

Linear Sistem katagori bir Normal Diferansiyel Denklemler Sistemi de dikkat ve 2 vektör yardımıyla çözümü

$\frac{dx}{dt} = Ax + H$ Belirli bir sisteme Normal Sistem denir.

$\frac{dx}{dt} = Ax$ Sisteme Homojen sisteme denir.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

}

Sistemin çözümünü

$x_1 = \alpha_1 e^{\lambda t}, x_2 = \alpha_2 e^{\lambda t}, \dots, x_n = \alpha_n e^{\lambda t}$

olabilir.

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n &= 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n &= 0 \end{aligned}$$

}

Linear homojen denklemler sistemi elde edilir.

$|A - \lambda I| = 0$ olmalıdır. Buradan $\alpha_i, i=1,2,\dots,n$ bulunur.

$(A - \lambda I)\alpha_i = 0$ Sisteminde α_i ler bulunur.

λ_1	igil	$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$	bulunur.	Çözüm	$x_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}, x_2 = \alpha_2 e^{\lambda_1 t}, \dots, x_n = \alpha_n e^{\lambda_1 t}$
λ_2	"	$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$	"	"	$x_1 = \alpha_1 e^{\lambda_2 t}, x_2 = \alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, x_n = \alpha_n e^{\lambda_2 t}$
$\vdots$					
λ_n	"	$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$	"	"	$x_1 = \alpha_1 e^{\lambda_n t}, x_2 = \alpha_2 e^{\lambda_n t}, \dots, x_n = \alpha_n e^{\lambda_n t}$

-1b-

(Hanger)

Genel çözüm:

$$x_1 = C_1 \alpha_1^{(1)} e^{3t} + C_2 \alpha_1^{(2)} e^{-t} + \dots + C_n \alpha_1^{(n)} e^{3t}$$

$$x_2 = C_1 \alpha_2^{(1)} e^{3t} + C_2 \alpha_2^{(2)} e^{-t} + \dots + C_n \alpha_2^{(n)} e^{3t}$$

$\vdots$

$$x_n =$$

Genel çözüm

$$\boxed{X = XC} \text{ olur.}$$

Örnek: $\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 \quad (+\text{Cost})$

$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + x_2 \quad (-\text{Smt})$

$$\boxed{\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1}$$

Sonuç:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} \\ x_2 &= -C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} \end{aligned} \right\}$$

~~Örnek~~

Örnek:

$$\frac{dx}{dt} = -5x + 5y + 7z$$

$$\frac{dy}{dt} = -2x + 2y + 3z$$

$$\frac{dz}{dt} = -4x + 5y + 4z$$

Sistemli çözüm.

$$x = \alpha_1 e^{3t}, y = \alpha_2 e^{3t}, z = \alpha_3 e^{3t}$$

Örnek: $\frac{dx}{dt} = x + y$

$$\frac{dy}{dt} = y - z$$

$$\frac{dz}{dt} = -2y$$

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{2t}$$

$$y = -2C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$$

$$z = -4C_1 e^{-t} - C_2 e^{2t}$$

Sonuç -

Örnek: $X' = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} X$ sisteminin çözümünü.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i \text{ olur.}$$

$$\left. \begin{aligned} (2-\lambda)x_1 + 8x_2 &= 0 \\ -x_1 + (-2-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \lambda_1 = 2i \text{ için } \left. \begin{aligned} (2-2i)x_1 + 8x_2 &= 0 \\ -x_1 + (-2-2i)x_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$x_2 = r \text{ keyfi}$$

$$x_1 = (-2-2i)r \text{ olur. } r=1 \text{ olsun.}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2-2i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{2it} \begin{bmatrix} -2-2i \\ 1 \end{bmatrix} = (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{bmatrix} -2-2i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cos 2t + 2\sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -2\sin 2t - 2\cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} -2\cos 2t + 2\sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} -2\cos 2t - 2\sin 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}$$

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2$$

$$X = C_1 \begin{bmatrix} -2\cos 2t + 2\sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -2\cos 2t - 2\sin 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $X' = AX$ sistemini özdeğerler ve özvektörler yardımıyla çözümler.

Çözüm: $(A - \lambda I)X = 0$ $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$ bulunur.

$\lambda_1 = -1$ için $X_1 = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ($s \neq 0$) $s=1$ için $X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 5$ için $X_2 = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, ($s \neq 0$) $s=1$ için $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = -1$ için $U_1 = e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 5$ için $U_2 = e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$U_1 = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$, $U_2 = \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 2e^{5t} \end{bmatrix}$ $T = \begin{bmatrix} -e^{-t} & e^{5t} \\ e^{-t} & 2e^{5t} \end{bmatrix}$ Temel Matris

$X = TC = \begin{bmatrix} -e^{-t} & e^{5t} \\ e^{-t} & 2e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \\ x_2 = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t} \end{cases}$ Genel Çözüm.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerleri ve öz vektörlerini bulunuz. A matrisinin genelleştirilmiş öz vektörü varsa bulunuz. A matrisi Defektli midir?

Çözüm: $(A - \lambda I)X = 0$

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)x_1 - 2x_2 = 0$$

$$(-1-\lambda)x_2 = 0$$

$$4x_1 - 4x_2 + (-1-\lambda)x_3 = 0$$

$$(-1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$(-1-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -1 \text{ bulunur.}$$

$$CK(1) = 1, CK(-1) = 2$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ için } \left. \begin{array}{l} -2x_2 = 0 \\ -2x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_3 = 2r \text{ keyfi} \\ x_2 = 0 \text{ olur} \\ x_2 = 0 \end{array} \quad X_1 = r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$gK(1) = 1$$

-52

$$\lambda_{2,3} = -1 \text{ için}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_1 = s \text{ keyfi} \\ x_2 = s \text{ olur.} \end{array}$$

$$r = 1, n = 3$$

$$n - r = 3 - 1 = 2 \text{ tane keyfi seçilir.}$$

birbirine

$$x_3 = r \text{ keyfi}$$

$$X = \begin{bmatrix} s \\ s \\ r \end{bmatrix} = s \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{x_2} + r \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_3}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$g_{OK}(-1) = 2 \text{ dir. } A \text{ matrisinin}$$

Genelleştirilmiş genelleştirilmiş öz vektörü yoktur.

Bu nedenle A matrisi defective Matris
değildir.

Sonuç: $e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$T = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 2e^t & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$X = TC = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 2e^t & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ C_2 e^{-t} \\ 2C_1 e^t + C_3 e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

$$x_2 = C_2 e^{-t}$$

$$x_3 = 2C_1 e^t + C_3 e^{-t}$$

} Genel çözüm bulunur.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ matrisinin varsa}$$

genelleştirilmiş $\vec{v}$ vektörünü bulunuz.

(A matrisinin Defective Matrix olduğunu gösteriniz)

Çözüm:

$$(A - \lambda I)X = 0$$

$$\left. \begin{aligned} (2-\lambda)x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 - \lambda x_2 &= 0 \\ (3-\lambda)x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} (*)$$

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \left| \begin{array}{ccc} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{array} \right| = 0$$

$$(3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$(3-\lambda)(\lambda-1)^2 = 0$$

$$\lambda_3 = 3, \quad \lambda_{1,2} = 1 \text{ (iki katlı kök)}$$

$$CK(1) = 2$$

-7a

$$\lambda_1 = 1 \text{ için } \left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$x_3 = 0$$

$$x_1 = x_2 = s \text{ keyfi}$$

$$X_1 = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow s=1 \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$gK(1) = 1 \text{ dir.}$$

$$CK(1) = 2, \quad gK(1) = 1$$

$CK(1) > gK(1)$ olduğundan A matrisi defective

matristir: $CK(1) > gK(1)$ olduğundan genelleştirilebilir

M_1 öz vektör vardır.

$$(A - \lambda I)X_1 = 0 \text{ dan } X_1 \text{ bulundu } X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)X_2 = X_1 \text{ den } X_2 \text{ genelleştirilebilir } \text{öz vektör bulunur.}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_3 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 = s \\ x_1 = 1 + s \text{ olur.} \end{array}$$

$$X_2 = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Genelleştirilebilir öz vektör

-76-

$$\lambda_1 = 1 \text{ km} \quad e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 \text{ km} :$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0$$

$$x_3 = 1 \text{ keyfi}$$

$$\lambda_2 = 1 \text{ km} \quad te^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 \text{ km} \quad e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} e^t & tet + et & 0 \\ e^t & tet & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}, \quad x_2 = TC; \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$x_2 \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^t \\ c_1 e^t + c_2 t e^t \\ c_3 e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

-EKL-

Ödev: $X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} X$ sistemini Ödeğerler ve
övektörler ile çözümler.

Örnek: $X' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ?$

$X' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} X$ Homojen sistemin çözümünü bulur.

$\lambda_{1,2} = -2$ iki katlı kök bulur.

$$T = \begin{bmatrix} e^{-2t} & (t+1)e^{-2t} \\ e^{-2t} & te^{-2t} \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} x = C_1 e^{-2t} + C_2 (t+1)e^{-2t} \\ y = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} \end{array} \right\}$$

1. Yol: Uygunsa Belirsiz katsayılar yöntemi kullanılabilir.

2. Yol: Sabit denge yöntemi kullanılır.

$$X_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} -a - b + 1 = 0 \\ a + 3b - 1 = 0 \end{array} \right\}$$

$$b = 0, a = 1$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{-2t} + C_2 (t+1)e^{-2t} + 1 \\ y &= C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} \end{aligned}$$

Verilen sistem;

$$\left. \begin{array}{l} x_1' = x_1 - x_2 + 1 \\ x_2' = x_1 - 3x_2 - 1 \end{array} \right\}$$

Ödev: 1) $X' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} X$

Sistemi çözümler.

2)
$$\left. \begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_3' &= x_2 - x_3 \end{aligned} \right\} \text{Sistemi çözümler.}$$

3)
$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2y - 3z \\ \frac{dy}{dt} &= -2x + 4y - 3z \\ \frac{dz}{dt} &= -2x + 2y - z \end{aligned} \right\} \text{Sistemi çözümler.}$$