

Titrezen Tel Problemi

X-ekseni boyunca 0 ile l arasında gerilmis titrezen tel problemini gözetme olsun. Bu problemin modeli ;

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad 0 \leq x \leq l \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad ; \quad 0 \leq x \leq l$$

$$u_t(x, 0) = g(x) \quad ; \quad 0 \leq x \leq l$$

Bastlangıç koşulları

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Homojen Sınır Koşulları (Dirichlet problemi)}$$

seçilinde verilir.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Sıfır Sınır Koşulları (Neumann problemi)}$$

Çözüm: $u(x, t) = X(x) T(t)$

$$X(x) \cdot T''(t) = c^2 X''(x) T(t)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

$$(2) \quad T'' - c^2 \lambda T = 0$$

$$(1) \quad X'' - \lambda X = 0$$

$$X(0) = 0$$

$$X(l) = 0 \quad \text{dur.}$$

$$(1) \Rightarrow X'' - \lambda X = 0 \quad r^2 - \lambda = 0$$

$$1) \quad \lambda > 0 \quad \text{olsun}$$

$$X = C_1 e^{-\sqrt{\lambda} x} + C_2 e^{\sqrt{\lambda} x}$$

$$X'' - \lambda X = 0$$

$$X(0) = 0$$

$$X(l) = 0$$

öz değer problemi

29.10.2012
P. 1. 1.

(2)

$$X(0) = 0 \Rightarrow$$

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$X(l) = 0 \Rightarrow$$

$$C_1 e^{-\sqrt{\lambda} l} + C_2 e^{\sqrt{\lambda} l} = 0$$

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 0 \text{ olur}$$

$X=0$ olur. $\checkmark$ Aritik çözüm

2) $\lambda = 0$ olsun. $\mu^2 = 0$

$$X = C_1 + C_2 x$$

$$X(0) = 0$$

$$C_1 = 0$$

$$X(l) = 0$$

$$C_1 + C_2 l = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$X=0$ olur.

3) $\lambda < 0$ olsun $\mu^2 - \lambda = 0$
 $\mu = \pm i\sqrt{\lambda}$

$$X = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$X(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\lambda} l = n\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}$$

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \quad n = 1, 2, \dots$$

öz değerler

$$\sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$n = 1, 2, \dots$$

öz fonksiyonlar

$$X_n = K_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

24.11.2011
12:01

③

Benzar sekilde ; $T'' - \lambda c^2 T = 0$ denklemini çözümler,

$$T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l} t\right)$$

şeklinde elde edilir.

$$U_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

$$U_n(x,t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{l} t \right) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$a_n = C_n k_n, \quad b_n = D_n \cdot k_n$$

Verilen lineer ve homojen olduğundan dolayı,

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$U(x,0) = f(x) \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$U_t(x,0) = g(x) \Rightarrow g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi c}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \text{olur.}$$

Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ Fourier sinüs serisine açılabilirse yukarıdaki 2 denklem sağlanacaktır.

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad \checkmark$$

$$b_n \cdot \frac{n\pi c}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad \checkmark$$

-4-

Örnek: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$

$$u(x, 0) = x$$

$$u_t(x, 0) = 0$$

$$u(0, t) = 0$$

$$u(1, t) = 0$$

Problemi çözünüz.

Ödev: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $0 \leq x \leq l$, $t > 0$

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$u_t(x, 0) = g(x)$$

$$u_x(0, t) = 0$$

$$u_x(l, t) = 0$$

(Neuman Problemini çözünüz.) (Problemi çözünüz)

①
EK-1

Homjen olmayan dalga denklemleri için;

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty$$

şeklinde tanımlanan başlangıç değer Problemini çözüme alalım. Problem Homjen olması halinde ($F(x, t) = 0$) çözümünü bulmuştuk. (D'Alembert çözümü)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) dz$$

şeklinde dir.

Homjen olmayan dalga denkleminin çözümü;

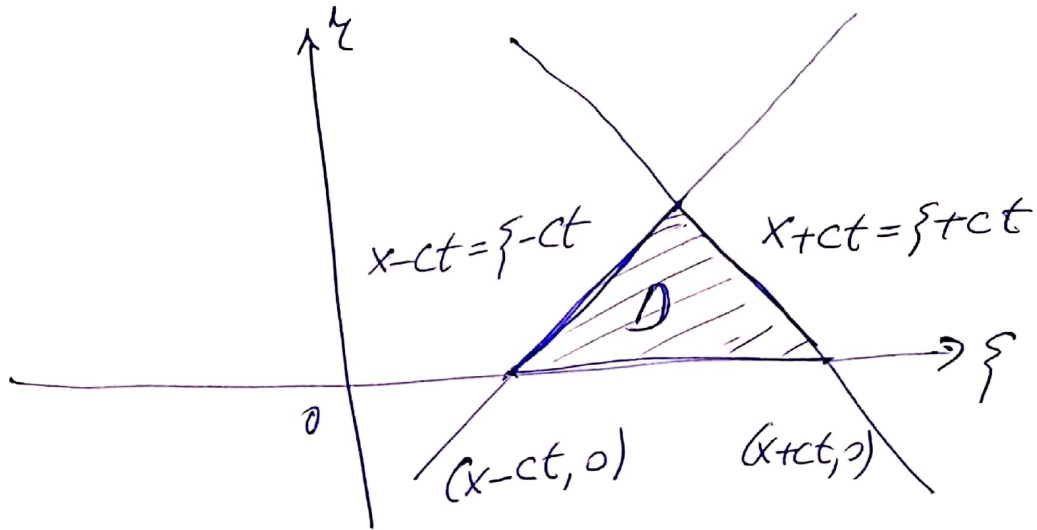
$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) dz + \frac{1}{2c} \iint_D F(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

şeklinde verilir. Burada D integrasyon bölgesi, Karakteristikler ve $t \geq 0$ doğrusal sınırlarıyla sınırlanmış üçgensel bölge olup, bu bölgeye karakteristik üçgen adı verilir.

$$D = \{(\xi, \tau): 0 \leq \tau \leq t, \quad x - c(t - \tau) < \xi < x + c(t - \tau)\}$$

(2)

$$D = \{(\xi, \tau) : 0 \leq \tau \leq t, x - c(t - \tau) < \xi < x + c(t - \tau)\}$$



Bu durumda;

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau + \frac{1}{2c} \int_{\tau=0}^t \int_{\xi=x-ct+c\tau}^{x+ct-c\tau} F(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

yanılabılır.

Örnek: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = x$

$$u(x, 0) = \sin x$$

$$u_t(x, 0) = x$$

Başlangıç değer problemi'ni çözüyoruz.

Sonuç: $u(x, t) = \cos(ct) \sin x + xt + \frac{1}{2} x t^2$

Örnek: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ denkleminin $u(x,t) = e^{ax+bt}$ şeklinde

özel tipten çözümünü ararsak, a ile b arasında $b = -a^2 c$ şeklinde bir bağıntı ortaya çıkar. Bu durumda,

$$u(x,t) = A e^{a(x - \sqrt{c} t)} \quad (A, a: \text{keyfi sabitler})$$

ifadesinde dalganın özel tipten bir çözümüdür.

Burada $a = ik$ (k : sabit, $i = \sqrt{-1}$) olarak alınırsa,

$\omega = kc$ olmak üzere,

$$u(x,t) = A e^{i(kx - \omega t)}$$

şeklinde çözümler elde edilir.

Burada ; $u_1(x,t) = A \cos(kx - \omega t)$

$$u_2(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

fonksiyonlarında ayrı ayrı dalganın sağlanır.