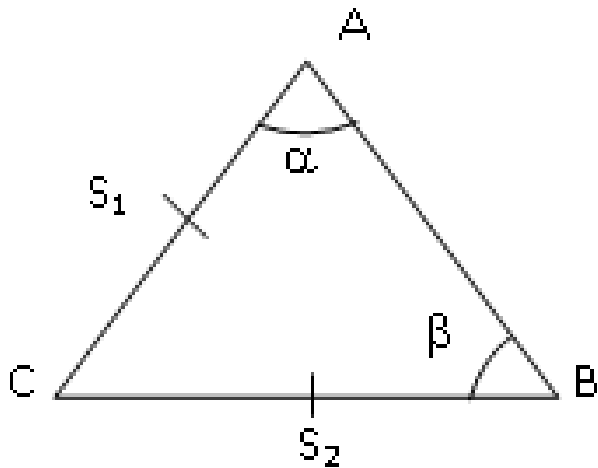


Örnek-6: *Varyans-kovaryans yayılma kuralı*

Çözüm:

$$\ell = [S_1 \ S_2 \ \alpha]^T$$

$$\mathbf{C}_{ll} = \begin{bmatrix} \sigma_{S_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{S_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\alpha}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30,26 & 0 & 0 \\ 0 & 110,28 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\frac{S_2}{\sin \alpha} = \frac{S_1}{\sin \beta}$$

→

$$\beta = \arcsin\left(\frac{S_1 \sin \alpha}{S_2}\right) = 21,6411 \text{ gon}$$

Birimler → Uzunluklar (mm)

Açılar (mgon)



Örnek-6: *Varyans-kovaryans yayılma kuralı*

Çözüm:

Birimler → Uzunluklar (mm)

Açılar (mgon)

$$\beta = \arcsin\left(\frac{S_1 \sin \alpha}{S_2}\right)$$

$$d\beta = \left(\frac{\frac{\sin \alpha}{S_2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_1 \sin \alpha}{S_2}\right)^2}} \right) dS_1 + \left(\frac{-\frac{S_1 \sin \alpha}{S_2^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_1 \sin \alpha}{S_2}\right)^2}} \right) dS_2 + \left(\frac{\frac{S_1 \cos \alpha}{S_2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_1 \sin \alpha}{S_2}\right)^2}} \right) d\alpha$$



Örnek-6: *Varyans-kovaryans yayılma kuralı*

Çözüm:

$$d\beta = 0,0450dS_1 - 0,0150dS_2 - 0,0001d\alpha$$

- $\sigma_{\beta}^2 = (0,0450)^2 \sigma_{S_1}^2 + (0,0150)^2 \sigma_{S_2}^2 + (0,0001)^2 \sigma_{\alpha}^2$
 $\sigma_{\beta}^2 = 0,0861 \text{ mgon}^2 \rightarrow \sigma_{\beta} = 0,29 \text{ mgon}$

- $\mathbf{a} = [0,0450 \quad -0,0150 \quad -0,0001]$

$$\sigma_{\beta}^2 = \mathbf{a} \mathbf{C}_{\Pi} \mathbf{a}^T = [0,0861] \rightarrow \sigma_{\beta} = 0,29 \text{ mgon}$$

Birimler → Uzunluklar (mm)

Açılar (mgon)



Varyans yayılma kuralı



Ders duyuruları, soru ve görüşleriniz için:



Prof. Dr. Uğur DOĞAN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/dogan>

dogan@yildiz.edu.tr



Prof. Dr. Cüneyt AYDIN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/caydin>

caydin@yildiz.edu.tr; caydin78@gmail.com



Dr. Öğretim Üyesi Deniz ÖZ DEMİR

<https://avesis.yildiz.edu.tr/denizoz>

denizoz@yildiz.edu.tr

