

~~İK~~

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ Serisinin yakınsaklık

analizini bulunuz.

$$U_n = \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$$

Çözüm: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 2^n}{x^n} \right|$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left| \frac{n}{2(n+1)} \right|}_{\frac{1}{2}} |x| = \frac{1}{2} |x| < 1 \text{ olmalıdır.}$$

(Yakınsak olması için)

$$|x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2 \text{ olacaktır.}$$

$$x = -2 \text{ için } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \text{ olur.}$$

Şartlı yakınsak (Alternan Seri) seridir.

$$x = 2 \text{ için } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ olur.}$$

Harmatik seridir. İraksaktır. Sonuç: $\{-2 < x < 2\}$ olur.

Merkez $x_0 = 0$, Yakınsaklık Yarıçapı $R = 2$ dir.

Taylor ve Maclaurin Serileri (açılımları)

$y = f(x)$ fonksiyonu ve x_0 noktası veriliyor.
Eğer $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında Analitik ise
(Analitik fonksiyon ise) Taylor serisine açılır.
(Taylor serisi vardır).

Analitik fonksiyon: $y = f(x)$ fonksiyonu ve türevleri x_0 noktasında
(her mertebeden) sürekli ise (Taylor serisine
açılabilir serisi) $y = f(x)$ fonksiyonuna x_0
noktasında Analitik fonksiyon denir.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

Kuvvet serisini görüne alalım. (x_0 veriliyor)

$$f'(x) = \dots$$

$$f''(x) = \dots$$

$$f'''(x) = \dots$$

⋮

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \quad \text{Seri si elde edilir.}$$

Bu seriyeye $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktası civarında (etrafında) Taylor Serisi (Taylor Açılımı) denir. Eğer x_0 noktası sıfır olursa ($x_0 = 0$ ise)

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \quad \text{olur. Bu durumda Seriyeye}$$

Maclaurin Serisi (Maclaurin açılımı) denir.

Örnekler: $f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Örnek: $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ fonksiyonunu serje açınız.

Çözüm: $\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n, \dots$

Sonuç: $\frac{1}{1-2x}$

Örnek: $f(x) = \ln(1+x)$ Sonuç: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

$-1 < x < 1$

Ödev: $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ fonksiyonunu serje açınız ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

Sonuç: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, -1 < x < 1$
