

halde

-17-

1 1 1 1 ... zın tekil ve

-11-

$$\frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1 + \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{3!} - \frac{(x - \frac{\pi}{2})^4}{5!} + \dots$$

olur. Bu seri ise, her x için yakınsar.

Benzer şekilde, $\sin x$ fonksiyonu da $x = \frac{\pi}{2}$ noktasının civarında

$$\sin x = 1 - \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{2!} + \frac{(x - \frac{\pi}{2})^4}{4!} - \dots$$

şeklinde Taylor serisine açılabilirdiğinden, yukarıdaki tekil nokta tanımlarından, analitik fonksiyonlar için verilen tanım $x = \frac{\pi}{2}$ noktasında sağlanır. Dolayısıyla, $x = \frac{\pi}{2}$ tekil nokta değildir. Düzgün tekil noktasıdır.

TEOREM: Eğer $x = x_0$ noktası

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad \left[p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}, \quad q(x) = \frac{R(x)}{P(x)} \right]$$

diferansiyel denkleminin bir adi noktası ise bu $x = x_0$ noktasının uygun bir civarında diferansiyel denklemin

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

şeklinde bir seri çözümü bulunur.

Bu seri, R yarıçapı, $x = x_0$ adi noktasına en yakın tek noktaya olan uzaklıktan daha küçük değer alan bir yakınsaklık yarıçapı olmak üzere $0 < |x - x_0| < R$ aralığında yakınsak ve yakınsaklık aralığının $|x - x_0| = R$ uç noktalarında, yakınsaklık iraksak da olabilir. Ayrıca bu seri $|x - x_0| > R$ aralığında iraksaktır.

1. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DENKLEMLERİN SERİ ÇÖZÜMLERİ

Birçok bilimsel problem bilinen elementer yöntemlerle çözülememektedir. Örneğin, katsayıları bağımsız değişkene bağlı

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

formunda verilen, ikinci mertebeden lineer denklemlerin çözümleri, genelde elementer metodlarla bulunamaz.

Bu tür denklemlerin bazıları, değişken dönüşümü ile sabit katsayılı denklere dönüştürülerek çözülmektedir. Fakat, uygun dönüşümün bulunması ve dönüşüme bağlı olarak diferansiyel denklemin çözümünü bulmak belli modeller dışında imkansız gibidir. Böyle durumlarda diferansiyel denklemin çözümleri, belli bir tanım bölgesinde yakınsak, sonsuz seriler şeklinde aranır. Yukarıdaki denkleme örnek olarak

Cauchy-Euler denklemi

$$a(x-x_0)^2 y'' + b(x-x_0)y' + cy = 0, \quad a, b, c \text{ sbt}$$

Bessel denklemi

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0, \quad \lambda \rightarrow \text{sbt}$$

Legendre denklemi

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad \lambda \rightarrow \text{sbt}$$

Airy denklemi

-2-

$$y'' - \lambda xy = 0, \quad y \rightarrow s, t$$

Hermite denklemi

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Chebyshev denklemi

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

KUVVET SERİLERİ

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

biçiminde sonsuz terimli bir seriye x 'e göre kuvvet serisi denir.

Bu serinin daha genel biçimi olan

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

serisi $t = x - x_0$ dönüşümü ile x_0 noktası orjine ötelenecek şekilde ilk seri formuna getirilebilir.

Tanım: Eğer bir kuvvet serisinin, kısmi toplamlar dizisinin limiti mevcut ise kuvvet serisine x noktasında yakınsak denir. Eğer kuvvet serisi bir x noktasında yakınsak değilse iraksaktır.

Tanım: Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-x_0)^n|$

kuvvet serisi bir x noktasında yakınsak ise

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ kuvvet serisine mutlak yakınsaktır denir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 3^n}$ kuvvet serisinin yakınsak olduğu aralı bulunuz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1} \cdot n \cdot 3^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1} \cdot (x-2)^n} \right|$$

$$= \left| \frac{x-2}{3} \right| < 1$$

$$\Rightarrow |x-2| < 3 \Rightarrow -3 < x-2 < 3 \Rightarrow -1 \leq x < 5$$

$x = -1$ için: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Alt. Harmonik seri yakınsak

$x = 5$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Harmonik seri ıraksak.

Serinin yakınsaklık aralığı $-1 \leq x < 5$ 'tir. Ancak seri $-1 < x < 5$ aralığında mutlak yakınsaktır.

Tanım: $R \geq 0$ olmak üzere, eğer bir kuvvet serisi $|x - x_0| < R$ için mutlak yakınsak ve $|x - x_0| > R$ için ıraksak ise R sayısına yakınsaklık yarıçapı denir. Ayrıca, $x_0 - R < x < x_0 + R$ aralığına da yakınsaklık aralığı denir. Eğer yakınsaklık aralığı sadece $x = x_0$ noktasından oluşuyorsa R yakınsaklık yarıçapı 0'dır. Eğer bir kuvvet serisi her x değeri için yakınsak ise R yakınsaklık yarıçapı ∞ 'dur.

Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$

kuvvet serileri ortak bir aralıkta yakınsak ise;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-x_0)^n$$

ve

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right] (x-x_0)^n$$

dir. Ayrıca, yakınsak bir kuvvet serisi türevlenebilir.

Lemma

Eğer $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ kuvvet serisi, bir açık (a,b) aralığında yakınsak ise bu aralıkta $f(x)$ 'in türevleri

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n(x-x_0)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n(x-x_0)^{n-2}$$

⋮

şeklinde bulunur.

Tanım: Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x=x_0$ noktasında

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad (1)$$

şeklinde yazılabiliyorsa (1) serisi $f(x)$ 'in $x=x_0$ nok-

şimdiki Taylor serisi denir.

Tanım: Eğer $f(x)$ fonksiyonu $|x-x_0| < R$ için
(R yakınsaklık yarıçapı), $x=x_0$ noktası civarında
Taylor serisine açılabiliriyorsa $f(x)$ fonksiyonuna $x=x_0$
noktasında analitiktir denir.

Tanım: Eğer $\forall x$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \Rightarrow a_n = b_n$$

($n=0,1,2,\dots$)

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_n = \dots = 0 \text{ dir}$$

~~Ör/~~

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n! 3^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i! 3^i}$$

~~Ör/~~

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{n! 3^n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+4}}{(m+4)! 3^{m+4}}$$

~~Ör/~~

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(x-x_0)^{n-3}}{n!} \text{ kuvvet serisini, genel terimde } (x-x_0)^{n-3}$$

yerinde $(x-x_0)^n$ olacak şekilde yazınız.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{(n+3)!}$$

adi Nokta, Tekil Nokta, Düzgün Tekil Nokta ve Düzgün Olmayan Tekil Nokta Tanımları

Değişken katsayılı

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

veya

$$y'' + \frac{Q(x)}{P(x)} y' + \frac{R(x)}{P(x)} y = 0 \quad (P(x) \neq 0)$$

formundaki diferansiyel denklem için adi nokta, tekil nokta ve düzgün tekil nokta kavramlarını vereceğiz. Ancak $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonlarının polinom veya analitik fonksiyon olmalarına bağlı olarak bu tanımlar değişmektedir. Bu nedenle önce $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonlarının polinom mu yoksa analitik fonksiyon mu oldukları tespit edilmelidir.

İlk önce $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonlarının polinom ve ortak bölenlerinin olmadığı durumda tanımları verelim:

TANIM: Eğer bir x_0 noktası için $P(x_0) \neq 0$ ise x_0 noktasına adi nokta denir.

TANIM: Eğer bir x_0 noktası için $P(x_0) = 0$ ise x_0 noktasına tekil nokta denir.

NOT: Eğer $\frac{Q(x)}{P(x)}$ ve $\frac{R(x)}{P(x)}$ kesirlerinde ortak

çarpanlar varsa bunlar sadeleştirilir ve sadeleşmiş kesirlerin paydalarını sıfır yapan noktalar tespit edilir. Bu noktalar ele alınan diferansiyel denklemin tekil noktalarıdır.

$(x-1)y=0$ diferansiyel denkleminin tekil ve adi noktalarını belirleyiniz.

$P(x)=x^2=0 \Rightarrow x=0$ tekil nokta, $x=0$ tekil noktası dışında kalan diğer tüm noktalar, ele alınan diferansiyel denklemin adi noktalarıdır.

1) $(x^2-4)y''+2xy'+ay=0$, $a=sbt$ diferansiyel denkleminin tekil ve adi noktalarını belirleyiniz.

$P(x)=x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$ tekil noktalardır. Bunlar dışındaki tüm noktalar denklemin adi noktalarıdır.

TANIM: $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonları birer polinom olması üzere, eğer x_0 tekil noktası için

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \rightarrow \text{sonlu}$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \rightarrow \text{sonlu}$$

ise x_0 noktasına denklemin düzgün tekil noktası denir.

Eğer denklemin bir tekil noktası düzgün tekil nokta değilse düzgün olmayan tekil nokta adını alır.

2) $(1-x^2)y''+y'+2y=0$ diferansiyel denkleminin tekil noktalarını bulunuz. Bulduğunuz tekil noktaları, düzgün tekil veya düzgün olmayan tekil nokta olmalarına göre sınıflayınız.

$$P(x)=1-x^2, Q(x)=1, R(x)=2$$

$$1-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 1 \text{ tekil noktalardır.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \frac{1}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{1+x} = -\frac{1}{2} \text{ sonlu.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \cdot \frac{1}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2} \text{ sonlu. } -8-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)}{x+1} = 0 \text{ sonlu.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)}{1-x} = 0 \text{ sonlu.}$$

Buğundan $x = \pm 1$ noktaları düzgün tekil noktalardır.

~~25~~ $x^2(1-x)y'' + (1-x)y' + y = 0$ diferansiyel denkleminin tekil noktalarını bulunuz. Buğunuz tekil noktaları, düzgün tekil veya düzgün olmayan tekil nokta olmalarına göre sınıflayınız.

$$P(x) = x^2(1-x) \quad Q(x) = (1-x) \quad R(x) = 1$$

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{1-x}{x^2(1-x)} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{R(x)}{P(x)} = \frac{1}{x^2(1-x)}$$

$\Rightarrow x=0$ ve $x=1$ tekil noktalardır.

$$x=0 \text{ için; } \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{1}{x^2(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = 1 \text{ sonlu.}$$

$x=0$, Limitlerin her ikisi de sonlu olmadığından düzgün olmayan tekil noktadır.

$$x=1 \text{ için; } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{1}{x^2} = 0 \text{ sonlu}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x^2(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x^2} = 0 \text{ sonlu}$$

her iki Limit de sonlu olduğundan $x=1$ düzgün tekil noktadır.

Eğer $P(x), Q(x)$ ve $R(x)$ ⁻²fonksiyonları analitik ise, erilen tanım ve kavramlar da genişletilmek zorundadır.

TANIM: Eğer

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} \text{ ve } q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$$

fonksiyonları bir x_0 noktasında analitik ise, yani $p(x)$ ve $q(x)$ e karşı

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-x_0)^n \quad (p_i \rightarrow s.b.t \quad i=0,1,2,\dots,n,\dots)$$

ve

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-x_0)^n \quad (q_i \rightarrow s.b.t \quad i=0,1,2,\dots,n,\dots)$$

Taylor serileri karşı geliyorsa, x_0 noktasına denklemin adi noktasıdır denir. Aksi durumda ise bu x_0 noktasına tekil nokta denir.

TANIM: x_0 bir tekil nokta, $P(x), Q(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonları analitik olmak üzere, eğer

$$(x-x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \text{ ve } (x-x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)}$$

her iki fonksiyon da $x=x_0$ noktasının civarında yakınsak Taylor serisine açılabiliriyorsa (analitik ise) x_0 noktasına denklemin düzgün tekil noktası denir. Eğer, denklemin bir tekil noktası, düzgün tekil nokta değil ise düzgün olmayan tekil nokta adını alır.

$2 \cos x y + \sin x y = 0$ diferansiyel denkleminin tekil noktalarını bulunuz. Bulduğunuz tekil noktaları, düzgün tekil veya düzgün olmayan tekil nokta olmalarına göre sınıflayınız.

$$P(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \quad Q(x) = \cos x \quad R(x) = \sin x$$

$Q(x)$ ve $R(x)$ yani $\cos x$ ve $\sin x$ katsayıları analitik fonksiyon olduklarından, düzgün tekil nokta tanımlarından analitik fonksiyonlar için verilen tanımı dikkate alırız.

$$P(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ denklemin tekil noktasıdır.}$$

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \frac{Q(x)}{P(x)} = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\cos x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$re \quad \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\sin x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = \sin x$$

funksiyonları göz önüne alınır. Bunlardan $\frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ fonksiyonun

teki $\cos x$ 'in $x = \frac{\pi}{2}$ noktası civarındaki Taylor serisi

$$\begin{aligned} \cos x = & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{1!} \left[-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} \left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] + \\ & + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] + \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos x = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{5!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5 + \dots$$

bulunur.