

Ödev:

$$1) y' + y^2 - 2x^2y - 2x + x^4 = 0 \quad y = x^2$$

$$2) (1-x^3)y' - y^2 + x^2y + 2x = 0 \quad y = -x^2$$

$$3) y' - \frac{1}{x}y^2 - 2\left(\frac{1}{x} - 1\right)y - x + 1 = 0 \quad y_1 = x$$

$$4) \frac{dy}{dx} = \frac{2x - y - 3}{3x + y - 7} \quad \text{denklemini çözünüz.}$$

$$5) y' = \left(\frac{x - y + 3}{x - y + 1} \right)^2 \quad \text{denklemini çözünüz.}$$

$$6) (1+x^2)y'' + y' + 1 = 0 \quad " "$$

$$7) y' = \sqrt{x + y + 1} \quad " "$$

$$8) \sec^2 x \cdot \tan y dx + \sec^2 y \cdot \tan x dy = 0 \quad " "$$

$$9) y^2 y' - \sqrt{x + xy^6} = 0 \quad " "$$

$$10) (\sin x + \cos x) dy + (\cos x - \sin x) dx = 0 \quad " "$$

-23-

$$\frac{y}{\sin x} = x + C$$

$$\boxed{y = (x+C)\sin x} \text{ bulunur.}$$

Örnek: $y' - \frac{2y}{x+1} = e^x(x+1)^2$ dif.-denk.

genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $\lambda = e^{-2 \int \frac{1}{x+1} dx} = e^{-2 \ln(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2}$

$$\frac{y'}{(x+1)^2} - \frac{2y}{(x+1)^3} = e^x$$

$$\left(\frac{y}{(x+1)^2} \right)' = e^x$$

$$\frac{y}{(x+1)^2} = e^x + C$$

$$\boxed{y = (x+1)^2(e^x + C)} \text{ bulunur.}$$

3- Sabitin Değişimi Yöntemi (Parametrelerin Değişimi Yöntemi)

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$y' + P(x)y = 0$ Homojen denklemin genel çözümü bulunur.

$$\int \frac{dy}{y} + \int P(x) dx = \int Q(x) dx$$

$$\ln y + \int P(x) dx = \ln C$$

$$y = C \cdot e^{-\int P(x) dx}$$

Homojen denklemin genel çözümü

$$C = C(x) = ?$$

Verilen lineer denkleme yerine yarıyoruz.

$$C' \cdot e^{-\int P(x) dx} - C \cdot P(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} + P(x) \cdot C \cdot e^{-\int P(x) dx} = Q(x)$$

$$C = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + K$$

bulunur.

C 'yi Homojen denklemin genel çözümünde yerine yarıarsak,

$$y = \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + K \right] \cdot e^{-\int P(x) dx}$$

şeklinde genel çözüm bulunur.

Örnek: $y' - y \cot x = \sin x$ Dif. Denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y' - y \cot x = 0$

$$\int \frac{dy}{y} - \int \cot x dx = \int 0$$

$$\ln y - \ln \sin x = \ln C$$

$$\boxed{y = C \sin x} \quad C = C(x) = ?$$

$$C' \sin x + C \cos x - \cancel{C \sin x \cot x} = \sin x$$

$$C' = 1 \Rightarrow \boxed{C = x + K}$$

$$\boxed{y = (x + K) \sin x} \quad \text{bulunur.}$$

Örnek: $y' - \frac{2y}{x+1} = e^x (x+1)^2$ Dif. Denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y' - \frac{2y}{x+1} = 0$

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{2dx}{x+1} = \int 0$$

$$\ln y - 2 \ln(x+1) = \ln C$$

$$\boxed{y = C \cdot (x+1)^2} \quad C = C(x) = ?$$

$$C'(x+1)^2 + 2C(x+1) - \frac{2C(x+1)^2}{x+1} = e^x(x+1)^2$$

$$C' = e^x \Rightarrow \boxed{C = e^x + K}$$

$$\boxed{y = (e^x + K)(x+1)^2} \text{ bulunur.}$$

Örnek: Aşağıdaki Dif. Denklemlerin genel çözümlerini bulunur.

$$1) \quad xy' + y = (1+x)e^x$$

$$2) \quad dx + x dy = e^{-y} \sec^2 y dy \quad \text{Sonuç: } x = e^{-y} \tan y + c e^{-y}$$

$$3) \quad y' + y \cot x = \sec x$$

$$\text{Sonuç: } y = \frac{1}{\sin x} \cdot \ln \frac{K}{\cos x} - f(x)$$

$$4) \quad y' + y \cdot \frac{df(x)}{dx} = f(x) \cdot f'(x) \quad \text{Sonuç: } y = K e^{f(x)} - 1$$

$$5) \quad y' e^x \cdot y = e^x$$

$$6) \quad y' + y \sin x = x e^{\cos x}$$

$$7) \quad xy' + y = e^{2x} - \sin x$$

$$\arctan x$$

$$8) \quad (1+x^2)y' + y = e$$

$$\text{Sonuç: } y = \arctan x - 1 + e$$

$$9) \quad (2x - 10y^3) \frac{dy}{dx} + y = 0$$

7) Bernoulli Dif. Denklemleri

$$y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^n, \quad n \neq \{0, 1\}$$

Şeklindeki denkleme Bernoulli Dif. Denklemleri denir.

Bernoulli denklemleri:

$$Z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$$

Dönüştürme yapılırsa ;

$$Z' = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y'$$

$$\underbrace{(1-n) \bar{y}^{-n} \cdot y'}_{Z'} + \underbrace{P(x) \cdot (1-n) \cdot \bar{y}^{-n} \cdot y}_Z = Q(x) \cdot y^n \cdot (1-n) \bar{y}^{-n}$$

$$Z' + (1-n)P(x) \cdot Z = (1-n) \cdot Q(x)$$

Şeklinde Lineer Dif. Denkleme dönüşür.

Örnek: $y' + y = xy^3$ Dif. Denk. genel çözümünü bulunuz

Çözüm: $\left[Z = \frac{1}{y^2} = y^{-2} \right] \Rightarrow Z' = -2 \cdot y^{-3} \cdot y'$

$$-2 \bar{y}^3 y' - 2 \bar{y}^3 \cdot y = -2x \bar{y}^3 \cdot y^3$$

$$Z' - 2Z = -2x \text{ Lineer Dif. Denklemler}$$

$$\lambda = e^{-2\int dx} = e^{-2x} \quad \text{integrasyon sonucu}$$

$$e^{-2x} z' - 2e^{-2x} z = -2xe^{-2x}$$

$$(z \cdot e^{-2x})' = -2xe^{-2x}$$

$$z \cdot e^{-2x} = -2 \int x e^{-2x} dx = -2 \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right]$$

$$z = C e^{2x} + x + \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{1}{y^2} \Rightarrow \boxed{y^2 = \frac{1}{C e^{2x} + x + \frac{1}{2}}}$$

Örnekler.

$$1) \quad 4y' - y = x\sqrt{y} \quad ; \quad y = (-x - 2 + C e^{\frac{x}{2}})^2$$

$$2) \quad y' \cos x + y \sin x = -y^2 \quad ; \quad y = \frac{\cos x}{x + C}$$

$$3) \quad x y' + y = y^2 \ln x \quad ; \quad y = \frac{1}{\ln x + Cx + 1}$$

$$4) \quad y' \cos x + y \sin x + y^3 = 0 \quad ; \quad y = \frac{\cos x}{\sqrt{2 \cos x + C}}$$

$$5) \quad y' + y = y^2 (\cos x - \sin x) \quad ; \quad \frac{1}{y} = (-e^x \sin x + C) e^x$$

$$y - \frac{1}{2}y = \frac{x-1}{x}e^x$$

$$6) y' + y \tan x = y^3 \sec^4 x$$

8) Riccati Diferansiyel Denklemi

$$y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0 \text{ Şeklindeki}$$

denkleme Riccati Dif. Denklemi denir.

Bu denklem, en az bir y_1 özel çözümünü bilmiyorsa, uygun bir biçimle Bernoulli veya Linear Dif. Denkleme dönüştürülerek çözülür.

1) $y = y_1 + z$ dönüşümü yapılırsa denklem Bernoulli Dif. Denkleme dönüşür.

2) $y = y_1 + \frac{1}{z}$ dönüşümü yapılırsa denklem Riccati Dif. Denkleme dönüşür.

Örnek: $y' - y^2 - \frac{y}{x} + 9x^2 = 0$ Dif. denkleminin

bir özel çözümü $y = 3x$ olduğuna göre genel çözümünü buluruz.

Örnek: $y' + e^x y^2 - 3y + e^x = 0, y_1 = e^x$

$$y' - y^2 - \frac{y}{x} + 9x^2 = 0 \quad y_1 = 3x$$

$$y = 3x + \frac{1}{z} \quad y' = 3 - \frac{z'}{z^2}$$

Cözüm:

$$3 - \frac{z'}{z^2} - 9x^2 - \frac{6x}{z} - \frac{1}{z^2} = 3 - \frac{1}{xz} + 9x^2 = 0$$

$$z' + 6xz + 1 + \frac{1}{x}z = 0$$

$$z' + (6x + \frac{1}{x})z = -1$$

Linear
Dif.
Denklemleri

$$\int (6x + \frac{1}{x}) dx = 3x^2 + \ln x = \lambda$$

$$\lambda = e$$

$$(xe^{3x^2}z)' = -xe^{3x^2} \Rightarrow xe^{3x^2}z = -\frac{1}{6}e^{3x^2} + C$$

$$z = -\frac{1}{6x} + \frac{C}{x}e^{-3x^2}$$

$$y = 3x + \frac{1}{z}$$

Örnek: $y'(1 - \sin x \cos x) + y^2 \cos x - y + \sin x = 0$

Denkleminin bir özel çözümünü $\cos x$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

Cözüm: