

Özdeğerler ve Övektörler

Bir Kare Matrisin Özdeğerleri ve Övektörleri

A $n \times n$ tipinde bir kare matris

X $n \times 1$ " bir sütun matrisi (vektör)

λ sayı

$AX = \lambda X$ (1) eşitliğini gözönüne alalım.

$$(A - \lambda I)X = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$I_n = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)X = 0$$

$$(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0$$

(1)

Linear Homojen denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin sıfır çözümler başka çözümlerinin (sonsuz çözüm) olabilmesi için...

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (\det(A - \lambda I) = 0) \text{ olmalıdır.}$$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| \text{ ya da Karakteristik polinom denir.}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \text{ denkleme Karakteristik denklem denir.}$$

Karakteristik denklem n . dereceden bir polinom denklemdir.

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (\text{şeklinde dir})$$

Karakteristik denklemin köklere $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dere

A kare matrisinin özdeğerleri denir.

Bu $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğerlere karşılık gelen

C1) Homojen sistemin sıfırdan farklı çözümlerine

A kare matrisinin özvektörleri denir.

$\lambda = \lambda_1$ iken X_1 özvektörü bulunur.

$\lambda = \lambda_2$ iken X_2 özvektörü bulunur.

$\vdots$

$\lambda = \lambda_n$ iken X_n özvektörü bulunur.

Özet A kare matrisi, $AX = \lambda X$; $(A - \lambda I)X = 0$
sisteminin sıfırdan farklı $X_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ çözümleri
olması sağlayan λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sayılarına özdeğer
bu özdeğerlere karşılık elde edilecek olan sıfırdan
farklı X_i çözümlerinde özvektörler denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.

Çözüm: $AX = \lambda X$
 $(A - \lambda I)X = 0$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda: \text{sayı}$$

$$(A - \lambda I)X = 0 \quad \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} (1-\lambda)x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (1) \text{ Lineer Homojen denklem sistemi}$$

$|A - \lambda I| = 0$: Karakteristik denklem

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3 \text{ bulunur.}$$

(Özdeğerler)

$$\lambda_1 = 2 \text{ için } \begin{array}{l} -x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 \text{ olur.} \\ x_2 = s \text{ keyfi seçersek.} \\ x_1 = s \text{ olur.} \end{array} \right.$$

$$X_1 = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

(Özvektör.)

$\lambda_1 = 2$ için $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ öz vektör bulunur. ($t \neq 0$ dir)

$\lambda_2 = 3$ için $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \text{ keyfi} \\ x_2 = 2t \text{ olur.} \end{cases} \Rightarrow X_2 = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
(öz vektör)
bulunur
($t \neq 0$)

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisi veriliyor.

- A 'nın karakteristik polinomunu yazınız.
- A 'nın öz değerlerini bulunuz.
- A 'nın öz vektörlerini bulunuz.

Çözüm:

$$(A - \lambda I)X = 0$$

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$P(\lambda) = |A - \lambda I|$ Karakteristik polinom.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 \text{ bulunur.}$$

a) $P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$: A kare matrisinin karakteristik polinomudur.

b) Karakteristik polinomun kökleri: Özdğerlerdir. polinom 3. dereceden olduğundan bir tane köküne deneme yoluyla bulunur. $(1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, 6, -6)$

$$\lambda = 1 \text{ için } P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0 \text{ olur}$$

$P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$ polnomu $(\lambda - 1)$ 'e tam

bölünür.

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 & \lambda - 1 \\ \lambda^3 - \lambda^2 & \lambda^2 - 5\lambda + 6 \rightarrow \text{Bölen} \\ \hline -5\lambda^2 + 11\lambda - 6 & \\ -5\lambda^2 + 5\lambda & \\ \hline 6\lambda - 6 & \\ 6\lambda - 6 & \\ \hline 0 & \rightarrow \text{Kalan} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) \text{ olur.} \end{aligned}$$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$ den. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ Özdğerleri bulunur.

$$c) \lambda_1 = 1 \text{ için } \left. \begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$x_2 = s \text{ keyfi}$$

$$x_3 = 2s$$

$$x_1 = s \text{ olur}$$

$$X_1 = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(s \neq 0)$$

$$s = 1 \text{ için}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

bulunur

$$\lambda_2 = 2 \text{ için}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & -3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$x_2 = t \text{ (keyfi) olsun}$$

$$x_3 = 4t \text{ olur}$$

$$x_1 = -2t \text{ olur}$$

$$X_2 = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(t \neq 0)$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

bulunur

$$\lambda_3 = 3 \text{ için}$$

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$x_3 = r \text{ olsun (keyfi)}$$

$$x_2 = \frac{r}{4}$$

$$x_1 = -\frac{r}{4} \text{ olur}$$

$$X_3 = r \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(r = 4 \text{ için})$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

bulunur

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisinin öz değerleri ve

öz vektörlerini bulunuz.

$$AX = \lambda X$$

Çözüm:

$$(A - \lambda I)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0$$

$$4x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0$$

(1) Lineer Homojen Denklemler
Sistemin sıfır çözümünden başka
çözümlerinin olması için:

$$|A - \lambda I| = \det(A - \lambda I) = 0$$

olmalıdır. Bu denkleme karakteristik denklem denir. Karakteristik denklemin köklerine öz değerler denir. (1) Homojen Lineer denklem sisteminin ($X \neq 0$) sıfırdan farklı çözümlerine öz vektörler denir.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \quad \boxed{\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5}$$

bulunur. (öz değerler)

$$\lambda_1 = -1 \text{ için } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = s \text{ (} s \neq 0 \text{ keyfi) olsun} \\ x_2 = -s \text{ olur.} \end{cases}$$

$$X_1 = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$s = 1 \text{ için } X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ bulunur}$$

$$\lambda_2 = 5 \text{ için } \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 = t \text{ (} t \neq 0 \text{ keyfi) olsun.} \\ x_2 = 2t \text{ olur.} \end{array} \right\}$$

$$X_2 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad t=1 \text{ için } X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Not: Bir kare matrisin özdeğerleri birbirinden farklı ise bu özdeğerlere karşılık gelen öz vektörler lineer bağımsızdır.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve öz vektörlerini bulunuz.

Çözüm: $AX = \lambda X$
 $(A - \lambda I)X = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -4 & -1-\lambda \end{bmatrix}}_{A-\lambda I} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_0 \quad \left. \begin{array}{l} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 = 0 \\ (-1-\lambda)x_2 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + (-1-\lambda)x_3 = 0 \end{array} \right\} (1)$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1} \text{ için } \begin{cases} -2x_2 = 0 \\ -2x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_3 = s \text{ keyfi } (s \neq 0) \\ x_1 = \frac{s}{2} \text{ olur.} \end{cases}$$

$$X_1 = s \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad s=2 \text{ seçelim. } (s' \text{ i sıfırdan farklı istediğimizi} \\ \text{seçebiliriz})$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ olur. Özvektörü } \lambda_1 = 1 \text{ için bulunmuş olur.}$$

$$\lambda_{2,3} = -1 \text{ için } \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = x_2 \text{ olur.} \\ x_2 = s \text{ keyfi} \\ x_1 = s \text{ olur.} \\ x_3 = t \text{ keyfi} \end{cases} \begin{cases} 2 \text{ tane} \\ \text{bilinmeyen} \\ \text{keyfi} \\ \text{seçilir.} \end{cases}$$

$$X_{2,3} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Öz vektörleri bulunur.

$$(s=1, t=0)$$

$$(s=0, t=1)$$