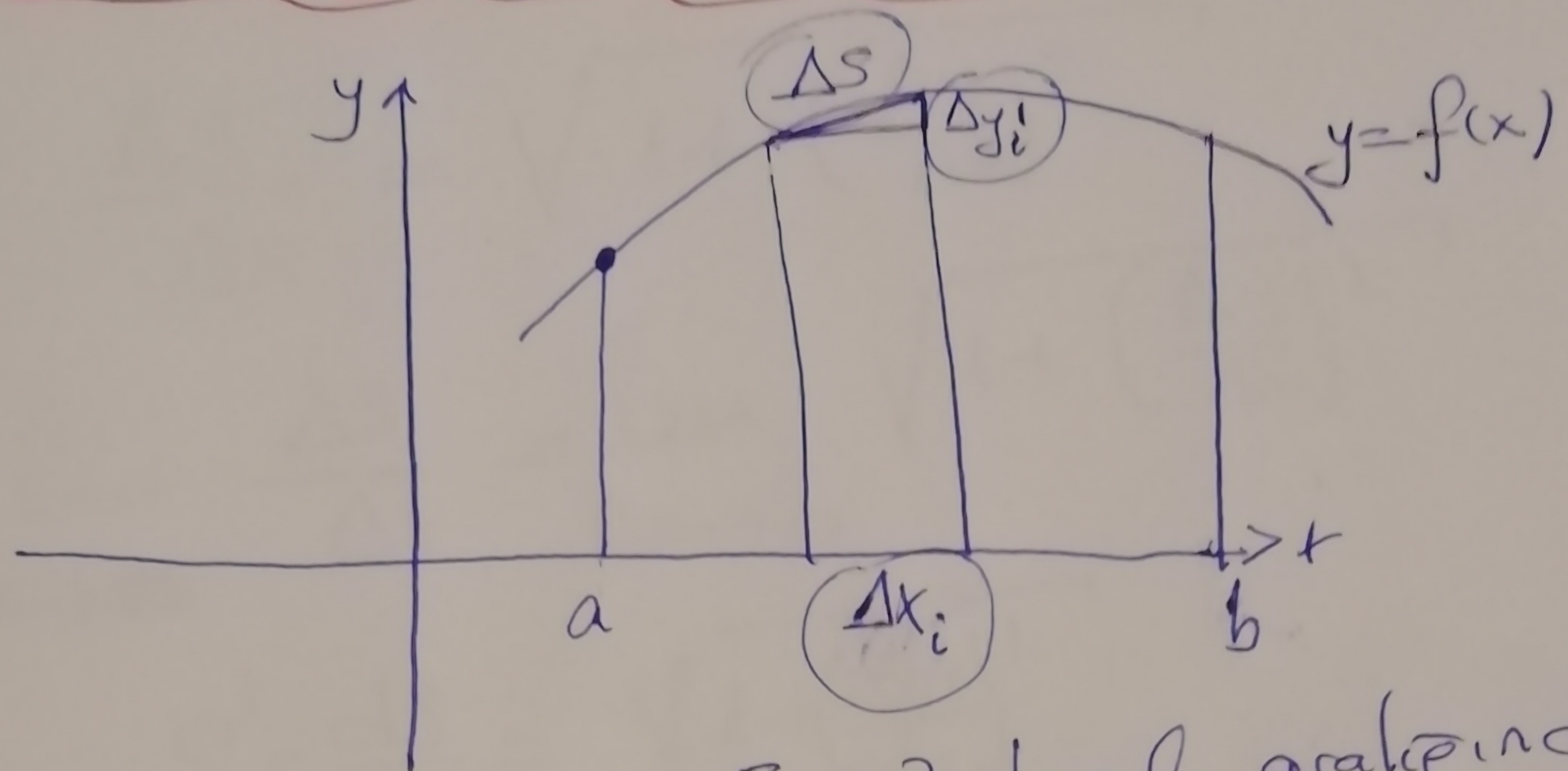
Yay Uzunluğunun Hesaplanması
"Eğri uzunluğunun Hesaplanması"



$y=f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında türevlenebilir olsun. $[a,b]$ aralığını $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=$ olmak üzere $[x_{k-1}, x_k]$ $k=1,2,\cdots,n$ şeklinde n tane alt aralığa bölelim. Her bir aralığın uzunluğu

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad , k=1,2,\cdots,n$$

olsun.

$$(\Delta S)_k^2 = (\Delta x)_k^2 + (\Delta y_k)^2 \quad k=1,2,\cdots,n$$

$$S=\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$x_k \leq x \leq x_k + \Delta x_k$$

$$\Delta y_k = f(x_k+\Delta x_k) - f(x_k) = f'(x)\cdot\Delta x_k \text{ dır.}$$

$$(\Delta S)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$\Delta S = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

$$S' = \frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad \text{: Yay diferansiyeli}$$

$$\boxed{S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx} \quad \text{Yay Uzunluğu}$$

$$y = f(x) \text{ ise } y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Örnek: $x^2 + y^2 = R^2$ çemberinin uzunluğunu hesaplayınız

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

$$S = 4\int_0^R \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

$$= 4\int_0^R \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2}\, dx = 4\int_0^R \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}}\, dx = 4\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx$$

$$x = R\sin t$$
$$dx = R\cos t\, dt$$

$$S = 4R\int_0^{\pi/2} dt = 4R \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{2\pi R}$$

Örnek: $y=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x}$ eğrisinin $x=1$ ve $x=3$ noktaları arasında kalan kısmının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $y'=x^2-\frac{1}{4x^2}$ dir.

$$S=\int_1^3 \sqrt{1+\left(x^2-\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx=\int_1^3\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx=\frac{53}{6}$$

Ödev: $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$ eğrisinin $x=0$ ve $x=3$ doğrunun arasında kalan kısmının uzunluğunu bulunuz.

Sonuç: $S=12$

Ödev: parametrik denklemleri $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ ile verilen $x^2+y^2=a^2$ çemberinin uzunluğunu bulunuz.

$$S=4\cdot\int_0^{\pi/2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=2\pi a$$

YAY UZUNLUĞU

$y=f(x)$ sürekli fonksiyonu ile belirlenen eğrinin $x=a$ ve $x=b$ doğruları arasında kalan kısmının uzunluğu,

$$S=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx \quad \text{dır.} \qquad S=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Eğrinin denklemi $x=x(t)$, $y=y(t)$ ile verilmesi durumunda $t=t_1$ ve $t=t_2$ ye karşı gelen noktaları arasında kalan kısmının uzunluğu

$$S=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

Örnek: $y=3x+5$ doğrusunun $A(1,8)$ ve $B(2,11)$ noktalarının arasında kalan kısmının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $y=3x+5 \qquad y'=3$

$$S=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_1^2 \sqrt{1+3^2}\,dx=\sqrt{10}\int_1^2 dx=\sqrt{10}$$

Örnek: $y=x^{3/2}$ eğrisinin $x=0$ ve $x=4$ noktaları arasında kalan kısmının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $S=\int_0^4 \sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,dx=\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx=\frac{8}{27}(10$

* (EK)

Yay uzunluğu ile ilgili örnekler

1) $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere $f(x)=\frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}$ eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

$$S=\int_0^1 \sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad y'=f'(x)=\sqrt{x^2+1}\cdot 2x$$

$$=\int_0^1 \sqrt{1+4x^2(x^2+1)}\,dx$$

$$=\int_0^1 \sqrt{4x^4+4x^2+1}\,dx=\int_0^1 (2x^2+1)\,dx$$

$$S=\frac{5}{3}$$

2) $f(x)=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]$ eğrisinin $1 \leq x \leq 2$ aralığındaki uzunluğunu bulunuz.

$$f'(x)=\sqrt{x^2-1} \quad , \quad S=\int_1^2 x\,dx=\frac{3}{2}$$