

İkinci mertebeden Hemen-Hemen Lineer Denklemler için bir sınıflandırma, Kanonik Forma indirgeme

ikinci mertebeden, iki bağımsız değişkenli hemen hemen lineer denklemin genel şekli,

$$A(x,y)Z_{xx} + B(x,y)Z_{xy} + C(x,y)Z_{yy} + D(x,y,z,z_x,z_y) = 0 \quad (1)$$

dir. Burada, $A, B, C \in C^2[D]$ dir.

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

fonksiyonuna tanımlayalım.

$\Delta > 0$ ise (eşitsizliğin sağlandığı noktalarda) (1) denklemi hiperbolik

$\Delta = 0$ ise (eşitsizliğin sağlandığı noktalarda) (1) denklemi parabolik

$\Delta < 0$ ise (eşitsizliğin sağlandığı noktalarda) (1) denklemi eliptik

tipindedir denir.

Örnek : $(x^2-1)z_{xx} + 2yz_{xy} - z_{yy} + z_x + z_y = 0$

Denkleminin tipini belirleyiniz.

Çözüm : $A(x,y) = x^2-1$, $B(x,y) = 2y$, $C(x,y) = -1$ dir.

$$\Delta = B^2 - 4AC = 4y^2 + 4(x^2-1) = 4(x^2+y^2) - 4$$

olar. Buna göre verilen denklem;

$$D_1 = \{(x,y) : x^2+y^2 > 1, x,y \in \mathbb{R}\} \text{ bölgesinde}$$

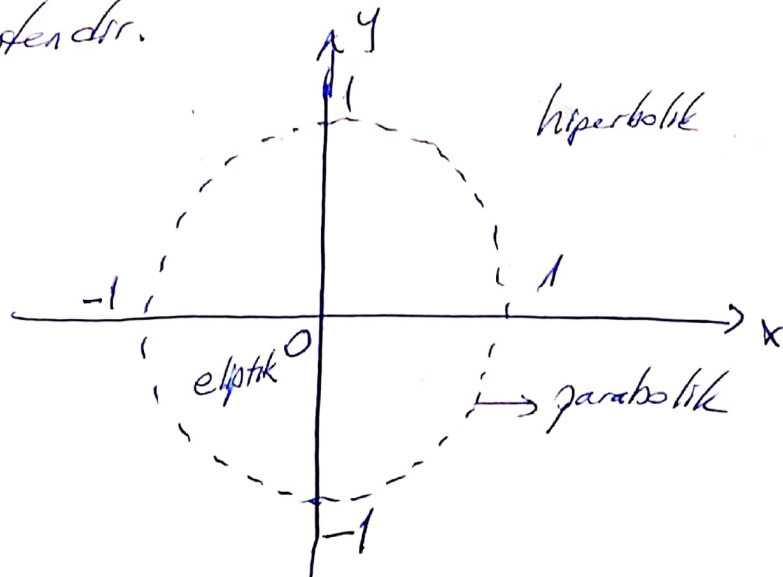
hiperbolik ;

$$D_2 = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1, x,y \in \mathbb{R}\} \text{ çemberi}$$

üzerinde parabolik

$$D_3 = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1, x,y \in \mathbb{R}\} \text{ bölgesinde}$$

eliptik tipindedir.



Örnek: $x^2 z_{xx} + xy^2 z_{xy} + zy^2 + x^2 z_x + y^2 z_y + z = 0$ denkleminin
tipini belirleyiniz.

Çözüm: $\Delta = x^2 y^2 - 4x^2 = x^2(y^2 - 4)$ olur.
 $y = \pm 2$ doğruları üzerinde parabolik ($\Delta = 0$ olur)
 $-2 < y < 2$ arasında eliptik ;
 $y < -2$ ve $y > 2$ bölgelerinde hiperbolik
olur.

Not: Sabit katsayılı denklemlerin, tanımlı oldukları
her yerde aynı tipten olacağı aşiktır. Ayrıca
hermer mertebeden terimleri kapsayan terimlerin, denk-
lemin tipini etkilemediği görülmektedir.

-4-

$$A(x,y)z_{xx} + B(x,y)z_{xy} + C(x,y)z_{yy} + H(x,y,z,z_x,z_y) = 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \varphi(x,y) \\ \eta = \psi(x,y) \end{array} \right\} \text{ dönüştürmeyi yapalım.} \quad (2)$$

$$\frac{J(\xi,\eta)}{J(x,y)} \neq 0 \text{ olsun.}$$

(1) deki yerine ~~yatarsak~~ türevleri hesaplırsak,

$$z_x = z_\xi \cdot \xi_x + z_\eta \cdot \eta_x$$

$$z_y = z_\xi \cdot \xi_y + z_\eta \cdot \eta_y$$

$$z_{xx} = (z_{\xi\xi} \cdot \xi_x + z_{\xi\eta} \cdot \eta_x) \xi_x + \xi_{xx} \cdot z_\xi + (z_{\xi\eta} \cdot \xi_x + z_{\eta\eta} \cdot \eta_x) \eta_x + \eta_{xx} \cdot z_\eta$$

$$z_{xx} = (\xi_x)^2 \cdot z_{\xi\xi} + 2\xi_x \eta_x \cdot z_{\xi\eta} + (\eta_x)^2 \cdot z_{\eta\eta} + \xi_{xx} z_\xi + \eta_{xx} z_\eta$$

$$z_{xy} = (z_{\xi\xi} \cdot \xi_y + z_{\xi\eta} \cdot \eta_y) \xi_x + \xi_{xy} z_\xi + (z_{\xi\eta} \cdot \xi_y + z_{\eta\eta} \cdot \eta_y) \eta_x + \eta_{xy} z_\eta$$

$$z_{xy} = \xi_x \cdot \xi_y z_{\xi\xi} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) z_{\xi\eta} + \eta_x \eta_y z_{\eta\eta} + \xi_{xy} z_\xi + \eta_{xy} z_\eta$$

$$z_{yy} = (z_{\xi\xi} \cdot \xi_y + z_{\xi\eta} \cdot \eta_y) \xi_y + \xi_{yy} z_\xi + (z_{\xi\eta} \cdot \xi_y + z_{\eta\eta} \cdot \eta_y) \eta_y + \eta_{yy} z_\eta$$

$$z_{yy} = (\xi_y)^2 \cdot z_{\xi\xi} + 2\xi_y \eta_y \cdot z_{\xi\eta} + (\eta_y)^2 \cdot z_{\eta\eta} + \xi_{yy} z_\xi + \eta_{yy} z_\eta$$

olur.

Bu türevleri (1) de yerine yazarsak,

$$\left. \begin{aligned} & \left[A^*(\xi, \eta) (\xi_x)^2 + B^*(\xi, \eta) \xi_x \xi_y + C^*(\xi, \eta) (\xi_y)^2 \right] Z_{\xi\xi} \\ & + \left[2A^*(\xi, \eta) \xi_x \eta_x + B^*(\xi, \eta) (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + 2C^*(\xi, \eta) \xi_y \eta_y \right] Z_{\xi\eta} \\ & + \left[A^*(\xi, \eta) (\eta_x)^2 + B^*(\xi, \eta) \eta_x \eta_y + C^*(\xi, \eta) (\eta_y)^2 \right] Z_{\eta\eta} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$+ H^*(\xi, \eta, z, z_\xi, z_\eta) = 0$$

olur. Burada A^*, B^*, C^*, H^* fonksiyonları (1) de bulunan A, B, C, H fonksiyonlarının (2) dönüşümü sonucunda yeni şekilleridir.

$$\left. \begin{aligned} A_1(\xi, \eta) &= A^*(\xi, \eta) (\xi_x)^2 + B^*(\xi, \eta) \xi_x \xi_y + C^*(\xi, \eta) (\xi_y)^2 \\ B_1(\xi, \eta) &= 2A^*(\xi, \eta) \xi_x \eta_x + B^*(\xi, \eta) (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + 2C^*(\xi, \eta) \xi_y \eta_y \\ C_1(\xi, \eta) &= A^*(\xi, \eta) (\eta_x)^2 + B^*(\xi, \eta) \eta_x \eta_y + C^*(\xi, \eta) (\eta_y)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Dersek;

$$A_1(\xi, \eta) Z_{\xi\xi} + B_1(\xi, \eta) Z_{\xi\eta} + C_1(\xi, \eta) Z_{\eta\eta} + H^*(\xi, \eta, z, z_\xi, z_\eta) = 0 \quad (5)$$

olur. Görüldüğü gibi bu dönüşüm denklemin

tipini değiştirmemektedir. Şimdi (1) denkleminin kanonik forma nasıl dönüştürüleceğini görelim.

1) Hiperbolik tip

(1) denkleminde $B^2 - 4AC > 0$ olsun.

Yani hiperbolik tip olsun. Bu denkleme

(2) dönüşümünü uyguladıktan sonra elde edilen

(5) denkleminde $A_1(\xi, \eta) = 0$, $C_1(\xi, \eta) = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{1} \quad & A^*(\xi, \eta) (\xi_x)^2 + B^*(\xi, \eta) \xi_x \xi_y + C^*(\xi, \eta) (\xi_y)^2 = 0 \\ \textcircled{2} \quad & A^*(\xi, \eta) (\eta_x)^2 + B^*(\xi, \eta) \eta_x \eta_y + C^*(\xi, \eta) (\eta_y)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

olmalıdır. $\textcircled{1}$ denklemini ξ_y^2 ile bölersek,

$$A^* \left(\frac{\xi_x}{\xi_y} \right)^2 + B^* \frac{\xi_x}{\xi_y} + C^* = 0 \quad (7)$$

olar. (2) dönüşümünde,

$$\xi = \varphi(x, y) = C_1 \quad (C_1 : \text{keyfi sabit}) \quad (8)$$

olduğunu varsayalım. (8)'e serpe eğrileri denir ayrıca $\eta = \psi(x, y) = C_2$ (C_2 : keyfi sabit) serpe eğrileri denir.

-7-

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \psi(x,y) = c_1 \\ \eta = \psi(x,y) = c_2 \end{array} \right\} \text{ (9) } \text{ eği ailelerme (sevye eğrileri)}$$

(1) denklemin karakteristikleri denir.

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0 \text{ ise (9) eği ailesi}$$

lineer bağımsızdır. (9) dan;

$$d\xi = \xi_x \cdot dx + \xi_y \cdot dy = 0$$

yararlanılır. Buradan;

$$\left[\frac{dy}{dx} = - \frac{\xi_x}{\xi_y} \right] \quad (10)$$

olar. (10) u (7) de yerine yararsak,

$$A^* \left(- \frac{dy}{dx} \right)^2 + B^* \left(- \frac{dy}{dx} \right) + C^* = 0$$

$$A^* \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - B^* \left(\frac{dy}{dx} \right) + C^* = 0$$

bulunur. Buradan;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B^* \pm \sqrt{(B^*)^2 - 4A^*C^*}}{2A^*} \quad (11)$$

olar

$A^*(\xi, \eta) = A(x, y)$, $B^*(\xi, \eta) = B(x, y)$, $C^*(\xi, \eta) = C(x, y)$
 olduğundan (11) denklemi,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} ; \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (12)$$

olar. (12) adı dif. denklemleri çözümlerse

$$\left. \begin{array}{l} \psi^*(x, y) = C_1 \\ \varphi^*(x, y) = C_2 \end{array} \right\} \text{giriş noktaları bulunur.}$$

(12) ye hiperbolik tip denklemler karakteristik denklemleri denir.

Benzer işlemleri (6) 1. tür denklemlerinde yaparsak, aynı sonucu buluruz.

Sonuç olarak (1) denklemin (12) denklemlerin çözümlerinden elde ettiğimiz,

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \psi^*(x, y) \\ \eta = \varphi^*(x, y) \end{array} \right\} J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0 \quad (13)$$

denklemi uygulanırsa,

(5) denklemindeki A ve C katsayıları

-9-

örnek olarak sıfır olacağından, (5) denklemini

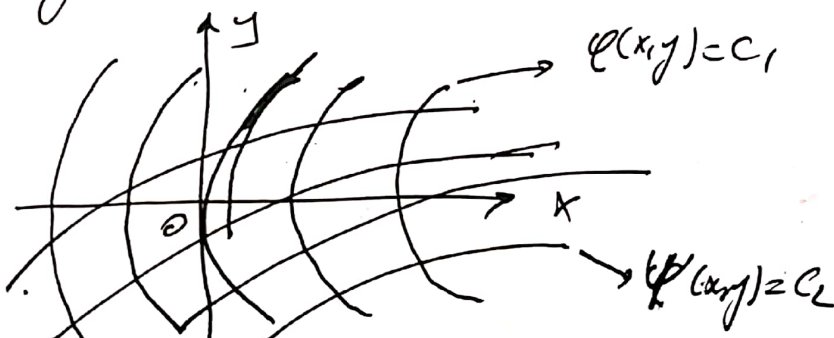
$$Z_{\xi\eta} + H^{**}(\xi, \eta, z, z_{\xi}, z_{\eta}) = 0 \quad (14)$$

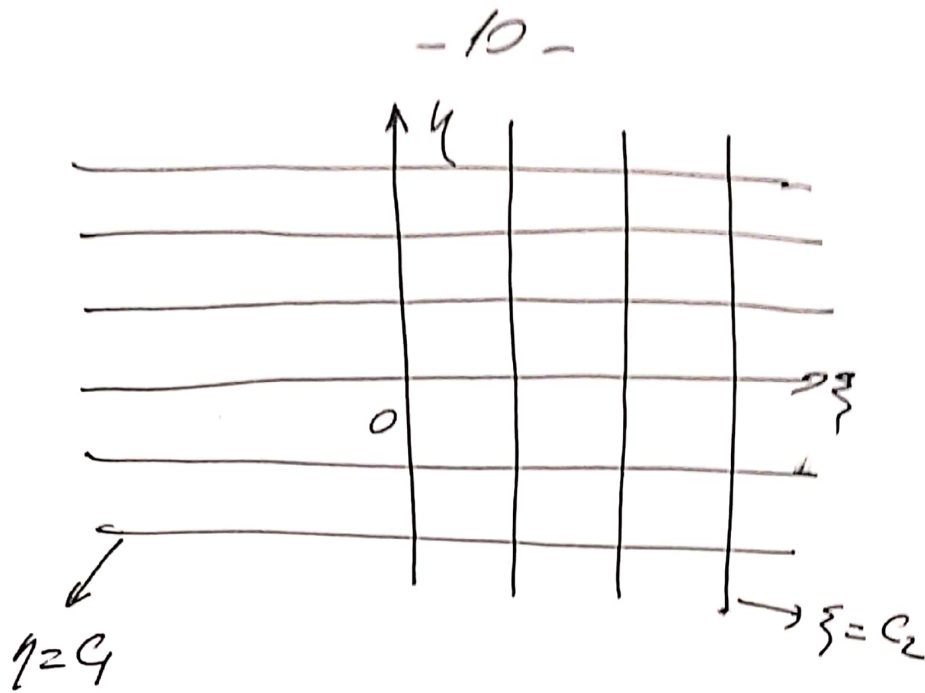
haline gelir. Burada;

$$H^{**} = \frac{1}{B_1} H^* \text{ dir.}$$

(14) denkleme (1) Hiperbolik denklemin Kanonik (normal veya standart) formu dır.

Hiperbolik denklemlerin daima iki reel karakteristik ailesi vardır. Bu karakteristikler
 xy -düzleminde bağımsız iki eğri ailesi olmasına karşılık $\xi\eta$ -düzleminde doğrudur. Bu doğrulardan aynı aileden olanlar birbirine paralel, ayrı olanlar birbirine diktir.





2) Parabolik Tip

(1) denkleminde $B^2 - 4AC = 0$ ise
bu durumda denklem parabolik tipten olur.

Bir önceki gibi benzer dönüştürmeler yapılarak,
denklem; $(A_1 = B_1 = 0 \text{ seçilirse})$

$$Z_{\eta\eta} + H_1(\xi, \eta, z, z_\xi, z_\eta) = 0, \quad H_1 = \frac{1}{C^*} H^*$$

yada; $(B_1 = C_1 = 0 \text{ seçilirse})$

$$Z_{\xi\xi} + H_2(\xi, \eta, z, z_\xi, z_\eta) = 0, \quad H_2 = \frac{1}{A^*} H^*$$

seçilirse gelir.

Buna parabolik denklemin kanonik formu denir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A} \quad \text{karakteristik denklemdir.}$$

Bu denklem çözülerek,

$$\varphi(x, y) = C, \quad \text{karakteristiği elde edilir.}$$

İkinci karakteristiği jacobian sıfırdan farklı olacak şekilde keyfi seçeriz.

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y) \\ \eta &= y \quad (\text{keyfi seçilir}) \end{aligned} \quad J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0 \quad \text{dan}$$

Lösümüyle parabolik denklem kanonik formu indirgenmiş olur.

$$\text{veya} \quad \begin{aligned} \xi &= x \\ \eta &= \varphi(x, y) \end{aligned} \quad J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

Lösümünde yapılırsa ($B_1 \neq 0$ halinde) parabolik denklem kanonik formuna gelir.

3) Eliptik tip.

(1) denkleminde $B^2 - 4AC < 0$ olursa
Eliptik tipten olur. (5) ~~denkleminde~~ denkleminde
 $A_1 = C_1$ ve $B_1 = 0$ olduğunu kabul edelim.
0 zaman eliptik denklem,

$$z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta} + H_3(\xi, \eta, z, z_\xi, z_\eta) = 0$$

olur. $H_3 = \frac{H^*}{A_1}$ dir. Buna (1) denkleminin
kanonik formu derir.

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\xi_x + i\eta_x}{\xi_y + i\eta_y} = \frac{B \mp i\sqrt{4AC - B^2}}{2A}$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi(x,y) = C_1 \\ \psi(x,y) = C_2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{\phi + \psi}{2} = \operatorname{Re} \phi \\ \eta = \frac{\phi - \psi}{2} = \operatorname{Im} \psi \end{array} \right. \quad \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$$

Bu sistem ile Eliptik denklemin kanonik formu
indirgenir.

$$\text{veya } \left\{ \begin{array}{l} \xi = \phi(x,y) \\ \eta = \psi(x,y) \end{array} \right\} \quad \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x,y)} \neq 0 \text{ dir}$$

-13-

Örnek: $x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} = xy$ denkleminin tipini belirtiniz. Kanonik forma indirgeyerek çözümünü bulunuz.

Çözüm: $B^2 - 4AC = 0 - 4 \cdot x^2 \cdot (-y^2) = 4x^2 y^2$
 $x \neq 0, y \neq 0$ için denklem hiperbolik tipindedir.

Karakteristik denklemler,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{0 \pm 2xy}{2x^2} = \pm \frac{y}{x}$$

olur. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

$xy = C_1$, $\frac{x}{y} = C_2$ karakteristikleri elde edilir. Şimdi verilen denkleme,

$$\left. \begin{array}{l} \xi = xy \\ \eta = \frac{x}{y} \end{array} \right\} \text{ dönüşümü uygulayalım.}$$

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{vmatrix} = -\frac{x}{y} - \frac{x}{y} = -\frac{2x}{y} \neq 0$$

olduğundan dönüşüm birebirdir. Denkleme geçen kısmi türevleri hesaplırsak,

-14-

$$Z_x = Z_{\xi} \cdot \xi_x + Z_{\eta} \cdot \eta_x = Z_{\xi} \cdot y + Z_{\eta} \cdot \frac{1}{y}$$

$$Z_y = Z_{\xi} \cdot \xi_y + Z_{\eta} \cdot \eta_y = Z_{\xi} \cdot x + Z_{\eta} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$Z_{xx} = y^2 \cdot Z_{\xi\xi} + 2 Z_{\xi\eta} + \frac{1}{y^2} \cdot Z_{\eta\eta}$$

$$Z_{yy} = x^2 \cdot Z_{\xi\xi} - \frac{2x^2}{y^2} \cdot Z_{\xi\eta} + \frac{x^2}{y^4} \cdot Z_{\eta\eta} + \frac{2x}{y^3} Z_{\eta}$$

olar. Bu türevler verilen denklemlere yerine yazılırsa,

$$Z_{\xi\eta} - \frac{1}{2xy} Z_{\eta} = \frac{y}{4x}$$

elde edilir.

$$\boxed{Z_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi} Z_{\eta} = \frac{1}{4\eta}}$$

olar. Böylece verilen Hiperbolik denklemlerin kanonik formu bulunmuş olur.

Her iki tarafın η ya göre integrali alınırsa,

$$Z_{\xi} - \frac{1}{2\xi} Z = \frac{1}{4} \ln \eta + f(\xi) \quad \text{Linear dif-denkle}$$

$$\lambda = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{d\xi}{\xi}} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \text{ olur.}$$

-15-

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} z - \frac{1}{2\xi\sqrt{\xi}} z = \frac{1}{4} \frac{\ln \eta}{\sqrt{\xi}} + \frac{f(\xi)}{\sqrt{\xi}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{z}{\sqrt{\xi}} \right) = \frac{1}{4} \ln \eta \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi}} + \frac{1}{\sqrt{\xi}} f(\xi)$$

$$z = \frac{1}{2} \xi \ln \eta + \sqrt{\xi} [f^*(\xi) + g(\eta)]$$

$$f^*(\xi) = \int \xi^{-1/2} f(\xi) d\xi$$

$$z = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{y} \right) \cdot xy + \sqrt{xy} \left[f^*\left(\frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{x}{y}\right) \right] ; f, g \in C^2[0]$$

bulunur. Burada $xy > 0$ dir.

Örnek: $x^2 z_{xx} + 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} + xy z_x + y^2 z_y = 0$
denkleminin tipini belirleyiniz. Kanonik formu
integre ederek genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $B^2 - 4AC = (2xy)^2 - 4 \cdot x^2 \cdot y^2 = 0$

olur. Denklem parabolik tiptedir.

her yerde

-16-

Karakteristik denklem,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A} = \frac{2xy}{2x^2} = \frac{y}{x} ; x \neq 0 \text{ dir.}$$

$$\frac{y}{x} = C_1, x \neq 0$$

Karakteristiği elde edilir. Bu ise orijinden geçen doğrulardır. İkinci karakteristik file linear bağımsız olması nedeniyle $y=y$ olarak seçelim. Böylece (örneğin)

$$\boxed{\begin{aligned} \xi &= \frac{y}{x} \\ \eta &= y \end{aligned}}$$

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{y}{x^2}$$

olur. Bu durumda kısmi türevler,

$$z_x = -\frac{y}{x^2} z_\xi, \quad z_y = \frac{1}{x} z_\xi + z_\eta$$

$$z_{xx} = \frac{y^2}{x^4} z_{\xi\xi} + \frac{2y}{x^3} z_\xi$$

$$z_{xy} = -\frac{y}{x^3} z_{\xi\xi} - \frac{y}{x^2} z_{\xi\eta} - \frac{1}{x^2} z_\xi$$

$$z_{yy} = \frac{1}{x^2} z_{\xi\xi} + \frac{2}{x} z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta}$$

olur. Denklemleri yerine yatarsak.

$Z_{yy} + Z_y = 0$ şeklinde parabolik denklemin
kanonik formu bulunur.

$$Z_y + Z = f(\xi)$$

$$\lambda = e^\eta$$

$$e^\eta \cdot Z_y + e^\eta \cdot Z = e^\eta f(\xi)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (e^\eta \cdot Z) = e^\eta \cdot f(\xi)$$

$$e^\eta Z = e^\eta f(\xi) + g(\xi)$$

$$Z = f\left(\frac{y}{x}\right) + e^{-y} \cdot g\left(\frac{y}{x}\right), f, g \in C^1[0], x \neq 0$$

bulunur.

Örnek 1: $5Z_{xx} - 2Z_{xy} + 2Z_{yy} = 0$ Denklemin
kanonik formu indirgeyerek çözümler

Çözüm: $B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -36 < 0$
olur. Denklem eliptik tiptedir.

-B-

Karakteristik denklemler;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{10} = \frac{-1 \pm 3i}{5}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1-3i}{5} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1+3i}{5}$$

$$\Phi(x,y) = 5y + (1+3i)x = C_1 ; \quad \Psi(x,y) = 5y + (1-3i)x = C_2$$

Kompleks karakteristikleri bulunur.

$$\begin{aligned} \xi &= x + 5y \longrightarrow \text{Re } \phi \\ \eta &= 3x \longrightarrow \text{Im } \phi \end{aligned}$$

$$z_x = z_\xi + 3z_\eta ; \quad z_y = 5z_\xi$$

$$z_{xx} = z_{\xi\xi} + 6z_{\xi\eta} + 9z_{\eta\eta}$$

$$z_{yy} = 25z_{\xi\xi}$$

$$z_{xy} = 5z_{\xi\xi} + 15z_{\xi\eta}$$

olar.

$$z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta} = 0$$

Kanonik formu bulunur.

"Laplace denkleminin"

Laplace denkleminin Reel maddede genel çözümü yoktur)

-19-

$\alpha = 1+3i$ olmak üzere,

$$u = 5y + \alpha x, \quad v = 5y + \bar{\alpha}x$$

Kompleks dönüşümünü yazalım. Bu durumda,

$$Z_x = Z_u \cdot u_x + Z_v \cdot v_x = \alpha Z_u + \bar{\alpha} Z_v$$

$$Z_{xx} = \alpha^2 Z_{uu} + 2\alpha\bar{\alpha} Z_{uv} + (\bar{\alpha})^2 Z_{vv}$$

$$Z_y =$$

$$Z_{yy} =$$

$$Z_{xy} =$$

$$\boxed{Z_{uv} = 0}$$

Eliptik denklemlerin kompleksleştik kanonik formu elde edilir.

$$Z(u, v) = F(u) + G(v), \quad F, G \in C^2[0]$$

$$Z = F(5y + (1+3i)x) + G(5y + (1-3i)x) \quad F, G \in C^2[0]$$

Kompleks düzlemleri genel çözüm buluruz.