Diferansiyel Denklemler "anlatılacak konu başlıkları"

Konular

1	Diferansiyel denklem tanımı, kavramlar, örnekler, **Birinci mertebeden diferansiyel denklemler**
2	Değişkenlere ayrılabilir diferansiyel denklemler, Homojen Diferansiyel Denklemler, Homojen veya Değişkenlere ayrılabilir denklemlere dönüşebilen Diferansiyel Denklemler.
3	Tam diferansiyel denklemler, Tam Diferansiyel Denklemlere Dönüşebilen Diferansiyel Denklemler (İntegrasyon çarpanı), Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler
4	Lineer diferansiyel denklemlere dönüştürülebilir Diferansiyel denklemler (Bernoulli Dif. Denklemi, Riccati Dif. Denklemi). Clairaut Dif. Denklemi
5	Lagrange Dif. Denklemi, **Yüksek mertebeden non-homojen lineer diferansiyel denklemler**, homojen diferansiyel denklemler, temel çözümler takımı, **n.mertebeden lineer homojen diferansiyel denklemin genel çözümü**
6	Sabit katsayılı ikinci mertebeden lineer homojen diferansiyel denklemler, **Belirsiz katsayılar yöntemi**,
7	**Sabitin değişimi yöntemi** , Euler Dif. Denklemi
8	Bazı özel Diferansiyel denklemler, y bağımlı değişkenini açık olarak içermeyen denklemler, x bağımsız değişkenini açık olarak içermeyen denklemler, **"Ara sınavı"**
9	İkinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin seri çözümleri.(Adi nokta civarında çözüm)
10	Laplace dönüşümü. Ters Laplace Dönüşümü
11	Laplace dönüşümünün sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlere uygulamaları
12	Birinci mertebeden diferansiyel denklem sisteminin öz değerler ve öz vektörler yardımıyla çözümü.
13	**Final Sınavı**

Kaynaklar:

1. Çözümlü Dif. Denklem Problemleri
Doç. Dr. Cevdet Cerit
2. Dif. Denklemler
Prof. Dr. Mehmet Sezer
3. Dif. Denklemler
Prof. Dr. Mustafa Bayram

1. Ders

DİFERANSİYEL DENKLEMLER
(Dif. Denk.)

Tanım: Bağımsız x değişkeni, $y=f(x)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevleri arasındaki bir bağıntıya Diferansiyel denklem denir. Bir diferansiyel denklem,

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{veya}$$

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

şeklinde gösterilir.

Diferansiyel Denklemlerin sınıflandırılması

1. Adi Dif. Denklemler

Bir bağımsız değişkenli fonksiyon ile bu fonksiyonun türevleri ve bağımsız değişken arasındaki bir bağıntıya adi dif. denklem denir.

Örnek: $\dfrac{dy}{dx} + y \cdot \cos x = \cos x \cdot \sin x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

$$y''' + (y'')^2 + 2y' = \sin x$$

2. Kısmi Dif. Denklemler

Birden fazla bağımsız değişkenli fonksiyon ile bu fonksiyonun kısmi türevleri ve bağımsız değişkenler arasındaki bir bağıntıya Kısmi Dif. Denklem denir.

Örnek:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z + 2x \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$z_{xx} + z_{yy} = 0$$

$$p^2 + q + x^2 = 0$$

Bir dif. denklemin mertebesi

Bir dif. denklemdeki en yüksek türevin mertebesine, dif. denklemin mertebesi denir.

Bir dif. denklemin derecesi

Bir dif. denklemdeki en yüksek mertebeli türevin kuvvetine dif. denklemin derecesi denir.

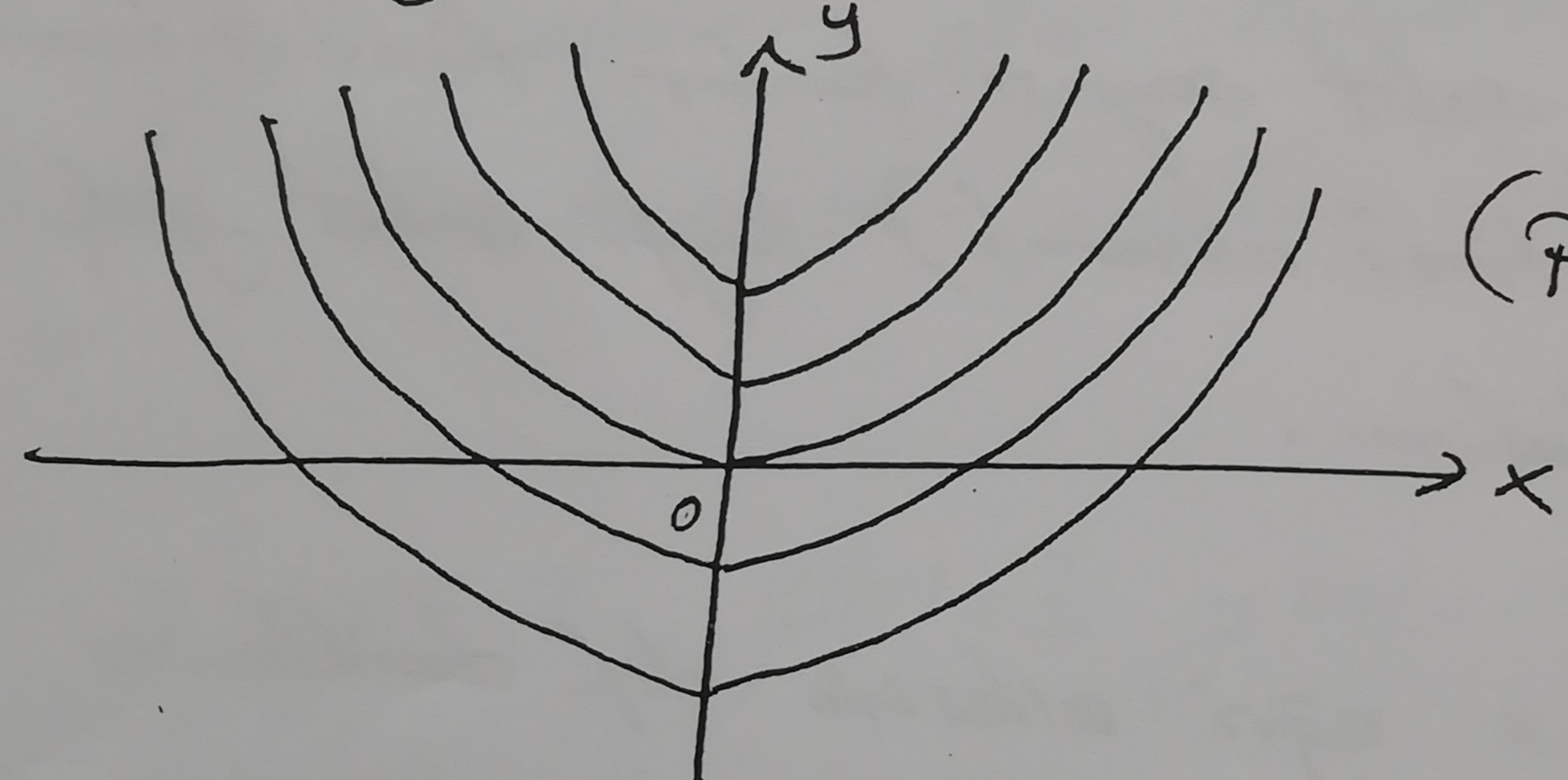
Dif. denklemin çözümleri

Bir dif. denklemi sağlayan $y=f(x)$ fonksiyonuna dif. denklemin çözümü denir. Dif. denklemin çözümleri Genel, Özel ve Tekil olmak üzere üç çeşittir. Dif. denklemin çözümlerinde keyfi sabitler varsa böyle çözüme genel çözüm denir. Genel çözümdeki

Sabitlere özel değerler verilerek elde edilen çözümlere özel çözüm denir. Bazı dif. denklemlerin genel çözümlerinden elde edilemeyen bir veya birden fazla çözümü bulunabilir. Bu tür çözümlerede tekil çözüm denir.

Örnek: $\frac{dy}{dx} = 2x$ dif. denklemin genel çözümünü bulunuz.

$y = x^2 + c$ olur. (Genel çözüm)



(parabol ailesi)

Bu dif. denklemin genel çözümü bir parabol ailesidir. Örneğin $c=0$ için $y=x^2$ bir özel çözümdür.

Örnek: $y = xy' + y' - y'^2$ dif. denkleminin genel çözümü $y = cx + c - c^2$ dir. $c=1$ için $y=x$ bir özel çözüm olur.

$y = \frac{1}{4}(x+1)^2$ ise verilen dif. denklemin bir Tekil çözümüdür.

Not: Bu çözüm genel çözümden elde edilemez. Tekil çözüm genel çözüm eğrilerinin zarfıdır. O halde dif. denklemin çözüm eğrilerinin zarfı dif. denklemin bir çözümüdür.

Dif. Denklemin elde edilmesi (kurulması)

$y=f(x,c)$ fonksiyonunun (eğri ailesinin) dif. denklemini bulmak için keyfi sabit sayısı kadar türev alınarak (Burada bir defa türev alınarak) keyfi sabit yok edilerek dif. denklem bulunur.

Örnek: $y=c\sin x$ eğri ailesinin dif. denklemini bulunuz.

Çözüm: $y'=c\cos x$

$$y'=\frac{y}{\sin x}\cdot\cos x$$

$$\boxed{y'-y\cdot\cot x=0}$$ bulunur.

örnek: $y=c\cdot e^{3x}$ eğri ailesinin dif. denklemini bulunuz.

Örnek: $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ eğri ailesinin dif. denklemini kurunuz.

Sonuç: $y'' + y = 0$

Örnek: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}$, $y' = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}$, $y'' = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}$

$$\begin{vmatrix} y & e^{-x} & e^{x} \\ y' & -e^{-x} & e^{x} \\ y'' & e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix} = 0$$

Sonuç: $\boxed{y'' - y = 0}$

Örnek: $x = \sec(y + c)$

Örnek: $y = c_1 e^{-x} + c_2 \sin x + c_3 \cos x$

Birinci mertebeden Dif. Denklemler

Birinci mertebeden dif. denklem $F(x, y, y') = 0$ veya $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ şeklindedir. Birinci mertebeden bir dif. denklemin çözümü için genel bir kural yoktur. Denklemlerin tiplerine göre özel kurallar uygulanır.

~~[illegible]~~ Dif. Denklemler için Başlangıç Değer ve sınır-Değer Problemleri

Bir Dif. Denklemin belli koşullara göre çözümleri arandığında, eğer ek koşullar bağımlı değişken ve türevlerine göre tek bir noktada verilmişse probleme başlangıç değer problemi, eğer koşullar en az farklı iki noktada tanımlanmışsa probleme sınır değer problemi denir.

Örnek: $y''+y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=-4$ Başlangıç değer problemini çözünüz.

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x \qquad y=3\cos x-4\sin x$$

Örnek: $y''+y=0$; $y(0)=1$ $y(\frac{\pi}{2})=5$ sınır değer problemini çözünüz.

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x \qquad y=\cos x+5\sin x$$

Örnek: $y''+y=0$ $y(0)=1$, $y(\pi)=5$ sınır değer probleminin çözümü yoktur.

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x \qquad y(0)=1 \Rightarrow c_1=1$$
$$y(\pi)=5 \Rightarrow c_1=-5 \text{ olur}$$

1. Değişkenlerine ayrılabilen Dif. Denklemler

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ şeklindeki dif. denklem

$f(x)dx + g(y)dy = 0$ şeklinde ifade edilebiliyorsa

verilen denkleme değişkenlerine ayrılabilen dif. denklem

denir. $\int f(x)dx + \int g(y)dy = \int 0$ denklemin terim terim

integrali alınırsa;

$$\boxed{F(x) + G(y) = C}$$ şeklinde Genel çözüm

elde edilmiş olur.

Örnekler:

1) $e^x y(y-1)dx - dy = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü

bulunuz.

Çözüm: $\int e^x dx - \int \dfrac{dy}{y(y-1)} = \int 0$

$$\boxed{e^x - I = C}$$

$$I = \int \frac{dy}{y(y-1)} \qquad \frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}$$

$$1 = (A+B)y - A$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B = 0 \\ -A = 1 \end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} A = -1 \\ B = 1 \end{array}}$$

$$I = -\int \frac{1}{y}dy + \int \frac{1}{y-1}dy$$

$$I = -\ln y + \ln(y-1) = \boxed{\ln \frac{y-1}{y}}$$

Sonuç: $\boxed{e^x - \ln \dfrac{y-1}{y} = C}$ bulunur.

2) $dy + xe^{x+y}dx = 0$ denk. genel çözümünü bulunuz.

3) $y = \ln y'$ denk. genel çözümünü bulunuz.

4) $\arctan(y^2)dx + \frac{2xy}{1+y^4}dy = 0$ $\left(y^2 = \tan \frac{c}{x} \right)$

5) $y' = \frac{x(3+y^2)}{y(1+x^2)}$ dif. denkleminin $y(1)=3$ şartını sağlayan özel çözümünü bulunuz. $\left(y = \sqrt{3+6x^2} \right)$

7 EK

(4) $\arctan(y^2)dx + \dfrac{2xy}{1+y^4}dy = 0$ Dif. Denk. çözünüz.

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2y\,dy}{(1+y^4).\arctan(y^2)} = \int 0$$

$$\boxed{\ln x + I = \ln C.}$$

$y^2 = t \quad 2y\,dy = dt$

$$I = \int \frac{2y\,dy}{(1+y^4)\arctan(y^2)}$$

$\arctan t = u \quad \dfrac{dt}{1+t^2} = du$

$$= \int \frac{dt}{(1+t^2)\arctan t}$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(\arctan(y^2))$$

$$\ln x + \ln(\arctan y^2) = \ln C \qquad x.(\arctan y^2) = C.$$

$$\boxed{y^2 = \tan\frac{C}{x}}$$

(5) $y' = \dfrac{x(3+y^2)}{y(1+x^2)}$, $y(1) = 3$ Başlangıç Değer Problemini çözünüz.

$$\int \frac{y\,dy}{3+y^2} = \int \frac{x\,dx}{1+x^2} \qquad \frac{1}{2}\ln(3+y^2) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln C.$$

$$\boxed{3+y^2 = C(1+x^2)} \qquad y(1) = 3$$

$$3+9 = C(1+1) \Rightarrow 2C = 12 \qquad \boxed{C=6}$$

$$3+y^2 = 6(1+x^2)$$

$$y^2 = 3+6x^2 \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{3+6x^2}}$$ bulunur.