



Hata ve Güven Elipsi

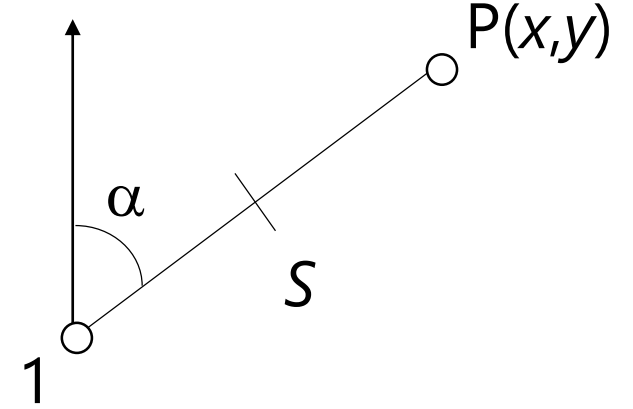
Prof. Dr. U. Doğan & Prof. Dr. C. Aydın

YTÜ-Harita Mühendisliği Bölümü, Jeodezi Anabilim Dalı
İstanbul, Mart 2021

Hata ve Güven Elipsi / *Konum Hatası ve Önemi*

- **Hata Kuramı ve Parametre Kestirimi** dersinde yandaki şekilde gösterilen bir konum belirleme probleminde P noktasının konum hatasının aşağıdaki biçimde olduğu gösterilmişti (bkz. [HataKuramı3.pdf](#))

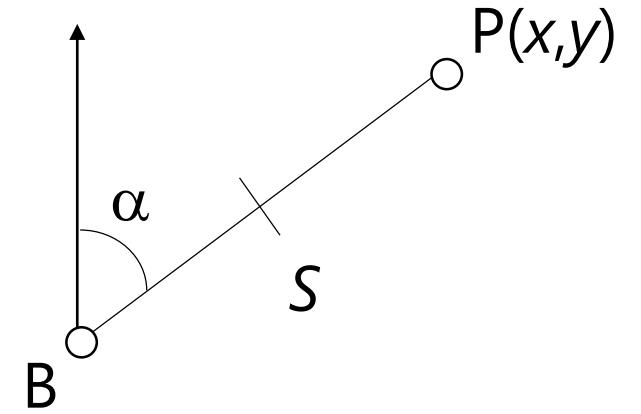
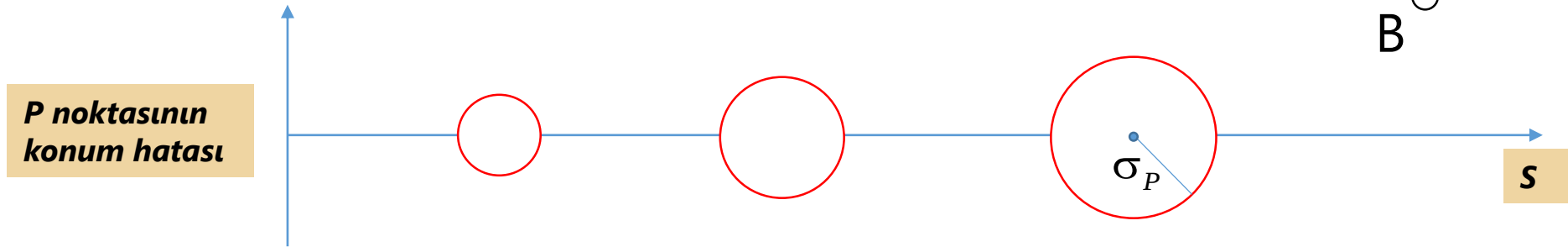
$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2 + \sigma_S^2 + \frac{S^2}{\rho^2} \sigma_\alpha^2}$$



- P noktasının konum hatası, 1 noktasının konum hatasına, S ve α 'nın standart sapmalarına ve S'nin büyüklüğüne bağlıdır; α **dönüklük açısına bağlı değildir**. Son özellik (izotropi özelliği), dönüklükten bağımsız olarak nokta konum doğruluğunu ölçmemize yarar; böylece, nesnel olarak nokta doğruluğunun ifade edilebilmesini sağlar. Diğer yandan, nokta x ve y koordinat standart sapmaları bu özelliğe sahip değildir. Bu nedenle, yatay ve üç boyutlu ağlarda doğruluk, genellikle, konum hatası ile belirtilir.
- Her ne kadar konum hatası eşitliği yukarıda değinilen nedenle önemli olsa da, nokta koordinatlarının hata alışverişini, yani korelasyonunu içermez. Bu amaçla, yatay ağlarda **hata elipsi** ve bunun belli istatistiki güven düzeylerine karşılık ölçeklendirilmiş biçimi olan **güven elipsi** düşünülür.

Hata ve Güven Elipsi / *Konum Hatası ve Önemi*

- Yandaki konum belirleme probleminde açı ve kenar belirleme doğruluğu arttıkça konum doğruluğu artar. Ancak en önemli parametre aradaki S uzunluğudur. A noktasından uzaklaştıkça yeni noktanın konum hatası artar; yani, konum doğruluğu düşer.

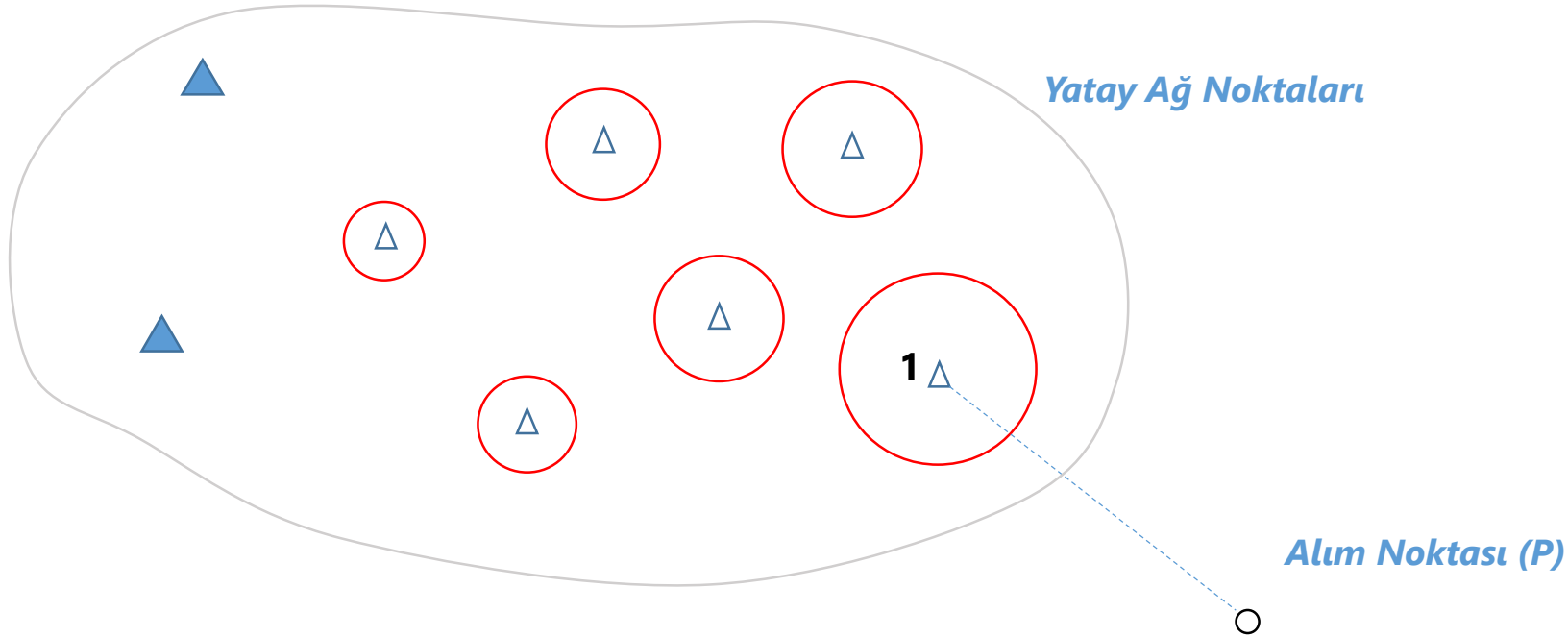


- Yatay ağırlarda da böyledir; ***sabit alınan nokta ya da noktalardan uzaklaştıkça konum hatası artar.*** (Elbette, bu özellik, yukarıdaki temel ödevdeki gibi doğrusal bir fonksiyonla hemen açıklanamaz).



Hata ve Güven Elipsi / *Konum Hatası ve Önemi*

Sabit alınan noktalardan (datumdan) uzaklaştıkça konum hatası artar.



$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2 + \sigma_S^2 + \frac{S^2}{\rho^2} \sigma_\alpha^2}$$

eşitliğine göre alım noktasının konum hatası ne olur?



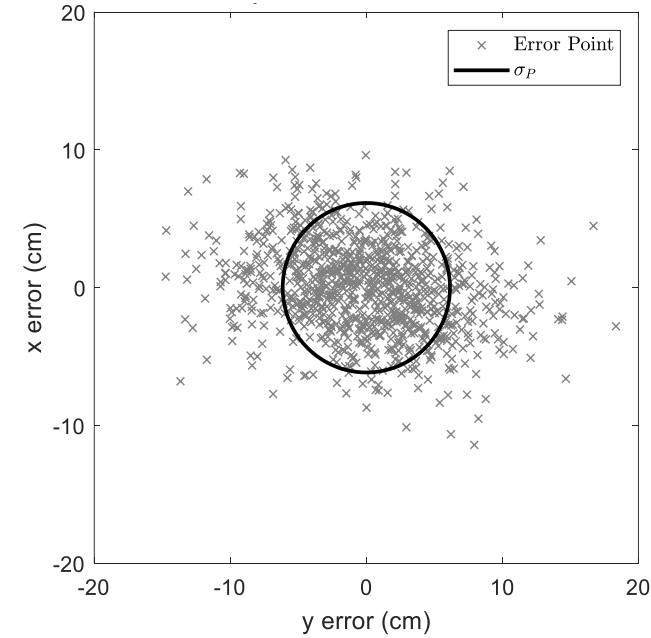
Hata ve Güven Elipsi

Konum Hatası Dairesi? Hata Elipsi?

Yandaki grafikte koordinatları (0,0) olan bir noktanın aynı koşullarda elde edilen koordinatları (x ve y hataları) işaretlenmiştir (× sembolü ile). **Bu nokta bulutu bir elipsi göstermektedir.** Noktanın kovaryans matrisinin köşegen elemanlarının toplamından elde edilen konum hatası yarıçapındaki hata dairesi, bu nokta bulutunun bir kısmını içerir (yaklaşık olarak %39'unu). Daha da önemlisi, nokta bulutundaki basıklığı yani x ve y koordinatları arasındaki korelasyonu ifade edemez.

Bu nokta bulutunu hem geometrik hem de istatistiki olarak daha iyi anlatabilmek için **hata elipsi** ve bunun belli olasılıklara karşılık ölçeklendirilmiş biçimi olan -örneğin nokta bulutunun %95'ini kapsayacak- **güven elipsi** gösterimleri kullanılır.

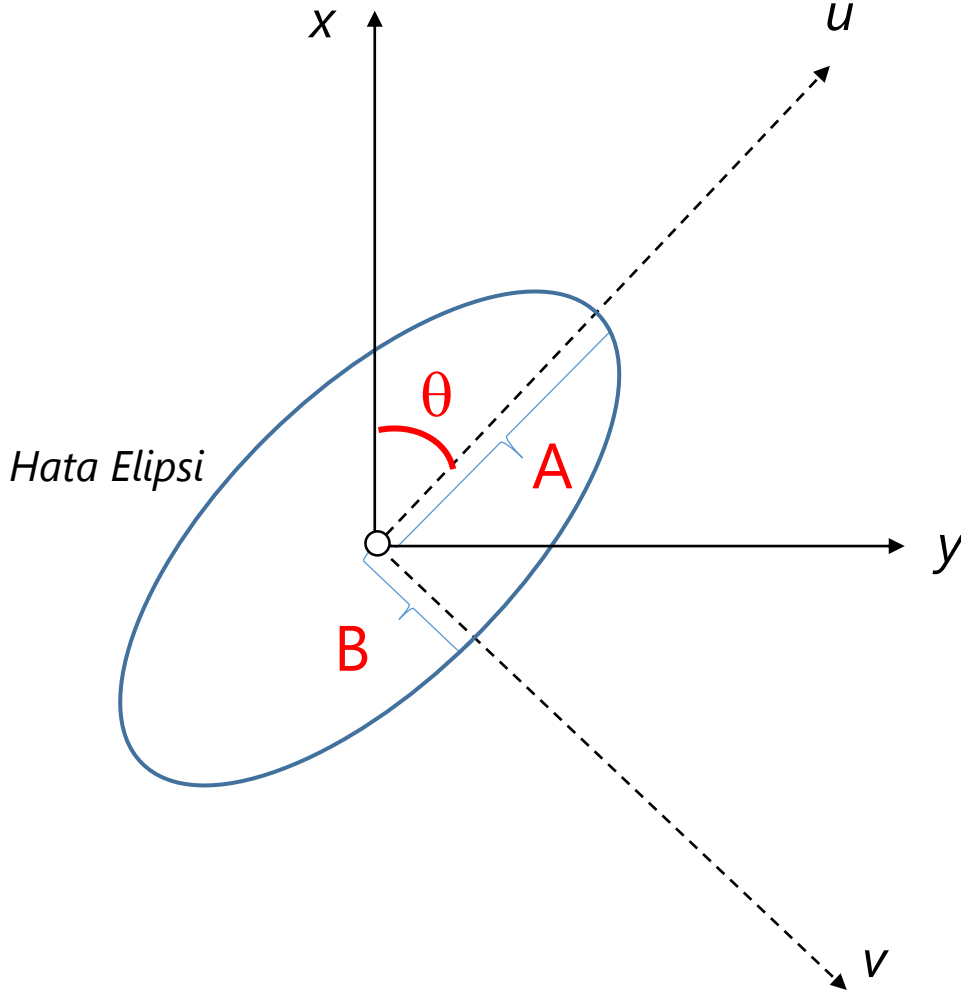
Aşağıda bu elipslerin elde edilmesi, çizimi ve jeodezik ağların tasarımındaki önemi açıklanmaktadır.



Gerçek nokta konum hataları
konum hatası dairesi



Hata ve Güven Elipsi / *Hata Elipsi Elemanları*



Hata Elips Elemanları:

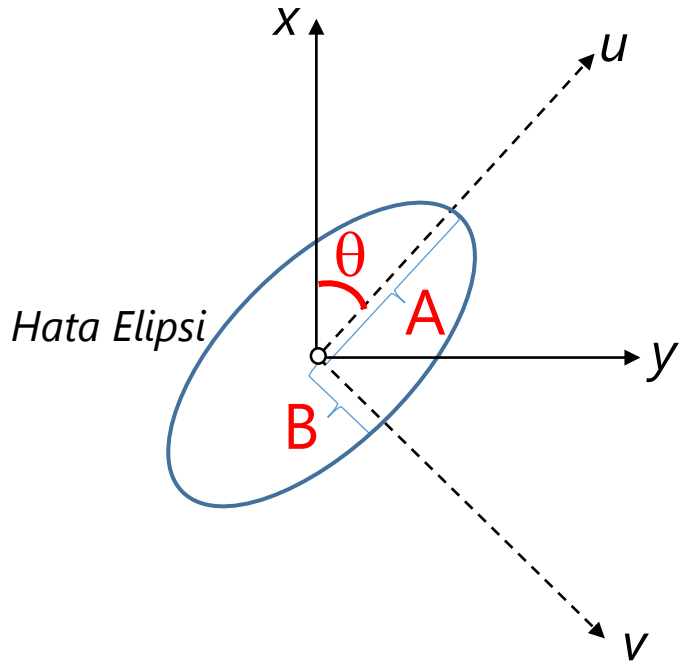
- 1) Hata Elipsinin Dönüklüğü: θ
- 2) Hata Elipsinin Büyük Yarı Ekseni: A
- 3) Hata Elipsinin Küçük Yarı Ekseni: B

Hesabı için noktanın ağırlık katsayıları matrisi ve birim ağırlıklı ölçünün standart sapması kullanılır.

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{yy} \end{bmatrix}, S_0$$



Hata ve Güven Elipsi / *Hata Elipsi Elemanları*



$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{yy} \end{bmatrix}, s_0$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \right)$$

Hesabında önce 2θ açısı, açıklık açısı bulur gibi (4 bölgeden hangisinde olduğu belirlenerek) elde edilir. Daha sonra bulunan açı 2'ye bölünür.

$$A = s_0 \sqrt{\lambda_1} = s_0 \sqrt{\frac{1}{2} (Q_{xx} + Q_{yy} + W)}$$

A, ayrıca, u eksen doğrultusunda noktanın standart sapmasıdır.

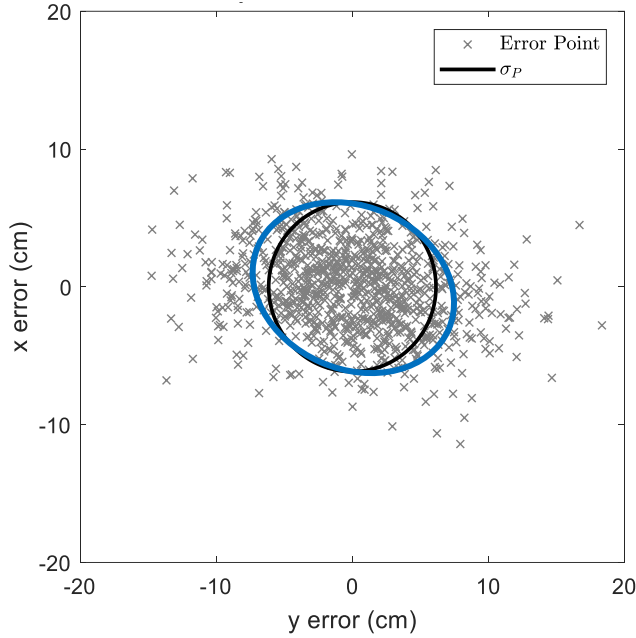
$$B = s_0 \sqrt{\lambda_2} = s_0 \sqrt{\frac{1}{2} (Q_{xx} + Q_{yy} - W)}$$

B, ayrıca, v eksen doğrultusunda noktanın standart sapmasıdır.

$$W = \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}$$



Hata ve Güven Elipsi / *Hata Elipsi*

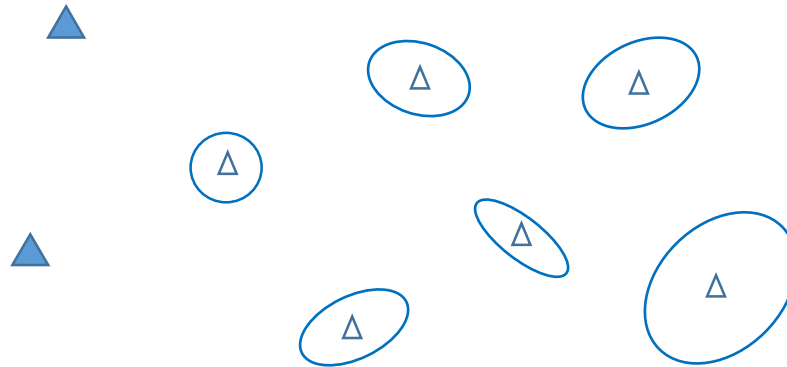


Gerçek nokta konum hataları,
konum hatası dairesi ve ***Hata Elipsi***

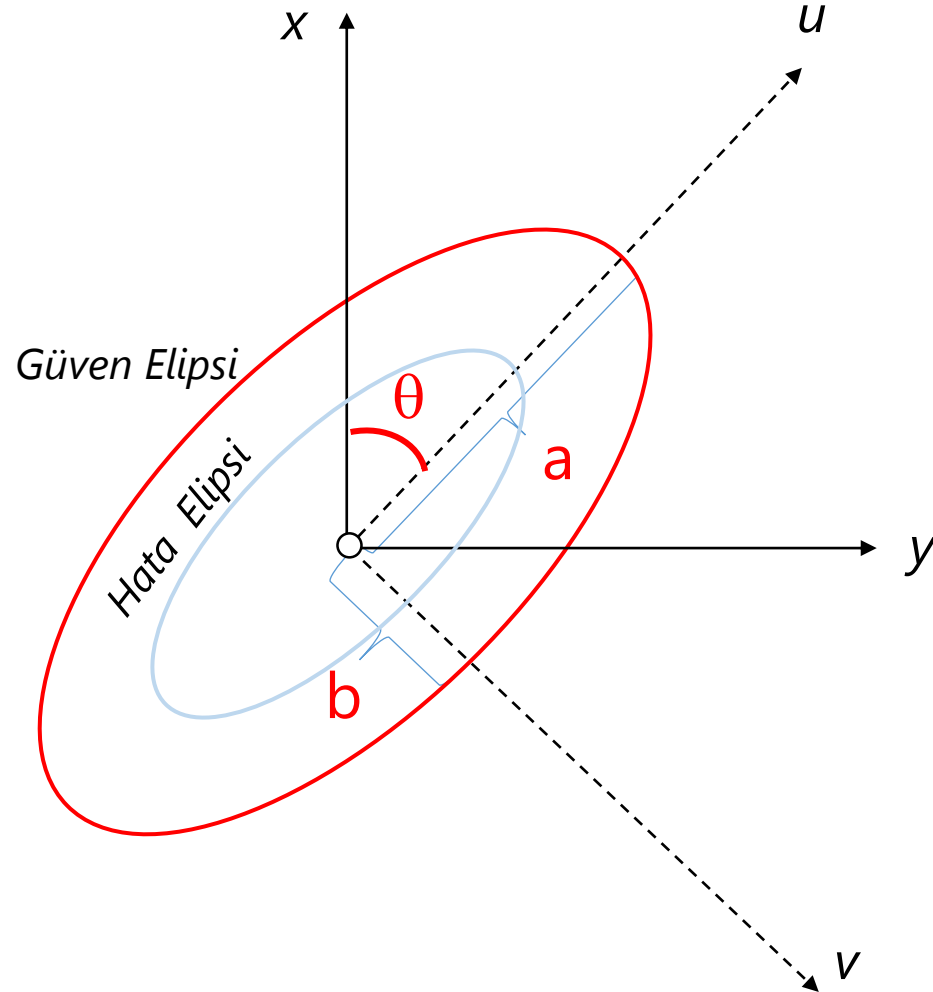
$$A^2 + B^2 = \sigma_p^2$$



- Hata elipsi, noktanın beklenen konumunun (gerçeğe yakın olduğu düşünülen konumunun) %39,4 olasılıkla bulunduğu alanı gösterir (%39,4 en yüksek olasılıktır).
- Dolayısıyla, iyi bir konumlandırmada olabildiğince küçük olmalıdır. Ayrıca, büyük ve küçük yarı eksenleri arasında çok büyük fark olmamalıdır.
- Konum hatasında olduğu gibi, sabit noktalardan uzaklaştıkça hata elipsleri büyür.



Hata ve Güven Elipsi / *Güven Elipsi Elemanları*



Güven elipsi, nokta hata dağılımını belli bir olasılıkla (örneğin **1- α =%95'lik** güven düzeyi ile) göstermek için kullanılır. Hata elipsinin eksenlerinin ölçeklendirilmesiyle elde edilir.

Güven Elips Elemanları:

1) Güven Elipsinin Dönüklüğü: θ (Hata elipsi ile özdeş)

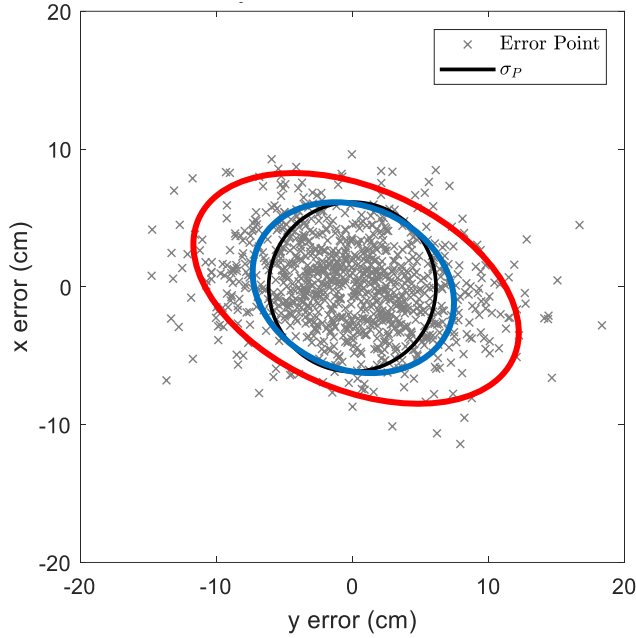
2) Güven Elipsinin Büyük Yarı Eksen: $a = A\sqrt{2F_{2,f,1-\alpha}}$

3) Güven Elipsinin Küçük Yarı Eksen: $b = B\sqrt{2F_{2,f,1-\alpha}}$

F dağılımının güven sınır değeri. 2 boyut için aşağıdaki biçimde hesaplanır:

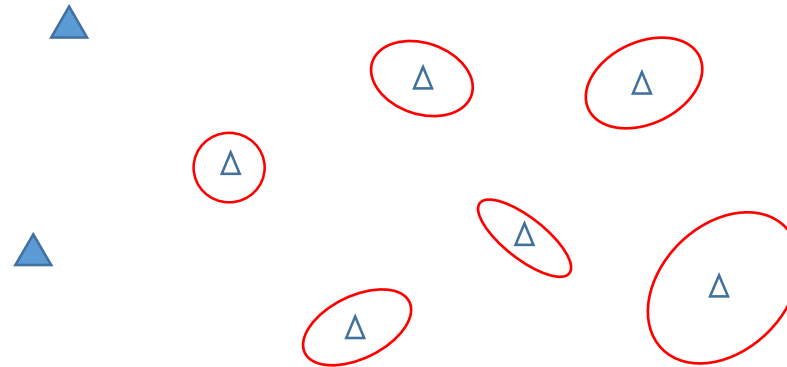
$$F_{2,f,1-\alpha} = \frac{f}{2} \left(\frac{1}{\alpha^{2/f}} - 1 \right)$$

Hata ve Güven Elipsi / *Güven Elipsi*



Gerçek nokta konum hataları,
konum hatası dairesi, *hata elipsi* ve
güven elipsi

- Güven elipsi, noktanın beklenen konumunun (gerçeğe yakın olduğu düşünülen konumunun) $1-\alpha$ olasılıkla bulunduğu alanı gösterir (genellikle, $1-\alpha=\%95$).
- Dolayısıyla, iyi bir konumlandırmada olabildiğince küçük olmalıdır. Ayrıca, büyük ve küçük yarı eksenleri arasında çok büyük fark olmamalıdır.
- Konum hatasında olduğu gibi, sabit noktalardan uzaklaştıkça güven elipsleri büyür.



Uygulama-1: *Hata ve Güven Elips Elemanlarının Hesabı (Demirel, 2009)*

UYGULAMA-1:

Serbestlik derecesi $f=10$ olan bir yatay ağ dengelemesinde 1 ve 2 no'lu noktaların ağırlık katsayıları matrisi aşağıdaki gibi elde ediliyor.

$$\mathbf{Q}_{xx} = \begin{bmatrix} 0,5357 & -0,0035 & -0,0920 & 0,0019 \\ & 0,2292 & 0,0157 & 0,0637 \\ & & 0,2571 & 0,0058 \\ & & & 0,0751 \end{bmatrix} cm^2$$

Birim ağırlıklı ölçünün standart sapması 1,3 olduğuna göre hata elipsi ve %95 olasılıklı güven elipsi elemanlarını hesaplayınız.

Uygulama-1: *Hata ve Güven Elips Elemanlarının Hesabı (Demirel, 2009)*

ÇÖZÜM:

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} 0,5357 & -0,0035 & -0,0920 & 0,0019 \\ & 0,2292 & 0,0157 & 0,0637 \\ & & 0,2571 & 0,0058 \\ & & & 0,0751 \end{bmatrix} cm^2, s_0 = 1,3$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \right) \quad W = \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}$$

$$A = s_0 \sqrt{\lambda_1} = s_0 \sqrt{\frac{1}{2} (Q_{xx} + Q_{yy} + W)} \quad a = A \sqrt{2F_{2,f,1-\alpha}}$$

$$B = s_0 \sqrt{\lambda_2} = s_0 \sqrt{\frac{1}{2} (Q_{xx} + Q_{yy} - W)} \quad b = B \sqrt{2F_{2,f,1-\alpha}}$$

NN	Q_{xx}	Q_{yy}	Q_{xy}	W	λ_1	λ_2	θ (gon)	A (cm)	B (cm)	a (cm)	b (cm)
1	0,5357	0,2292	-0,0035	0,3066	0,5357	0,2291	199,2732	0,95	0,62	2,72	1,78
2	0,2571	0,0751	0,0058	0,1824	0,2573	0,0749	2,0260	0,66	0,36	1,89	1,03

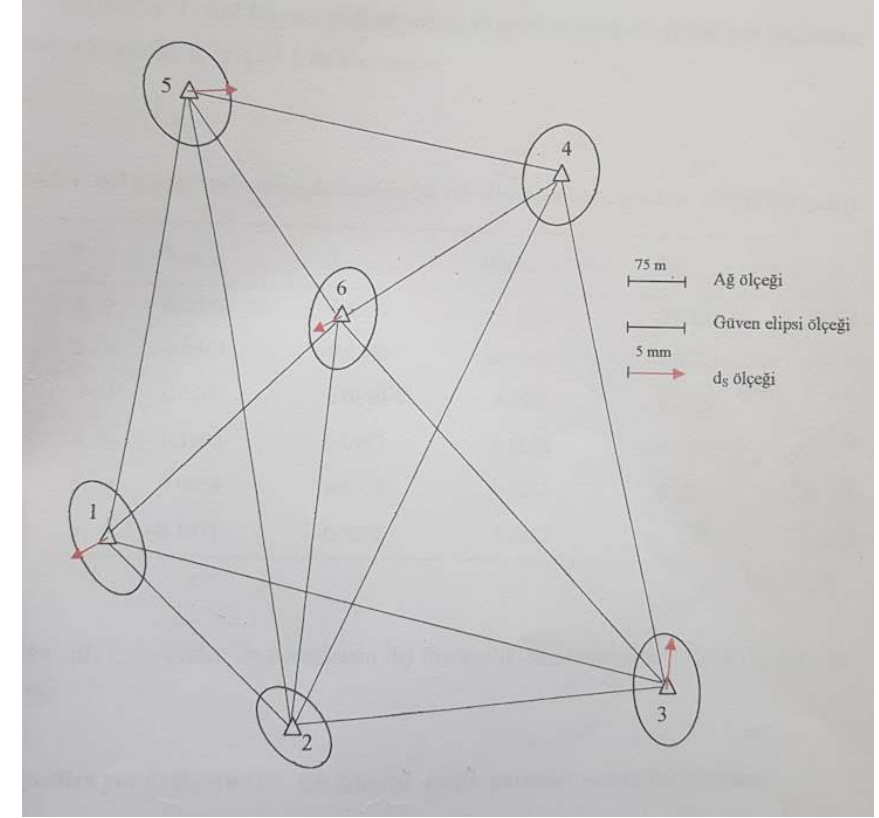
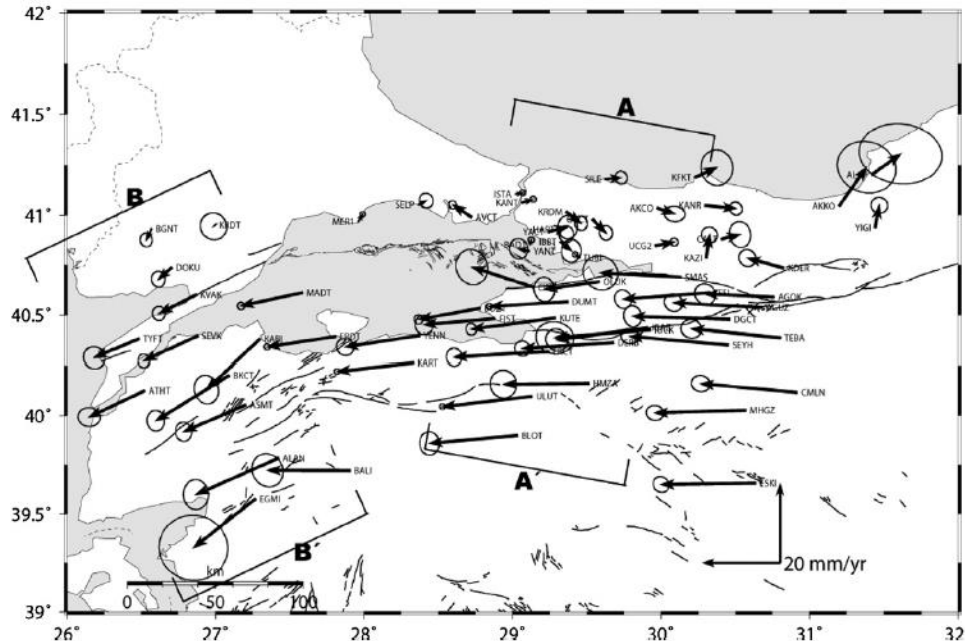
$$F_{2,f,1-\alpha} = \frac{f}{2} \left(\frac{1}{\alpha^{2/f}} - 1 \right) = \frac{10}{2} \left(\frac{1}{0,05^{2/10}} - 1 \right) = 4,1028$$

$$2\theta = \arctan \left(\frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \right) = \arctan \left(\frac{2 \times -0,0035}{0,5357 - 0,2292} \right) = 398,5463 \text{ gon} \quad (4. \text{ bölge})$$

$$\theta = \frac{398,5463}{2} = 199,2732 \text{ gon}$$

Hata ve Güven Elipsi /Çizimi

- Nokta hata ve güven elipsleri, nirengi kanavasına kanava ölçeğinden farklı bir ölçekte yandaki şekilde gösterildiği gibi çizilirler.
- Güven elipsleri deformasyon analizinde ve tektonik çalışmalarda konum değişimi ve belirlenen plaka hızlarının anlamlı olup olmadıklarını ifade etmek için çok sık kullanılırlar.



Ergintav vd. (2007)



Hata ve Güven Elipsi /*Ağ Tasarımında Kullanımı*

- Nokta hata ve güven elipslerinin belli büyüklükleri aşmaması gerekir. Bunun için bir teknik şartnamede ya da bilimsel bir araştırmada güven elipslerinin yarı eksenini 1 cm'yi aşamaz ya da en çok 5 mm olmalıdır gibi kurallar bulunabilir.
- Ağın kurulması ve ölçülmesi belli maliyeti olan ve zaman gerektiren bir iştir. Dolayısıyla ağın ölçüldükten sonra istenen boyutta elipslerin elde edilip edilmediğini kontrol etmek yerine, ağ, söz konusu şartları sağlayacak şekilde tasarlanmalıdır.
- Hata ya da güven elipsleri, noktaların ağırlık katsayıları matrisine (Q_{xx}) ve birim ağırlıklı ölçünün standart sapmasına bağlıdır. Bu elemanlar ağın tasarımı aşamasında belirlenebilir; çünkü ağırlık katsayıları matrisi ve birim ağırlıklı ölçünün standart sapması, **A** katsayılar matrisine, ağın datumuna ve **P** ağırlık matrisine bağlı elemanlardır. **A** katsayılar matrisi için yaklaşık koordinatlar yeterlidir, **P** ağırlık matrisi ise kullanılacak ölçme yönteminin prezisyonuna bağlıdır.
- Bu elemanlar deneme-yanılma yöntemiyle değiştirilerek, en uygun ölçme maliyetiyle istenen boyutlarda nokta elipslerinin elde edileceği bir tasarım yapılır. Mühendislik çalışmalarında böylesi bir optimizasyon çalışması kaçınılmazdır.



Hata ve Güven Elipsi /*Ağ Tasarımında Kullanımı*

- Ağ tasarımında nokta elipslerinin en uygunlaştırılmasında aşağıdaki kurallar önemlidir:
- ✓ Noktalara ne kadar çok ölçü bağlantısı yapılırsa hata elipsleri ve güven elipsleri o denli küçülür.
- ✓ Ölçme doğruluğu artarsa hata elipsleri ve güven elipsleri küçülür. Dolayısıyla, prezisyonu yüksek aletlerin kullanılması nokta konum doğruluğunu arttırır. (Örneğin GPS çalışmalarında gözlem süresinin arttırılması konum doğruluğunu arttırır. Tasarım aşamasında en yüksek prezisyonlu yöntem değil, en uygun yöntem kullanımına dikkat edilmelidir; yüksek prezisyon yüksek maliyettir!)
- ✓ Sabit datum noktaları ağın tek bir tarafında kalırsa, noktalardan uzaklaştıkça nokta hata ve güven elipsleri büyür. Dolayısıyla, ağı tek bir yönden temsil eden sabit noktalar yerine ağı kapsayacak şekilde sabit noktalar seçilmelidir. Ağın iç bölgeleri dış bölgelerine göre daha küçük nokta hata ve güven elipslerine sahiptir. Dolayısıyla, ağın kenarlarındaki noktalara olabildiğince çok bağlantı yapılmalı ve bu ölçülerde prezisyonu arttırmalıdır.



Ders duyuruları, soru ve görüşleriniz için:



Prof. Dr. Uğur DOĞAN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/dogan>

dogan@yildiz.edu.tr



Prof. Dr. Cüneyt AYDIN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/caydin>

caydin@yildiz.edu.tr; caydin78@gmail.com