

13 Ekl 2

65 Ekl 6

$$13 - \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dx}{(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}})^2 - \frac{b^2}{4a} + c} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{du}{u^2 \mp k^2}$$

↑
tam kare

⇓
(11) veya (12)
nolu integrallerle
birbiridir.

14 - $\int \frac{Px+Q}{ax^2+bx+c} dx$: Paydanın türevi pay kısmında
olusturularak integral ibeyle
ayrılır. integralerden biri
(13) nolu integraldir.

$$15 - \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$16 - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C$$

$$17 - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$x = a \sin t$

$x = a \sec t$

$x = a \tan t$

2- Homojen Dif. Denklemler

Homojen Fonksiyon : $f(x,y)$ fonksiyonu ;

$f(dx, dy) = d^n f(x,y)$ şartını sağlıyorsa $f(x,y)$ fonksiyonuna n . dereceden Homojen Fonksiyon denir.

Örnek : $f(x,y) = x^3 + x^2y + y^3$ fonksiyonu 3. dereceden Homojen fonksiyondur.

Bir dif. denklem $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ şeklinde veya

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ denkleminde $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$

fonsiyonları aynı dereceden Homojen fonsiyonlar ise

denklem Homojen Diferansiyel Denklem denir.

Homojen dif. denklemi çözmek için önce denklemin her iki tarafı x^n 'e (veya y^n 'e) bölünür. Sonrada,

$\boxed{\frac{y}{x} = u}$ dönüşümü yapılır.

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u \cdot x \text{ olur.}$$

$$\boxed{dy = u dx + x du} \text{ olur.}$$

Bu dönüşüm denklemde yerine yazılırsa, denklem değişkenlere ayrılabilen dif. denkleme dönüşür.

Örnekler:

1) $(x^3 + y^3) dx - xy^2 dy = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz. $\left(\frac{y^3}{3x^3} - \ln x + C = 0 \right)$

Çözüm: $\left(1 - \left(\frac{y}{x} \right)^3 \right) dx - \left(\frac{y}{x} \right)^2 dy = 0$ $\frac{y}{x} = u, y = ux$
 $dy = u dx + x du$

$$(1 - u^3) dx - u^2 (u dx + x du) = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int u^2 du = 0 \quad \ln x - \frac{u^3}{3} = C.$$

$$\boxed{\ln x - \frac{y^3}{3x^3} = C}$$

2) $(x - y) dx + (x + y) dy = 0$ dif. denklemini çözünüz.

$$3) (y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx - x dy = 0$$

$$4) y' \cdot x \cdot \cos \frac{y}{x} = y \cdot \cos \frac{y}{x} - x$$

$$5) y' = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + xy}$$

3. Homojen veya Değişkenlerine ayrılabilen denklemlere dönüşen Dif. Denklemler

$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$ şeklindeki dif. denklemlerdir. Bu tip denklemler Homojen veya Değişkenlerine ayrılabilen denklemlere dönüştürülerek (uygun bir dönüşümle) çözümler.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (1) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ bulunur.}$$

① $\Delta \neq 0$ olsun. Bu durumda (1) sisteminin tek çözümü vardır. Bu çözüm $x=h$ ve $y=k$ olsun. Bu durumda,

$$x = x_1 + h ; \quad dx = dx_1$$

$$y = y_1 + k ; \quad dy = dy_1 \quad \text{dönüşümü yapılarak denkleme,}$$

$$(a_1x_1 + b_1y_1)dx_1 + (a_2x_1 + b_2y_1)dy_1 = 0$$

şeklinde Homojen dif. denkleme dönüşür.

Örnek: $(x+y-3)dx + (-x+y+1)dy = 0$ dif. denk.
 genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ olur. 0 hatta denklem

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ -x+y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1=k \\ x=2=h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x_1+2 \\ y=y_1+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=dx_1 \\ dy=dy_1 \end{cases}$$

denklemi yapılırsa,

$$(x_1+y_1)dx_1 + (-x_1+y_1)dy_1 = 0 \text{ şeklinde Homojen Dif.}$$

Denkleme dönüşümü olur.

$$\left(1 + \frac{y_1}{x_1}\right)dx_1 + \left(-1 + \frac{y_1}{x_1}\right)dy_1 = 0 \quad \boxed{\frac{y_1}{x_1} = u} \quad y_1 = x_1 \cdot u$$

$$(1+u)dx_1 + (-1+u)(x_1 du + u dx_1) = 0 \quad dy_1 = x_1 du + u dx_1$$

$$(1+u - u + u^2)dx_1 + (-1+u)x_1 du = 0$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} + \int \frac{-1+u}{1+u^2} du = 0$$

$$\ln x_1 - \arctan u + \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln c.$$

$$\boxed{\ln(x-2) - \arctan \frac{y-1}{x-2} + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2\right) = \ln c.}$$

2) $\Delta=0$ olsun.

$a_1x+b_1y=u$ (veya $a_2x+b_2y=u$) dönüşümü yapılırsa
denklemler denklemler değişkenlerine ayrılabilir dif. denkleme dönüşür.

$$a_1x+b_1y=u \text{ dersek} \\ a_1dx+b_1dy=du \text{ olur.}$$

Örnek: $(x+y+1)dx + (2x+2y+1)dy=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz. $(x+2y+\ln(x+y)=C)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad x+y=u, \quad dx+dy=du \text{ olur.}$$

$$(u+1)dx + (2u+1)(du-dx)=0$$

$$(u+1-\cancel{2u}-1)dx + (2u+1)du=0$$

$$dx + \frac{2u+1}{-u} du = 0$$

$$\int dx - \int \left(2 + \frac{1}{u}\right) du = 0$$

$$x - 2u - \ln u = C$$

$$\boxed{x - 2(x+y) - \ln(x+y) = C}$$

13 EK1

~~65 EK5~~

Bilimlesi gereken integraler

$$1 - \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$2 - \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$3 - \int e^x dx = e^x + C ; \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$4 - \int \sin x dx = -\cos x + C ; \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

$$5 - \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$6 - \int \tan x dx = -\ln \cos x + C = \ln \sec x + C$$

$$7 - \int \cot x dx = \ln \sin x + C$$

$$8 - \int \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x) + C$$

$$9 - \int \operatorname{cosec} x dx = \ln(\operatorname{cosec} x - \cot x) + C$$

$$10 - \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C$$

$$11 - \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$12 - \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C$$