

~~Örnek~~ ①

Örnek: $y''' - 4y' = 0$ Dif. Denklemini
Sistem olarak yazınız.

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y''$$

$$(x_1' = x_2) \text{ ve } y'' = x_2' \text{ olur.}$$

$$\Downarrow$$
$$(x_2' = x_3)$$

$$y''' = x_3' \text{ olur. } x_3' - 4x_2 = 0$$

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = x_3$$

$$x_3' = 4x_2$$

} Sistemi elde edilir.

Örnek: $y''' + y' + 2y = 0$

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y''$$

$$(x_1' = x_2) \quad y'' = x_2' = x_3$$

$$x_3' + x_2 + 2x_1 = 0$$

$$y''' = x_3'$$

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = x_3$$

$$x_3' = -2x_1 - x_2$$

3) Karakteristik denklemin kökleri (özdeğerler) katlı olsun.

$X' = AX$ sistemini gözönüne alalım.

m t özdeğerinin katlılığı olsun. p de lineer bağımsız özvektör sayısı olsun.

1) $m=2$, $p=1$ ise

$$u_1 = e^{\lambda t} \cdot K_0, \quad u_2 = e^{\lambda t} (tK_0 + K_1)$$

2) $m=3$, $p=1$ ise

$$u_1 = e^{\lambda t} K_0, \quad u_2 = e^{\lambda t} (tK_0 + K_1), \quad u_3 = e^{\lambda t} \left(\frac{t^2}{2!} K_0 + tK_1 + K_2 \right)$$

3) $m=3$, $p=2$ ise

$$u_1 = e^{\lambda t} K_0, \quad u_2 = e^{\lambda t} K_1, \quad u_3 = e^{\lambda t} (tK_3 + K_4)$$

Burada; $K_3 = aK_0 + bK_1$ dir.

Burada K_0 ve K_1 A nın lineer bağımsız (λ özdeğerine karşılık gelen) özvektörleridir.

$$K_3 = aK_0 + bK_1$$

-3-

Genelleştirilmiş Övektör.

$$\left. \begin{array}{l} (A - \lambda I)K_0 = 0 \quad (1) \\ (A - \lambda I)K_1 = K_0 \quad (2) \end{array} \right\} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \text{ olsun.}$$

(1) denkleminde K_0 , λ özdeğerine karşılık gelen öz vektördür. (2) denklemindeki K_1 öz vektörü (2) denklemini sağlayan A 'nın genelleştirilmiş öz vektörüdür.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \text{ olsun.}$$

$$(A - \lambda I)K_0 = 0 \quad (1)$$

$$(A - \lambda I)K_1 = K_0 \quad (2)$$

$$(A - \lambda I)K_2 = K_1 \quad (3)$$

Burada 1 tane lineer bağımsız K_0 öz vektörü vardır. K_1 ve K_2 genelleştirilmiş öz vektörlerdir.

-4-

Örnek :
$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= 4x_1 - 4x_2 - x_3 \end{aligned} \right\} \text{Sistemi}' \text{ çözümler.}$$

Çözüm : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\boxed{X' = AX}$

$$(A - \lambda I)K = 0 \quad K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} (1-\lambda)k_1 - 2k_2 &= 0 \\ (-1-\lambda)k_2 &= 0 \\ 4k_1 - 4k_2 + (-1-\lambda)k_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} |A - \lambda I| &= 0 \\ \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= (-1-\lambda)^2(1-\lambda) = 0 \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -1$ bulunur.

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1 \text{ için } \begin{cases} -2k_2 = 0 \\ -2k_2 = 0 \\ 4k_1 - 4k_2 - 2k_3 = 0 \end{cases} & \begin{cases} k_1 = s \text{ keyfi } (s \neq 0) \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 2s \end{cases} & K_1 = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ & s=1 \text{ olsun} & K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ u_1 = e^{t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}} & \checkmark \end{aligned}$$

-5-

$$\lambda_2 = -1 \text{ için } \left. \begin{array}{l} 2k_1 - 2k_2 = 0 \\ 4k_1 - 4k_2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} k_1 = k_2 = s \text{ keydi} \\ k_3 = t \text{ keydi} \end{array}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} s \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{K_2} + t \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{K_3}$$

$$u_2 = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 2e^t & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$X = T \cdot C = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 2e^t & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ x_2 = c_2 e^{-t} \\ x_3 = 2c_1 e^t + c_2 e^{-t} \end{array} \right\} \text{ Genel çözüm}$$

Örnek: $X' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} X$ Sistemini çözüyoruz.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} (A - \lambda I)K = 0 \\ (-1 - \lambda)k_1 - k_2 = 0 \\ k_1 + (-3 - \lambda)k_2 = 0 \end{cases}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -1 \\ 1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0$$

$\lambda_{1,2} = -2$ özdeğerleri bulunur.
(iki katlı kök)

$$\lambda_1 = -2 \text{ için } \begin{cases} k_1 - k_2 = 0 \\ k_1 - k_2 = 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} k_2 = s \text{ keyfi} \\ k_1 = s \text{ olur} \end{array} \right\} \text{ s=1 için } K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = e^{-2t} K_1 = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \checkmark$$

$(A - \lambda I)K_2 = K_1$ den K_2 genelleştirilmiş özvektörü bulunur.

$$\begin{cases} k_1 - k_2 = 1 \\ k_1 - k_2 = 1 \end{cases} \left. \begin{array}{l} k_2 = t \text{ keyfi} \\ k_1 = 1 + t \text{ olur.} \end{array} \right\} K_2 = \begin{bmatrix} t+1 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = e^{-2t} (t K_1 + K_2) \quad t=1 \text{ için}$$

$$u_2 = e^{-2t} \begin{bmatrix} t+2 \\ t+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t+2)e^{-2t} \\ (t+1)e^{-2t} \end{bmatrix} \checkmark$$

~~7~~

$$T = [u_1 \ u_2]$$

$$T = \begin{bmatrix} e^{-2t} & (t+2)e^{-2t} \\ e^{-2t} & (t+1)e^{-2t} \end{bmatrix} \quad X = TC.$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & (t+2)e^{-2t} \\ e^{-2t} & (t+1)e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-2t} (t+2) \\ x_2 &= c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-2t} (t+1) \end{aligned} \right\} \text{ bulunur.}$$

Örnek: $\left. \begin{aligned} x_1' &= 2x_1 - x_2 \\ x_2' &= x_1 \\ x_3' &= 3x_3 \end{aligned} \right\} \text{ Sistemin Genel Çözümünü}$
bulunuz.

Çözüm: $(A - \lambda I)K = 0$

$$\left. \begin{aligned} (2-\lambda)k_1 - k_2 &= 0 \\ k_1 - \lambda k_2 &= 0 \\ (3-\lambda)k_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} |A - \lambda I| &= 0 \\ \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) &= 0 \end{aligned}$$

-8-

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = 1$ özdeğerler.

$$\lambda_1 = 3 \text{ için } \left. \begin{array}{l} -k_1 - k_2 = 0 \\ k_1 - 3k_2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = s \text{ keyfi} \end{array}$$

$$s=1 \text{ için } K_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ olur. } U_1 = e^{3t} K_1$$

$$U_1 = e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\lambda_2 = 1 \text{ için } \left. \begin{array}{l} +k_1 - k_2 = 0 \\ k_1 - k_2 = 0 \\ 2k_3 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} k_2 = s \text{ keyfi} \\ k_1 = s \text{ olur.} \\ k_3 = 0 \end{array} \quad s=1 \text{ için.}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad U_2 = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

$U_3 = ?$ $K_3 = ?$ (Genelleştirilmiş Özyeğir)

$$(A - \lambda I) K_3 = K_2$$

$$\left. \begin{array}{l} k_1 - k_2 = 1 \\ k_1 - k_2 = 1 \\ 2k_3 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} k_2 = s \text{ keyfi} \\ k_1 = s+1 \\ k_3 = 0 \end{array} \quad s=1 \text{ için } K_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U_3 = e^t \begin{bmatrix} t+2 \\ t+1 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$U_3 = e^t (tK_2 + K_3)$$

~~8~~

$$T = \begin{bmatrix} 0 & e^t & e^t(t+2) \\ 0 & e^t & e^t(t+1) \\ e^{3t} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = TC.$$

$$x_1 = c_2 e^t + c_3 e^t(t+2)$$

$$x_2 = c_2 e^t + c_3 e^t(t+1)$$

$$x_3 = c_1 e^{3t}$$

} Genel Çözüm.

Örnek :

$$y_1' = y_1$$

$$y_2' = 2y_1 + 2y_2 - y_3$$

$$y_3' = y_2$$

Sistemi çözüyoruz

$$|A - \lambda I| = 0 \text{ dan}$$

Çözüm :

$$\lambda_{1,2,3} = 1 \text{ "üç katlı kök."}$$

bulunur.

$$(A - \lambda I)K = 0$$

$$\left. \begin{aligned} (1-\lambda)k_1 &= 0 \\ 2k_1 + (2-\lambda)k_2 - k_3 &= 0 \\ k_2 - \lambda k_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 = 1 \text{ için } 2k_1 + k_2 - k_3 &= 0 \\ k_2 - k_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$k_3 = s \text{ keyfi } k_2 = s \text{ olur. } k_1 = 0 \text{ olur.}$$

$$K_1 = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad s=1 \text{ olsun. } K_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_1 = e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)K_2 = K_1$$

$$\left. \begin{aligned} 2k_1 + k_2 - k_3 &= 1 \\ k_2 - k_3 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} k_3 &= s \text{ keyfi} \\ k_2 &= s+1 \text{ olur.} \\ k_1 &= 0 \text{ olur.} \end{aligned} \right\}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ s+1 \\ s \end{bmatrix} \quad s=1 \text{ olsun.}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = e^t \begin{bmatrix} t K_1 + K_2 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 0 \\ t+2 \\ t+1 \end{bmatrix}$$

✓