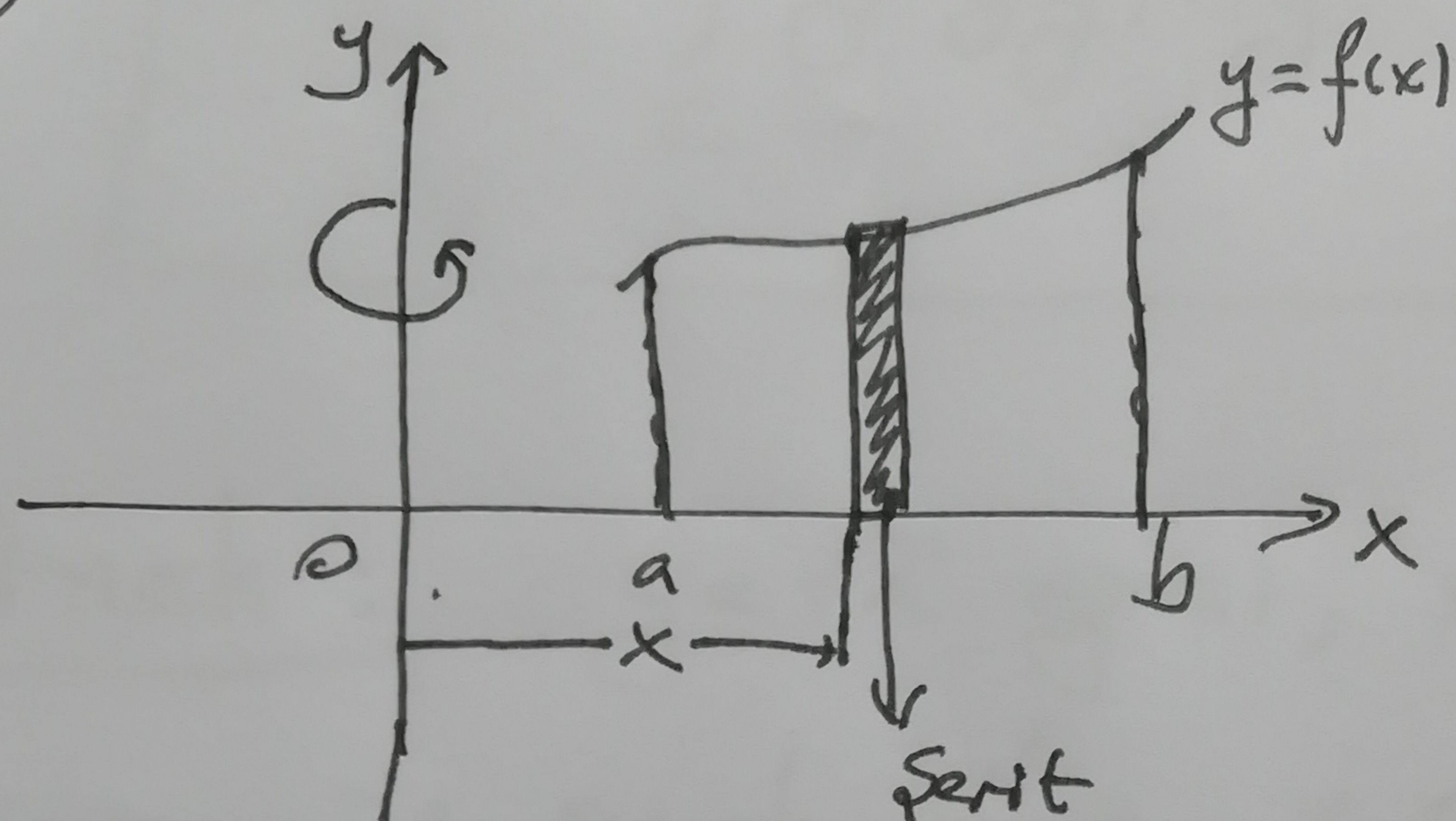


Silindirik Kabuk Yöntemi

y eksenini etrafında dönme için kabuk formülü



Şekildeki bölgenin y eksenini etrafında dönmesiyle elde edilen cismin hacmi !

$$V = 2\pi \int_a^b (\text{kabuk yarıçapı}) (\text{kabuk yüksekliği}) dx$$

↓
Seri'nin dönme
eksenine uzaklığı
(x)

↓
Seri'nin yüksekliği:
(f(x))

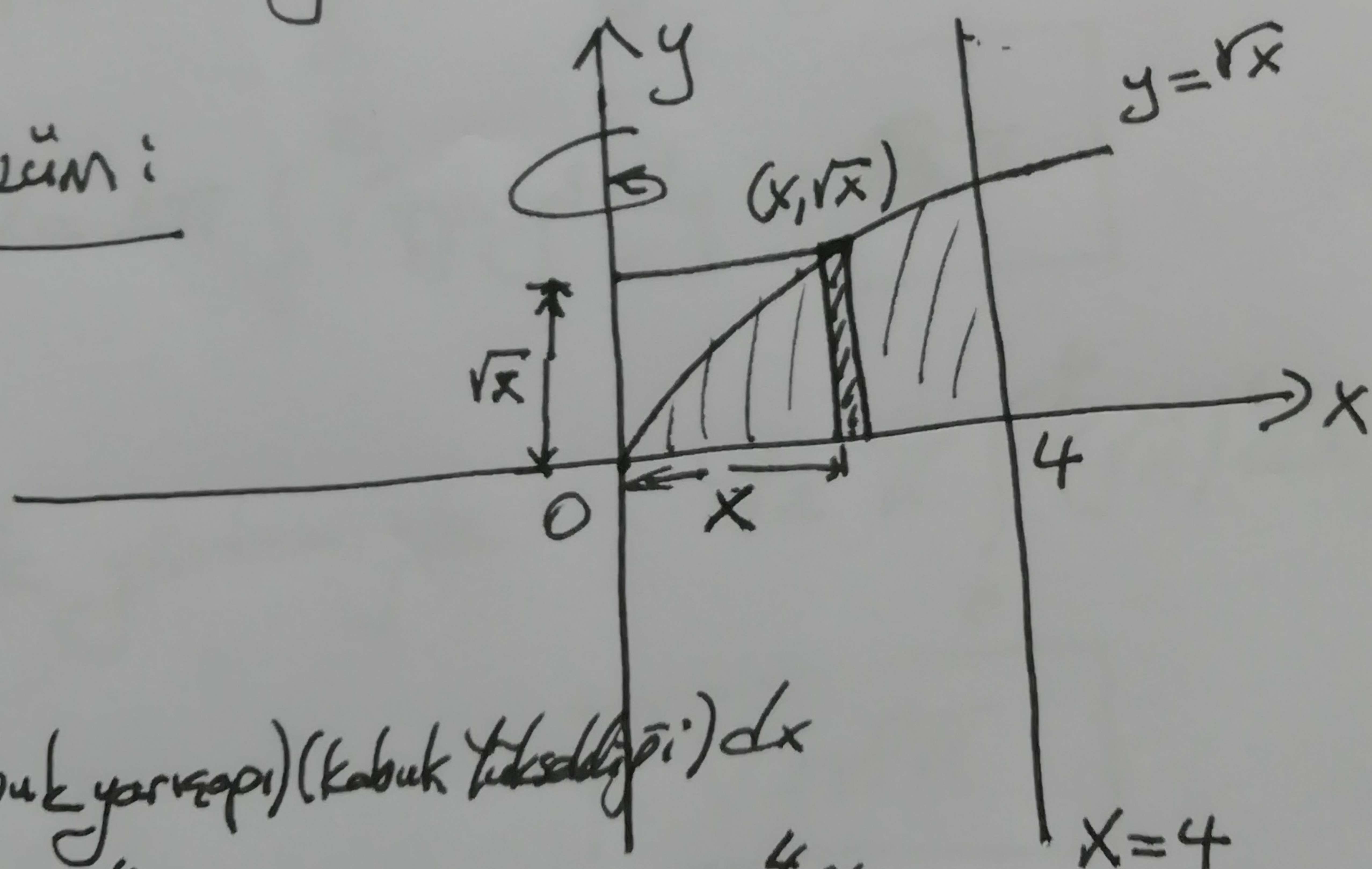
$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

x eksenini etrafında dönme için kabuk formülü

$$V = 2\pi \int_c^d y \cdot g(y) dy$$

Örnek: $y = \sqrt{x}$ eğrisi, x eksenini ve $x=4$ doğrusu ile sınırlı bölge y eksenini etrafında döndürüldüğünde oluşan cismin hacmini hesaplayın

Çözüm:

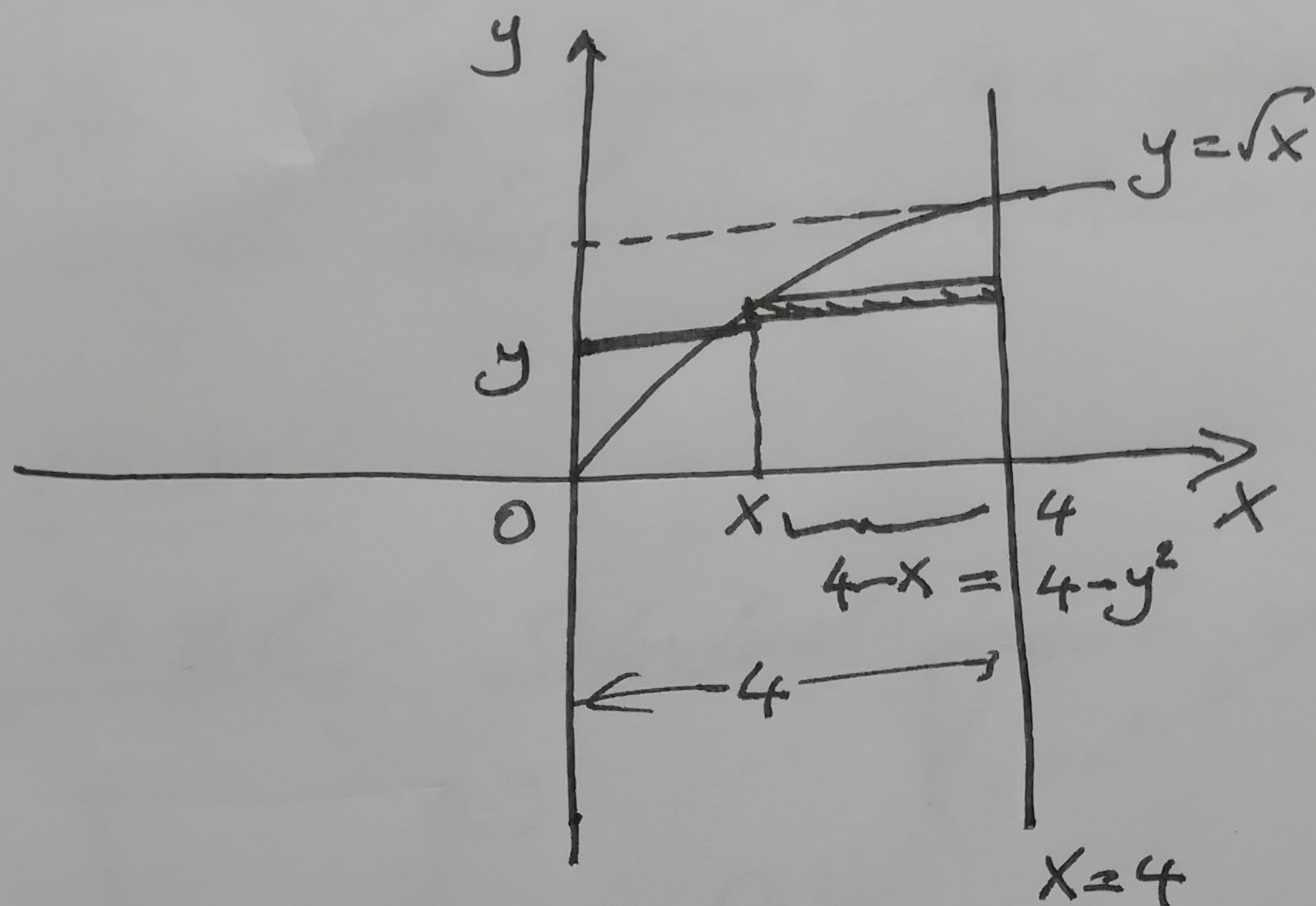


$$V = 2\pi \int_a^b (\text{Kabuk yarıçapı}) (\text{Kabuk yüksekliği}) dx$$

$$V = 2\pi \int_0^4 x \cdot \sqrt{x} dx = 2\pi \int_0^4 x^{3/2} dx = \frac{128\pi}{5} \text{ birim}^3$$

Not: Herhangi bir eksen etrafında döndürülüyorsa, o eksene paralel serit alınır.

X eksenı etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmi:



$$V = 2\pi \int_0^2 y \cdot (4-y^2) dy$$

$$V = 2\pi \int_0^2 (4y - y^3) dy = 8\pi$$

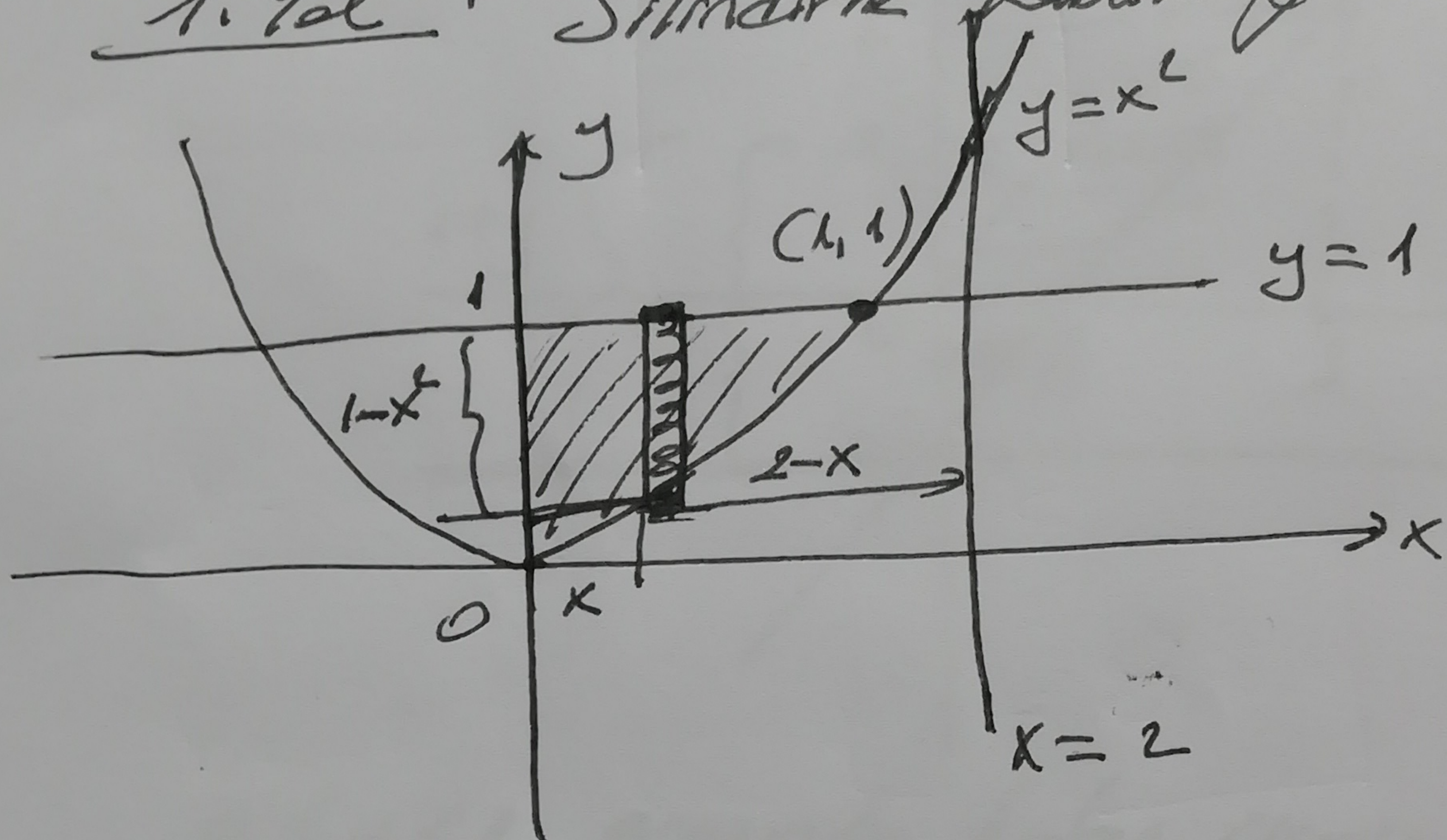
Disk yöntemiyle: $V = 2\pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx$

$$V = 8\pi$$

Örnek: $y=x^2$ parabolü, y eksen ve $y=1$ doğruları ile sınırlı bölgenin $x=2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini hesaplayınız.

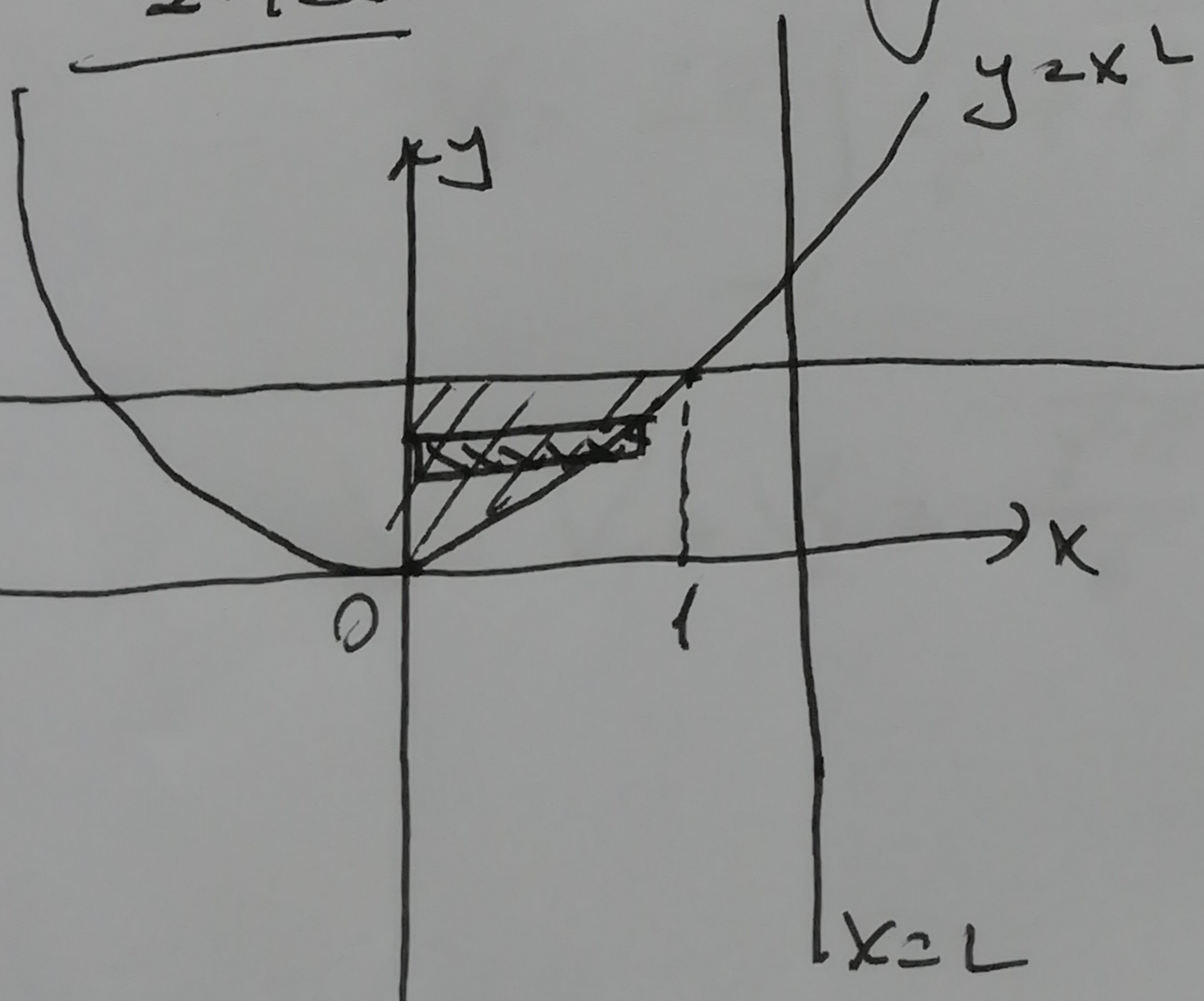
Çözüm:

1. Yol: Silindirik kabuk yöntemi ile çözüm.



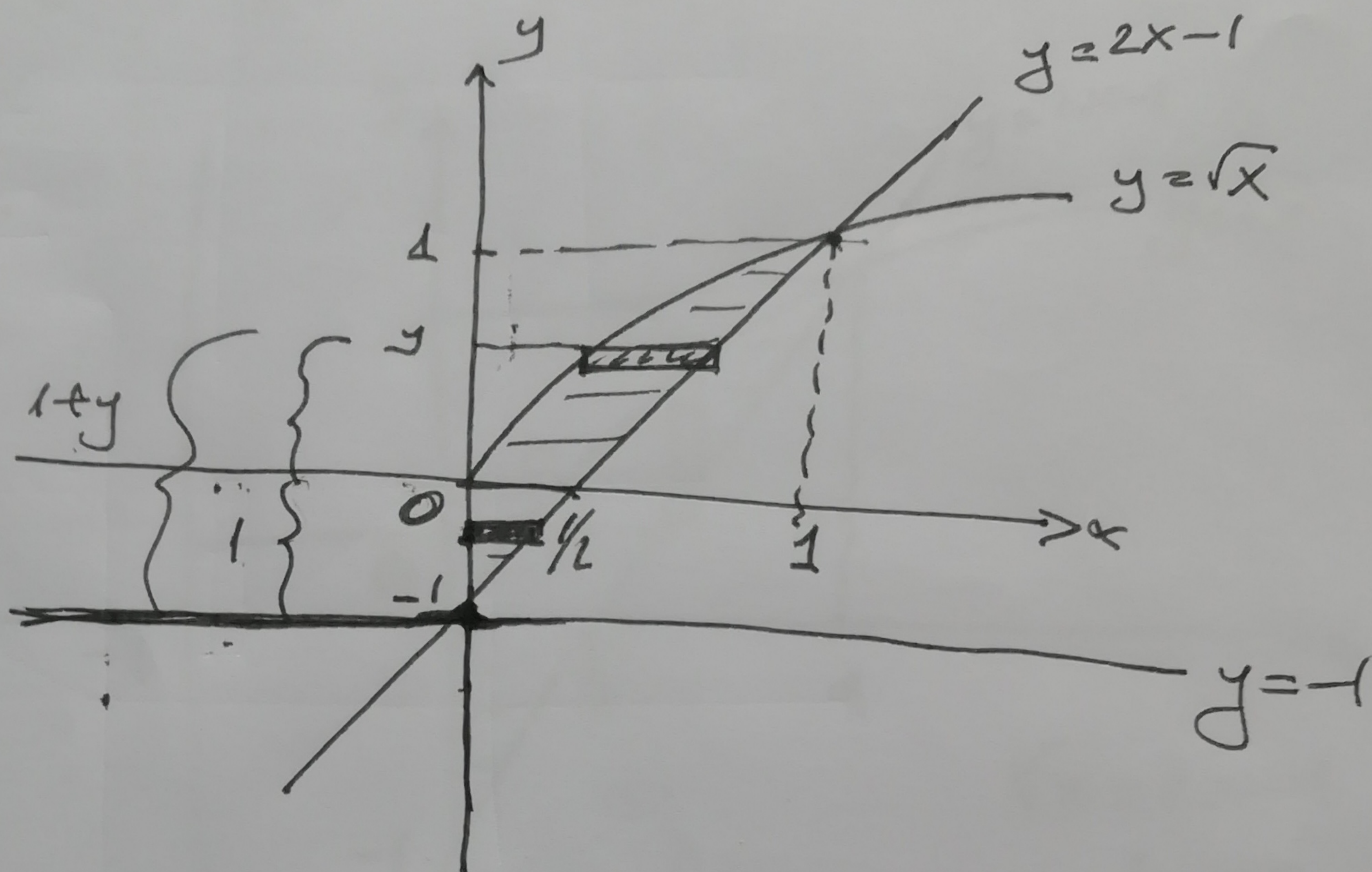
$$V = 2\pi \int_0^1 (2-x)(1-x^2) dx = \frac{13\pi}{6} \text{ br}^3$$

2. Yol: Disk yöntemi ile çözüm:



$$V = \pi \int_0^1 [2^2 - (2-\sqrt{y})^2] dy = \frac{13\pi}{6}$$

-5-



$0 \leq y \leq 1$ arasında kalın cismin hacmi:

$$V_1 = 2\pi \int_0^1 (1+y) \left[\frac{y+1}{2} - y^2 \right] dy = \frac{7\pi}{6} \text{ br}^3$$

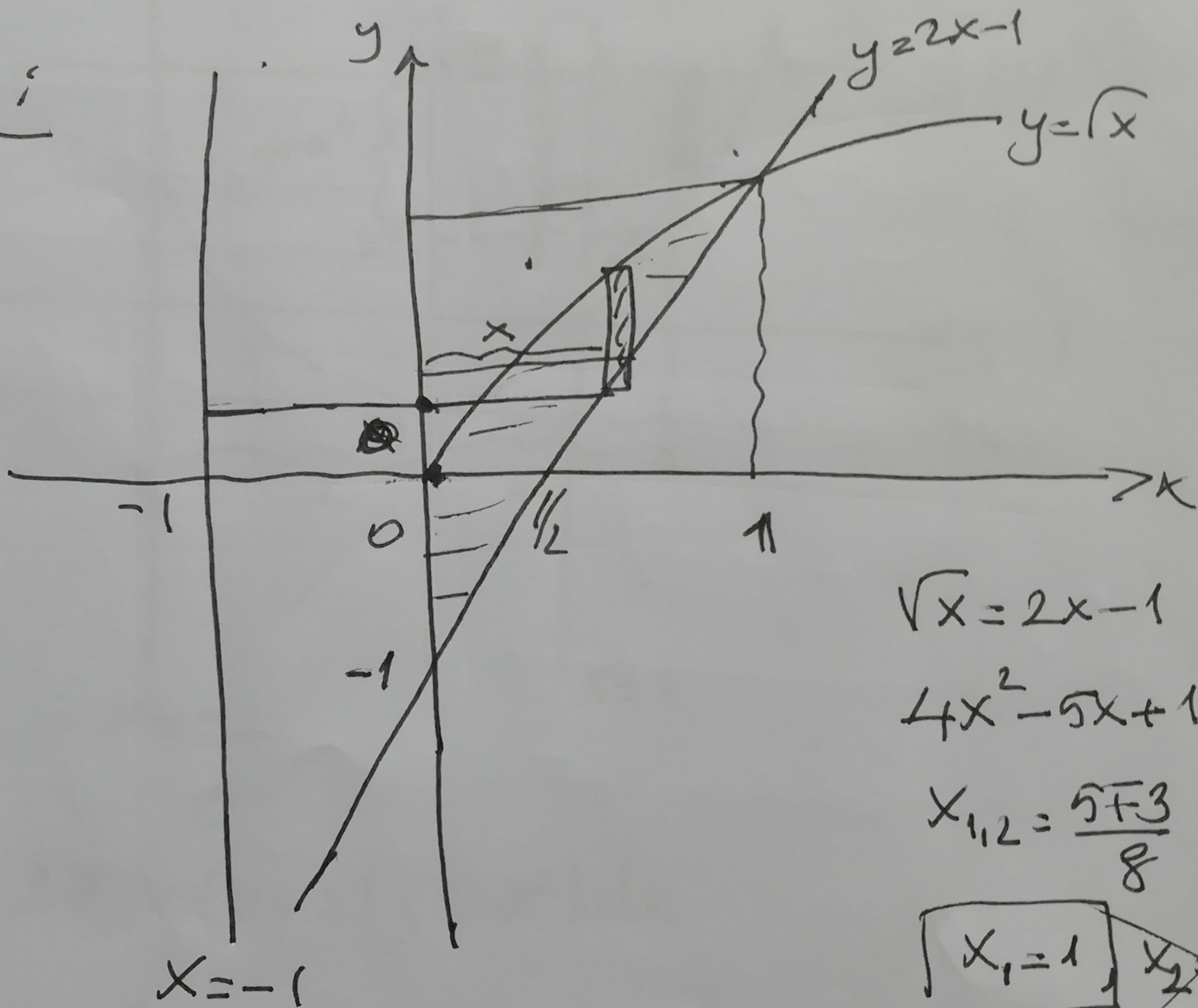
- $-1 \leq y \leq 0$ arasında Katan cismin hacmi:

$$V_2 = 2\pi \int_{-1}^0 (y+1) \left(\frac{y+1}{2} \right) dy = \frac{\pi}{3} \text{ br}^3$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} \text{ br}^3 \text{ bulamr.}$$

Örnek: $y=\sqrt{x}$ ve $y=2x-1$ eğrileri ile sınırlı bölge $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere, $x=-1$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

Çözümü



$$\sqrt{x} = 2x - 1$$

$$4x^2 - 5x + 1 = 0$$

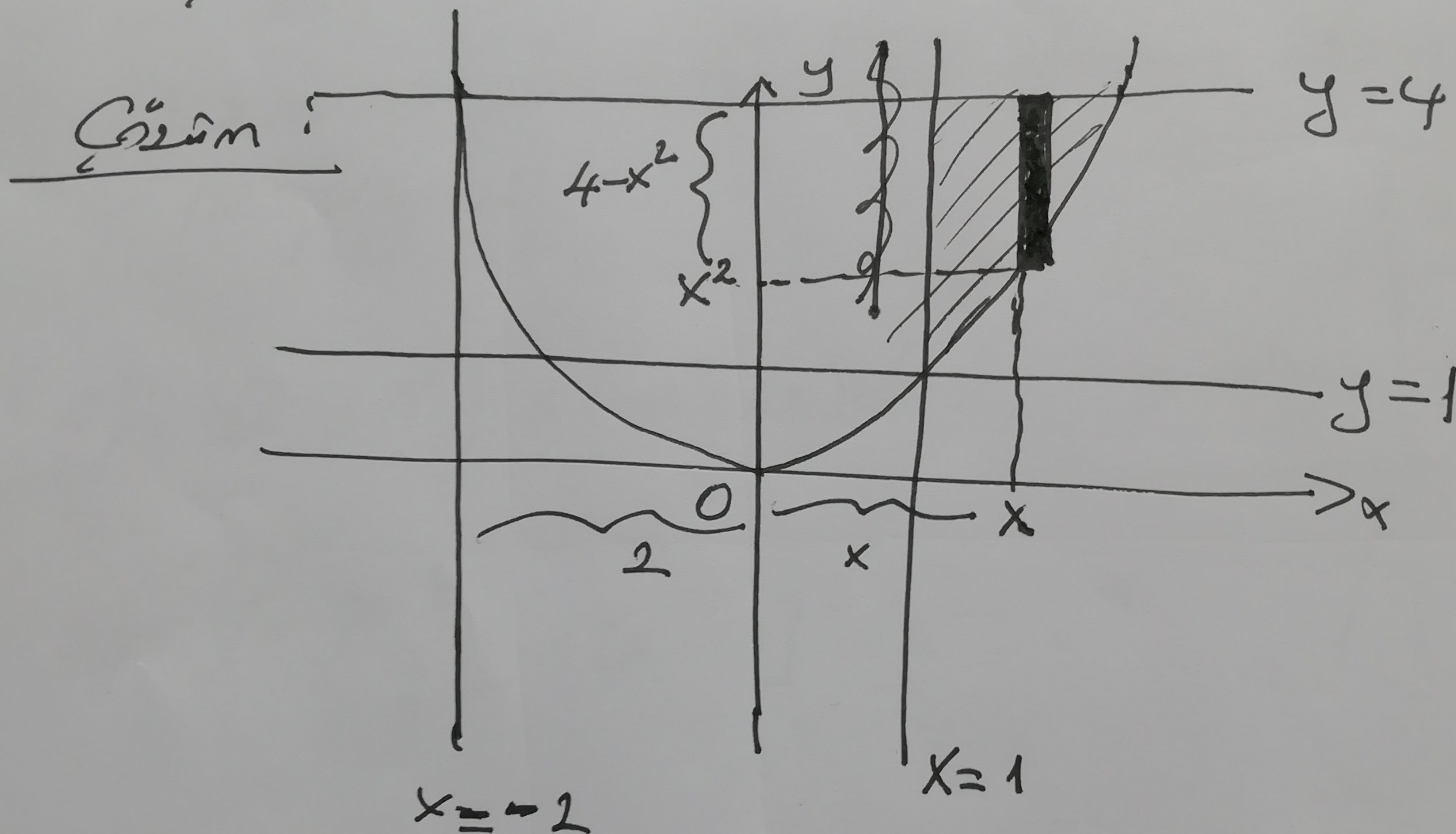
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8}$$

$$\boxed{x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{4}}$$

$$V = 2\pi \int_0^1 (x+1) \cdot [\sqrt{x} - (2x-1)] dx$$

$$\boxed{V = \frac{9\pi}{5} 6r^3}$$

Örnek: $y=x^2$, $x=1$, $y=1$, $y=4$ eğrileri ile sınırlı bölgenin $x=-2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.



$$V = 2\pi \int_1^2 (x+2) \cdot (4-x^2) dx$$

$$V = 2\pi \int_1^2 (-x^3 - 2x^2 + 4x + 8) dx$$

$$V = \frac{67\pi}{6} \text{ br}^3$$

-8-

Örnek: $y = -x^2 + 2x$ eğrisinin altında, x ekseninin üzerinde kalan bölgenin;

- a) y eksenî etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini hesaplayınız.
- b) x eksenî etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini hesaplayınız.

a) $V = 2\pi \int_0^2 x(-x^2 + 2x) dx$

b) $V = \pi \int_0^2 [-x(x-2)]^2 dx$

