

2. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \sin \frac{1}{4^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz. (B)

Oran kuralı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \sin \frac{1}{4^{n+1}}}{3^n \sin \frac{1}{4^n}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{4^{n+1}}}{\sin \frac{1}{4^n}}$$

$$= 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t}{4}}{\sin t} = 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t}{4} \cdot \frac{\sin \frac{t}{4}}{\frac{t}{4}}}{t} = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1 \text{ yakınsaktır}$$

Kök kuralı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{4^n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\sin \frac{1}{4^n} \right)}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4^n} \cdot \ln 4 \cdot \cos \frac{1}{4^n}}{\sin \frac{1}{4^n}}$$

$$\boxed{\frac{1}{4^n} = t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\ln 4 \cdot \cos t}{\frac{\sin t}{t}} = -\ln 4 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{4} < 1 \text{ olur. Yakınsaktır}$$

Örnekler

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{(n+1) \cdot 2^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

1. Yol: Doğrudan Karşılaştırma Testi

$$\frac{\ln n}{(n+1) \cdot 2^n} < \frac{n}{(n+1) \cdot 2^n} < \frac{n}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{2^n} \text{ olur.}$$

(Her $n \geq 2$ için $\ln n < n$ dir)

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ serisi geometrik seridir. $r = \frac{1}{2}$, $|r| < 1$ olduğundan yakınsaktır.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{(n+1) \cdot 2^n} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ olduğundan verilen seride yakınsaktır.

2. Yol: Oran Testi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+2) \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{(n+1) \cdot 2^n}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2(n+2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} < 1 \text{ yakınsaktır.} \end{aligned}$$

3. Sol. Limit Karşılaştırma testi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ serisi yakınsaktır.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{(n+1)2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < \infty$$

olur. 0 halde verilen seride yakınsaktır.

~~Örnek 2)~~ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot \ln n}$ Serisinin yakınsaklık araştırmasını bulunuz.

Belirli İntegralin Serilerle Hesabı

Bazı fonksiyonların belirli İntegrali hesaplanamaz.

Böyle fonksiyonlar kuvvet serisine açılarak İntegralleri yaklaşık olarak hesaplanabilir.

Örnek: $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ İntegralini 0,01 doğrulukla

hesaplayınız.

$$I = \int_0^1 \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right) dx$$

$$\approx \left. x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} \right|_0^1 = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600}$$

$$\boxed{I \approx 0.94}$$

Örnek: $I = \int_0^1 \sin(x^2) dx$ integralini 0,001 doğrulukla hesaplayınız. (Sonuç: 0,310)

Örnek: $I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx = ?$ 0,01 doğrulukla hesaplayınız. ($I \approx 0,79$)

Örnek: $f(x) = x^2 \cdot \cos x$ seriyeye açınız.

Örnek: $f(x) = x^3 \cdot e^{-x^2}$ " "

Örnek: $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \approx ?$ (0,620)

Örnek: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 2x - 1}{\sin x} = ?$ $\frac{0}{0}$ Belirsizliği

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \sin x + \frac{1}{2!} \sin^2 x + \frac{1}{3!} \sin^3 x + \dots\right) - 2x - 1}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2!} \sin x + \frac{1}{3!} \sin^2 x + \dots - \frac{2x}{\sin x}\right)$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{\sin x}{x}} = 1 - 2 = -1$$

Örnek: $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cdot \sin(e^{-x}) = ?$

$$\sin(e^{-x}) = e^{-x} - \frac{1}{3!} e^{-3x} + \frac{1}{5!} e^{-5x} - \dots$$

$$e^x \cdot \sin(e^{-x}) = 1 - \frac{1}{3!} e^{-2x} + \frac{1}{5!} e^{-4x} - \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3!} e^{-2x} + \frac{1}{5!} e^{-4x} - \dots \right) = 1 \text{ bulunur}$$

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2}$ karakterini belirleyiniz.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{5n^2 - n + 4}{2n^3 + 5n + 1}\right)$ " " " "

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} c \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} = 1$ ise $c = ?$

Örnek: $f(x) = x \cdot e^x$ fonksiyonunu $(x+2)'$ nin kuvvetleri şeklinde seriye açınız.

Örnek 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2 - 1}$ serisinin toplamını bulunuz.

Örnek 2 $\frac{1}{2} + \frac{4}{2^3+1} + \frac{9}{3^3+1} + \frac{16}{4^3+1} + \dots$

Serisinin karakterini belirleyiniz.

Örnek 3 $\sin \pi + \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{9} \sin \frac{\pi}{3} + \dots$

Serisinin karakterini belirleyiniz.

Örnek 4 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x+3)^n}{5^n}$ serisinin yakınsaklık

aralığını bulunuz.

(1- Oran Testi ile)
(2- Kök Testi ile)

Örnek 5 $f(x) = e^{-x^3}$ den yararlanarak $x^2 e^{-x^3}$ ün

Serisini yazınız.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad e^{-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!}$$

$$x^2 e^{-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+2}}{n!}$$

Taylor Polomu

Eğer $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasını içeren bir açık aralıkta n . mertebeden türevleri mevcut ise bu aralıkta her x için

$$P_n(x) = f(x) \approx f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

olur. (n . dereceden Taylor Polomu)

Örnekler: $f(x) = \ln x$ 'in $x_0 = 1$ civarında yazılmış 3. dereceden Taylor Polomunu kullanarak $\ln(1.2)$ yi yaklaşıklık olarak hesaplayınız.

$$f(x) = \ln x \quad f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad f'''(1) = 2$$

~~$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} \quad f^{(4)}(1) = -6$$~~

$$\ln x \approx \frac{x-1}{1!} - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot 2$$

$$\ln x \approx x-1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$$

$$\ln(1.2) \approx 1.2-1 - \frac{(1.2-1)^2}{2} + \frac{(1.2-1)^3}{3} = 0.2 - \frac{(0.2)^2}{2} + \frac{(0.2)^3}{3} = 0.182$$

Örnek: $\sqrt{17} \approx ?$

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad /$$

$$x_0 = 16, \quad x = 17$$

$$f(16) = 4$$

$$f'(16) = \frac{1}{8}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-5/2}$$

$$\sqrt{x} = 4 + \frac{x-16}{1!} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}x + 2$$

$$\sqrt{17} \approx 4 + 1 \cdot \frac{1}{8} = 4 + \frac{1}{8} = \frac{33}{8} \quad (\text{Linearkstirne})$$

Örnek: $\sin 62^\circ \approx ?$

Ödev: $\sin 23^\circ \approx ? \quad \cos 31^\circ \approx ?$

$$f(x) = \sin x$$

$$x = 62^\circ, \quad x_0 = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$f(x) = \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{x - \frac{\pi}{3}}{1!} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sin 62^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{62\pi}{180} - \frac{\pi}{3} \right) \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{62\pi}{180}$$

$$\sin 62^\circ = \text{---}$$

bulunur.

Ödev 1- $\sqrt[5]{65}$ değerini dört ondalıkta yaklaşıklık olarak hesaplamak için serinin ilk 5 terimini kullanınız.

2- $f(x) = \tan x$ fonksiyonunu seriyeye açınız.

3- $f(x) = \sin x$ fonksiyonunu $\frac{\pi}{2}$ noktası civarında

Taylor Serisine açınız.

4- $f(x) = \cos^2 x$ fonksiyonunu $(x+2)$ nin kuvvetlerine göre seriyeye açınız.

5- $f(x) = \frac{e^{2x^2} - 1}{x^2}$ fonksiyonunu seriyeye açınız.

6- $f(x) = x^2 - \sin\left(\frac{x}{3}\right)$

" " "

7- $f(x) = \frac{1+x^3}{1+x^2}$

" " "

8- $f(x) = \ln(\cos x)$

" " "

9- $f(x) = \sqrt{1+x}$

" " "

10- $1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots$ Serisinin toplamını bulunuz.

Kuvvet Serileriyle Cebirsel İşlemler

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} (c a_n) x^n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad c: \text{sabit}$$

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$3) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n+m=m} a_n b_m \right) x^m$$

Kuvvet Serilerinin Türevi ve İntegrali

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ yakınsak serisinin $(-R, R)$ aralığında

toplamı $f(x)$ olsun.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots, -R < x < R$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots, -R < x < R$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 x + \dots, -R < x < R$$

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots, -R < x < R$$

Örnek: $\int_0^1 \arctan x^2 dx \approx ?$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, -1 < x < 1$$

$$\arctan x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{4n+2}, -1 < x < 1$$

$$\int_0^1 \arctan x^2 dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{4n+2} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \int_0^1 x^{4n+2} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)} \bigg|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(4n+3)}$$

Buherer.

$$\approx \frac{1}{3} - \frac{1}{21} + \frac{1}{55} - \frac{1}{105} + \frac{1}{171}$$

$$\approx 0.294372$$

Önemli:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n ; -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n ; -1 < x < 1$$

Örnekler:

1) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ Seriyeye aşımız.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{türev alalım.}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n \text{ olur.}$$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = ?$ Serisi yakınsak ise toplamını buluruz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2} < 1 \text{ yakınsak}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}, \quad -1 < x < 1$$

(türev alalım)

$$\frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n, \quad -1 < x < 1$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ için } \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = 4 \text{ buluruz.}$$

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{2^n} = ? \quad (\text{ödev})$$

$$4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = ? \quad (6)$$

$$5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \cdot 2^n} = ?$$

$$6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} = ? \quad \left(\frac{3}{4}\right)$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n \cdot 2^n} = ? \quad (\ln 3)$$