



Parametre Kestirimi: Dengeleme Hesabı/Dolaylı Ölçüler Dengelemesi

Prof. Dr. U. DOĞAN , Prof. Dr. C. AYDIN, Dr. Öğr . Üyesi D. ÖZ DEMİR

YTÜ-Harita Mühendisliği Bölümü, Jeodezi Anabilim Dalı
İstanbul, Kasım 2020

Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/*Temel Aşamalar*

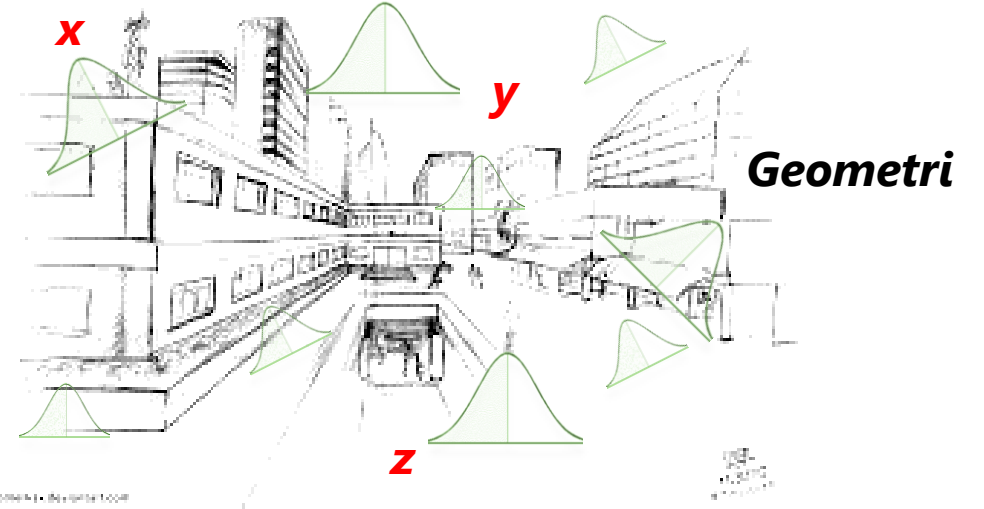
1. Dengeleme hesabında en önemli aşama «**TEMEL EŞİTLİKLER**» adı verilen eşitliklerin kurulmasıdır. «**Ölçü+Düzeltilmesi=Bilinmeyenlerin Fonksiyonu**» yapısındaki temel eşitlikler, ölçülerin bilinen geometriye nasıl uyması gerektiğini ifade eder.
2. Temel eşitliklerden «**DÜZELTME DENKLEMLERİ**» adı verilen denklem sistemine ulaşılır.
3. Düzeltme denklemlerinden « $[pvv] = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ » fonksiyonunu minimum yapan bilinmeyenlere ait **NORMAL DENKLEMLER** oluşturulur.
4. Normal denklemler çözülür.

Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/*Temel Eşitlikler*

Ölçüler
($L_i, i = 1, 2, \dots, n$)



$$L_i + v_i = f_i(x, y, z, \dots)$$



ÖLÇÜ+DÜZELTMESİ

=

BİLİNMEYENLERİN FONK.

$$L_i + v_i$$

$$f_i(x, y, z, \dots)$$

Dengeleme

Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/*Temel Eşitlikler*

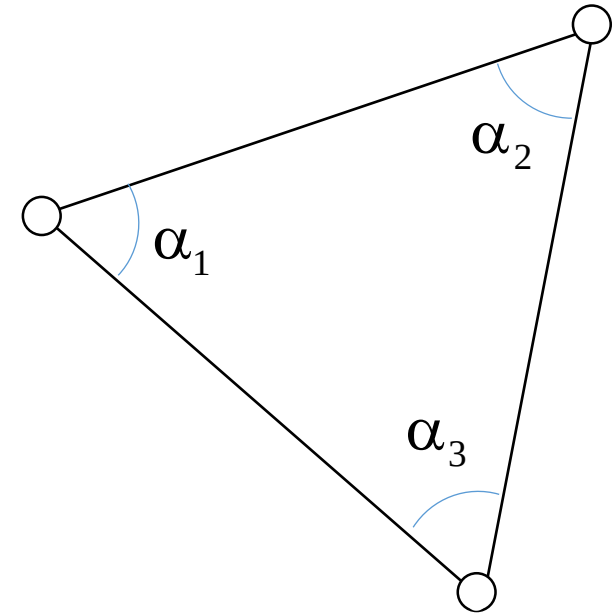
- Şekildeki **üçgende** gösterilen açı ölçüleri hatalı büyüklüklerdir. Bu nedenle kapanma, « $w=200-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0$ » **çıkamaz**. Bu sonuç, elimizdeki ölçülerin başka bir geometriyi (bu örnekte bir çokgeni) anlattığını gösterir ve «üçgen» geometrik ön bilgisi ile **çelişir**. Bu açılar bir üçgen özelliğini sağlayacak şekilde düzeltilmelidir. Bunun için aşağıdaki temel eşitlikler düşünülür:

$$\alpha_1 + v_1 = x$$

$$\alpha_2 + v_2 = y$$

$$\alpha_3 + v_3 = 200 - (x + y)$$

Üçüncü açının x ve y bilinmeyenlerine bağlı olarak böyle çıkması gerektiğini ifade eder.



Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/*Serbestlik Derecesi*

$$\alpha_1 + v_1 = x$$

$$\alpha_2 + v_2 = y$$

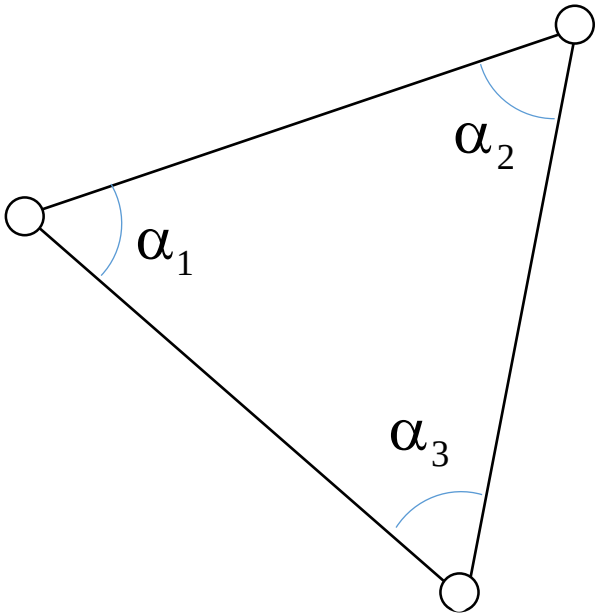
$$\alpha_3 + v_3 = 200 - (x + y)$$

- Bilinmeyen sayısı u ile gösterilir. (Bu örnekte $u=2$ 'dir).
- Ölçü sayısı n ile gösterilir (Bu örnekte $n=3$ 'tür).
- Dengeleme yapabilmek için fazla ölçü sayısı (***serbestlik derecesi***);

$$***f = n - u > 0***$$

olmalıdır.

Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/ *Temel Eşitlikler+Serbestlik Derecesi*



$$\alpha_1 \rightarrow x$$

$$\alpha_2 \rightarrow y$$

$$\alpha_3 = 200 - (x + y)$$

Temel Eşitlikler

$$\alpha_1 + v_1 = x$$

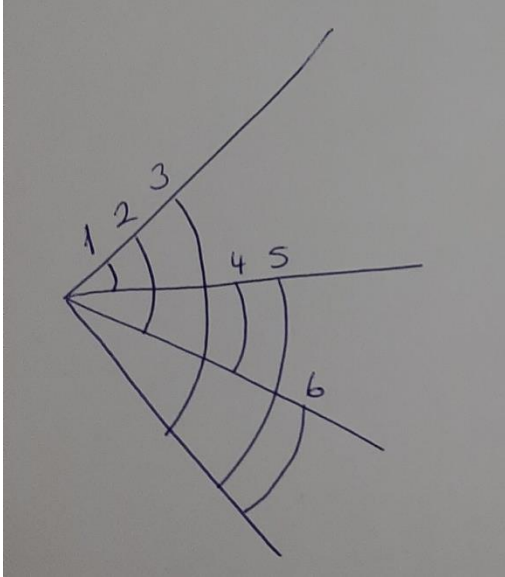
$$\alpha_2 + v_2 = y$$

$$\alpha_3 + v_3 = 200 - (x + y)$$

- Bilinmeyen sayısı $u=2$
- Ölçü sayısı $n=3$
- Dengeleme yapabilmek için fazla ölçü sayısı (**serbestlik derecesi**);

$$\mathbf{f=n-u=3-2=1}$$

Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/ *Temel Eşitlikler+Serbestlik Derecesi*



$$L_1 \rightarrow x$$

$$L_4 \rightarrow y$$

$$L_6 \rightarrow z$$

$$L_2 = x + y$$

$$L_3 = x + y + z$$

$$L_5 = y + z$$

Temel Eşitlikler

$$L_1 + v_1 = x$$

$$L_2 + v_2 = x + y$$

$$L_3 + v_3 = x + y + z$$

$$L_4 + v_4 = y$$

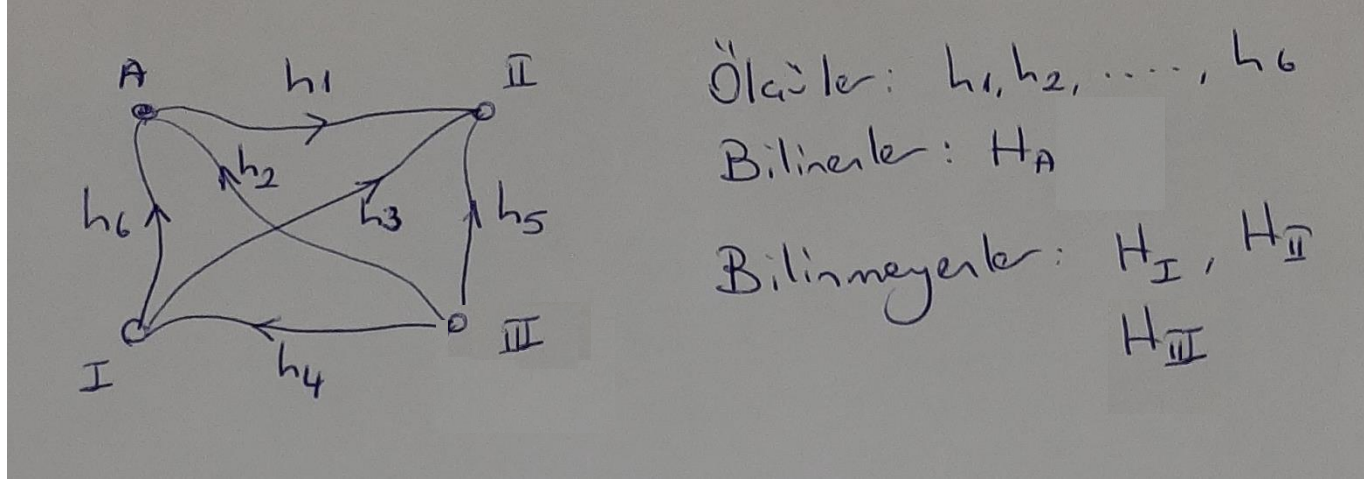
$$L_5 + v_5 = y + z$$

$$L_6 + v_6 = z$$

- Bilinmeyen sayısı $u=3$
- Ölçü sayısı $n=6$
- Dengeleme yapabilmek için fazla ölçü sayısı (**serbestlik derecesi**);

$$f = n - u = 6 - 3 = 3$$

Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/ *Temel Eşitlikler+Serbestlik Derecesi*



- Bilinmeyen sayısı $u=3$
- Ölçü sayısı $n=6$
- Dengeleme yapabilmek için fazla ölçü sayısı (**serbestlik derecesi**);

$$f=n-u=6-3=3$$



Nivelman ağlarında yeni noktaların yükseklikleri (burada I ve II noktalarının yükseklikleri) her zaman bilinmeyendir.

Temel Eşitlikler

$$H_I \rightarrow x$$

$$H_{II} \rightarrow y$$

$$H_{III} \rightarrow z$$

$$h_1 + v_1 = y - H_A$$

$$h_2 + v_2 = H_A - z$$

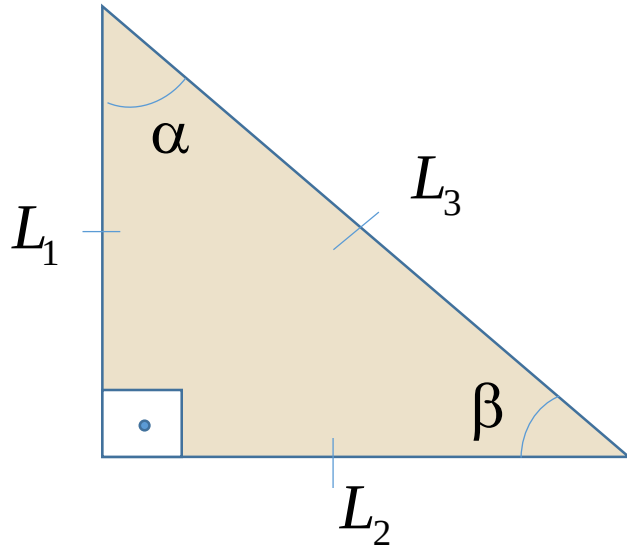
$$h_3 + v_3 = y - x$$

$$h_4 + v_4 = x - z$$

$$h_5 + v_5 = y - z$$

$$h_6 + v_6 = H_A - x$$

Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/ *Temel Eşitlikler+Serbestlik Derecesi*



- Bilinmeyen sayısı $u=2$
- Ölçü sayısı $n=5$
- Dengeleme yapabilmek için fazla ölçü sayısı (**serbestlik derecesi**);

$$L_1 \rightarrow x, L_2 \rightarrow y$$

Temel Eşitlikler

$$L_1 + v_1 = x$$

$$L_2 + v_2 = y$$

$$L_3 + v_3 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\alpha + v_\alpha = \arctan(y / x)$$

$$\beta + v_\beta = \arctan(x / y)$$

$$f = n - u = 5 - 2 = 3$$



Bu dik üçgen örneğinde 2 elemanın ölçülmesi yeterlidir.

Ancak, hangi ikiliyi bilinmeyen almak gerekir?

Burada, diğer elemanlar için en kolay fonksiyonları verecek ikiliyi seçmenin sonraki işlemlerde (türev almada) faydası vardır. Örneğin, α açısı x ve L_3 kenarı y olacak şekilde seçilirse, problem daha basit hale gelir. Bu durumda temel eşitlikler şöyle olur:

$$L_1 + v_1 = y \cos x$$

$$L_2 + v_2 = y \sin x$$

$$L_3 + v_3 = y$$

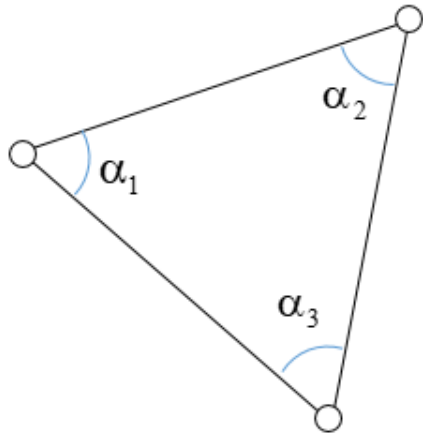
$$\alpha + v_\alpha = x$$

$$\beta + v_\beta = 100 \text{ gon} - x$$

Her iki çözümde düzeltmeler değişmez.

Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/*Düzeltilme Denklemleri*

- Temel eşitliklerde geçen bilinmeyenler iki parçaya ayrılır:



$$x = x_0 + \delta x$$

$$y = y_0 + \delta y$$

Yaklaşık Değer

Küçültülmüş Bilinmeyen

Düzeltilme Denklemleri

$$\alpha_1 + v_1 = x$$

$$\alpha_2 + v_2 = y$$

$$\alpha_3 + v_3 = 200 - (x + y)$$

$$v_1 = \delta x + (x_0 - \alpha_1)$$

$$v_2 = \delta y + (y_0 - \alpha_2)$$

$$v_3 = -\delta x - \delta y + (200 - x_0 - y_0 - \alpha_3)$$

Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/*Düzeltilme Denklemleri*

$$\begin{aligned}v_1 &= \delta x + (x_0 - \alpha_1) \\v_2 &= \delta y + (y_0 - \alpha_2) \\v_3 &= -\delta x - \delta y + (200 - x_0 - y_0 - \alpha_3)\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\alpha_1 - x_0) \\ (\alpha_2 - y_0) \\ (\alpha_3 - (200 - x_0 - y_0)) \end{bmatrix}$$

Düzeltilme vektörü

v

Katsayılar Matrisi

A

Küçültülmüş Bilinmeyenler Vektörü

x

Küçültülmüş Ölçüler Vektörü

l

Düzeltilme Denklemleri

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ax} - \mathbf{l}$$

Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/*Dengelemenin Matematiksel Modeli*

Düzeltilme Denklemleri: **Fonksiyonel Model**

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ax} - \mathbf{l}$$

Ölçülerin Ağırlık Matrisi: **Stokastik Model**

$$\mathbf{P} = \sigma_0^2 \mathbf{C}_{ll}^{-1}$$

Dengelemenin Matematiksel Modeli

Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/*Normal Denklemler*

EKK Temel İlkesi

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \rightarrow \min.$$

(Minimum yapan x 'in bulunması problemi)

$$\frac{\partial \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}^T} = \mathbf{0}$$

Normal Denklemler

$$\mathbf{N} \mathbf{x} - \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Normal Denklemler Katsayılar Matrisi ($u \times u$)

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$$

Yalın Terim Vektörü ($u \times 1$)

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$$

Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/*Normal Denklemlerin Çözümü*

$$\mathbf{N}\mathbf{x} - \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{N}$ her zaman simetrik ve kare matristir; $\det(\mathbf{N}) \neq 0$

Normal Denklemlerin Çözümü

$$\mathbf{N}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{n}$$

$$\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{Q}_{xx}$$

$\mathbf{N}$ 'nin tersi, bilinmeyenlerin kofaktör matrisine eşittir.

(İspatı için bkz. →)

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}_{xx}\mathbf{n}$$

Küçültülmüş Bilinmeyenler Vektörü

Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/ Q_{xx} (İspat)

$$\boxed{\mathbf{N}\mathbf{x} - \mathbf{n} = \mathbf{0}} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{n} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{l}$$

Kofaktör yayılma kuralı

$$\mathbf{Q}_{xx} = (\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P})\mathbf{Q}_{ll}(\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1})$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \rightarrow \mathbf{Q}_{ll} = \mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{N}^{-1} \quad \checkmark$$

Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/*Bilinmeyenler*



Jeodezik ağ dengelemesinde koordinatlar bilinmeyen olarak ele alınır. Dengeleme sonrasında bu bilinmeyenler **dengeli koordinatlar** olarak adlandırılır.

Küçültülmüş Bilinmeyenler Vektörü

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \vdots \end{bmatrix}$$



Bilinmeyenler

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \delta x \\ y &= y_0 + \delta y \\ &\vdots \end{aligned}$$



Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/*Düzeltilmeler ve s_0*

Düzeltilme vektörü

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ax} - \mathbf{l} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

*Düzeltilmelerin Ağırlıklı
Karelerinin Toplamı*

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = [Pvv]$$

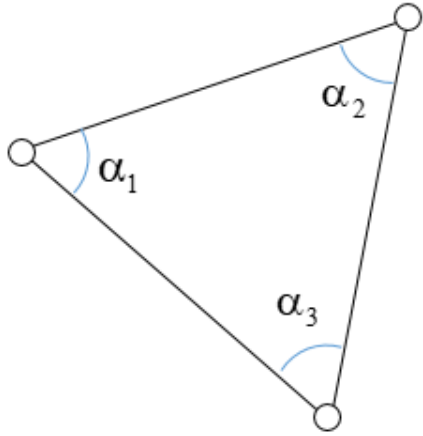
Hesap Kontrolü

$$[Pvv] \stackrel{?}{=} \mathbf{l}^T \mathbf{P} \mathbf{l} - \mathbf{n}^T \mathbf{x}$$

*Birim Ağırlıklı Ölçünün
Standart Sapması*

$$s_0 = \sqrt{\frac{[Pvv]}{f}}$$

Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/*Bilinmeyenlerin Standart Sapmaları*



Bilinmeyenlerin Ağırlık Katsayıları Matrisi

$$\mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{yy} \end{bmatrix}$$

Bilinmeyenlerin St. Sapmaları

$$s_x = s_0 \sqrt{Q_{xx}}$$

$$s_y = s_0 \sqrt{Q_{yy}}$$

Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/ *Dengeli Ölçüler ve Dengelemenin Ana Denetimi*

Dengeli Ölçüler:

$$\bar{L}_1 = L_1 + v_1$$

$$\bar{L}_2 = L_2 + v_2$$

$\vdots$

$$\bar{L}_n = L_n + v_n$$

?

=

Bilinmeyenlerin Temel Eşitliklerdeki Fonksiyonu:

$$L_1 + v_1 = f_1(x, y, z)$$

$$L_2 + v_2 = f_2(x, y, z)$$

$\vdots$

$$L_n + v_n = f_n(x, y, z)$$

Dengeleme sonucunda hesaplanan bilinmeyenler

Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/ *Bilinmeyenlerin Fonksiyonlarının Kovaryans Matrisi*

Bilinmeyenlerin Fonksiyonları

$$K_1 = F_1(x, y, z)$$

$$K_2 = F_2(x, y, z)$$

$\vdots$

$$K_m = F_m(x, y, z)$$



Katsayılar Matrisi

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} (\partial F_1 / \partial x)_0 & (\partial F_1 / \partial y)_0 & (\partial F_1 / \partial z)_0 \\ (\partial F_2 / \partial x)_0 & (\partial F_2 / \partial y)_0 & (\partial F_2 / \partial z)_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\partial F_m / \partial x)_0 & (\partial F_m / \partial y)_0 & (\partial F_m / \partial z)_0 \end{bmatrix}$$

Fonksiyonların Kovaryans Matrisi

$$\mathbf{C}_{KK} = s_0^2 (\mathbf{F} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{F}^T) = \mathbf{F} \mathbf{C}_{xx} \mathbf{F}^T$$

Dolaylı Ölçüler Dengelemesi/ *Dengeli Ölçülerin Standart Sapmaları*

Dengeli Ölçülerin ($\bar{L} = L + v$)
Ağırlık Katsayıları Matrisi

$$\bar{Q}_{ll} = A Q_{xx} A^T$$

i. Dengeli Ölçünün Standart Sapması

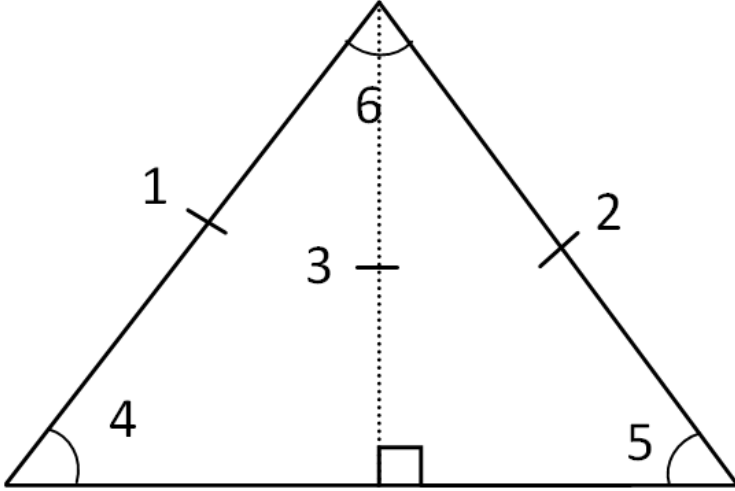
$$\bar{s}_i = s_0 \sqrt{\bar{Q}_{ii}}$$

Dengeli ölçünün ağırlık katsayısı
(Dengeli ölçülerin ağırlık katsayıları matrisinin
i. köşegen elemanı)

Hesap Kontrolü

$$[P\bar{Q}] = u$$

Örnek-1: *Düzeltilme Denklemlerinin Oluşturulması*



Şekildeki ikizkenar üçgenin eşit kenarları, açıları ve yüksekliği ölçülmüştür.

$\mathbf{v} = \mathbf{Ax} - \mathbf{l}$ düzeltme denklemlerini yazınız.

i	L_i
1	118,316 m
2	118,304 m
3	70,656 m
4	40,7516 gon
5	40,7532 gon
6	118,4934 gon

Örnek-1: *Düzeltilme Denklemlerinin Oluşturulması*

ÇÖZÜM:

$$n=6; u=2$$
$$f=n-u=6-2=4>0$$

$$L_1 \rightarrow x ; x = x_0 + \delta_x$$

$$L_4 \rightarrow y ; y = y_0 + \delta_y$$

$$x_0 = L_1 = 118,316 \text{ m}$$

$$y_0 = L_4 = 40,7516 \text{ gon}$$

Uzunluklar → mm
Açılar → mgon

Ölçü+ Düzeltmesi = Bil. Fonk.

Düzeltilme Denklemleri:

$$\begin{array}{lll} L_1 + V_1 = x & \rightarrow v_1 = & \delta x \quad + (x_0 - L_1) \\ L_2 + V_2 = x & \rightarrow v_2 = & \delta x \quad + (x_0 - L_2) \\ L_3 + V_3 = x \sin y & \rightarrow v_3 = & \sin y_0 \delta x + x_0 \cos y_0 \delta y / \rho + (x_0 \sin y_0 - L_3) \\ L_4 + V_4 = y & \rightarrow v_4 = & \delta y \quad + (y_0 - L_4) \\ L_5 + V_5 = y & \rightarrow v_5 = & \delta y \quad + (y_0 - L_5) \\ L_6 + V_6 = 200 - 2y & \rightarrow v_6 = & -2\delta y \quad + (200 - 2y_0 - L_6) \end{array}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{l}$$

Örnek-1: *Düzeltilme Denklemlerinin Oluşturulması*

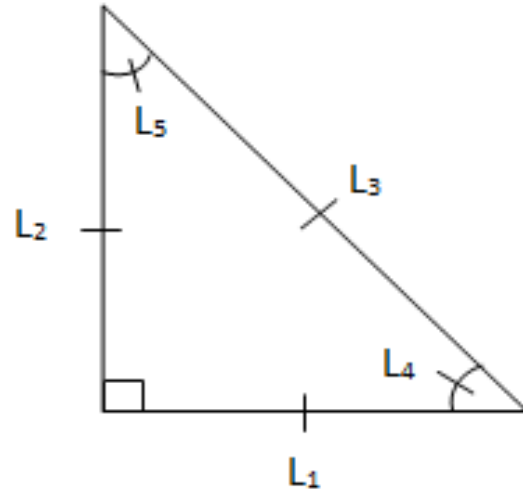
ÇÖZÜM:

Uzunluklar → mm
Açılar → mgon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0,60 & 1,49 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \quad -\mathbf{l} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 13,6 \\ 0 \\ -1,6 \\ 3,4 \end{bmatrix}$$

Örnek-2 : *Düzeltilme Denklemleri ve Ağırlıkların Oluşturulması*

2019, 2. vize sınav sorusu



Şekildeki dik üçgende işaretli elemanlar ölçülmüştür.

i	L_i	σ_{L_i}
1	512,265 m	2 cm
2	625,313 m	1 cm
3	808,341 m	1 cm
4	56,3062 gon	1 mgon
5	43,6932 gon	2 mgon
$(\sigma_0 = 1 \text{ mgon})$		

Düzeltilme denklemlerini ve ağırlık matrisini oluşturunuz.

Örnek-2 : *Düzeltilme Denklemleri ve Ağırlıkların Oluşturulması*

ÇÖZÜM: $n=5$; $u=2$; $f=n-u$; $f=5-2=3 > 0$ dengeleme vardır.

Uzunluklar $\rightarrow$ cm
Açılar $\rightarrow$ mgon

$x \rightarrow L_1$; $y \rightarrow L_2$ olsun.

Ölçü+ Düzeltmesi = Bil. Fonk.

$$\begin{aligned} L_1 + V_1 &= x \\ L_2 + V_2 &= y \\ L_3 + V_3 &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ L_4 + V_4 &= \arctan(y/x) \\ L_5 + V_5 &= \arctan(x/y); \end{aligned}$$

Düzeltilme Denklemleri:

$$\begin{aligned} V_1 &= \delta x & + (x_0 - L_1) \\ V_2 &= \delta y & + (y_0 - L_2) \\ V_3 &= \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \delta x + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \delta y & + (\sqrt{x_0^2 + y_0^2} - L_3) \\ V_4 &= \frac{-y_0}{x_0^2 + y_0^2} \rho \delta x + \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2} \rho \delta y & + (\arctan(\frac{y_0}{x_0}) - L_4) \\ V_5 &= \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2} \rho \delta x - \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2} \rho \delta y & + (\arctan(\frac{x_0}{y_0}) - L_5) \end{aligned}$$

Örnek-2: *Düzeltilme Denklemleri ve Ağırlıkların Oluşturulması*

ÇÖZÜM:

Uzunluklar → cm
Açılar → mgon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0,6337 & 0,7736 \\ -0,6092 & 0,4991 \\ 0,6092 & -0,4991 \end{bmatrix}; -\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,0270 \\ -0,4279 \\ 1,0279 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \text{diag}(0,2500 \text{ mgon}^2/\text{cm}^2 \quad 1,0000 \text{ mgon}^2/\text{cm}^2 \quad 1,0000 \text{ mgon}^2/\text{cm}^2 \quad 1,0000 \quad 0,2500)$$

Ders duyuruları, soru ve görüşleriniz için:



Prof. Dr. Uğur DOĞAN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/dogan>

dogan@yildiz.edu.tr



Prof. Dr. Cüneyt AYDIN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/caydin>

caydin@yildiz.edu.tr; caydin78@gmail.com



Dr. Öğretim Üyesi Deniz ÖZ DEMİR

<https://avesis.yildiz.edu.tr/denizoz>

denizoz@yildiz.edu.tr

