

Alterne seriler

Her n için $a_n > 0$ olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot a_n + \dots$$

Serisine u_n alterne seri denir.

Bir alterne serinin her terimi mutlak değer olarak analizör veya sabit kalıyorsa ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

ise seri yakınsaktır.

Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$ yakınsak ve

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serisi yakınsak ise Alterne seri

Mutlak yakınsaktır.

Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$ yakınsak ve

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serisi ıraksak ise Alterne seri

Şartlı yakınsaktır.
(Yarı)

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2}$ Serisinin karakterini belirleyiniz

Çözüm: Serinin her teriminin mutlak değerleri alınarak elde edilen seri;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ serisi } p \text{ serisidir.}$$

$p=2$ olduğundan yakınsaktır.

0 halde verilen alterne seri Mutlak yakınsaktır.

$$\rightarrow |a_n| = \frac{1}{n^2}, \quad |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$|a_{n+1}| < |a_n| \text{ olur. (Her } n \text{ için)}$$

$$\vee \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0 \text{ olur. 0 halde}$$

verilen alterne seri yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ Serisinin karakterini belirleyiniz.

Çözüm: $|a_n| = \frac{1}{n}, \quad |a_{n+1}| = \frac{1}{n+1} \quad |a_{n+1}| < |a_n| \text{ olur}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ dir. 0 halde alterne seri yakınsak
tır. Verilen alterne serinin terimlerinin mutlak
değerleri alınarak elde edilen seri;

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi Harmonik seri olup ıraksak-
tır. Bu durumda verilen $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$,
alterne serisi şartlı yakınsak seridir.

Ödev: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \cos(n\pi)}{2^n}$ karakterini bulunuz.
(Mutlak yakınsak)

2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}$ " "
(şartlı yakınsak)

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^4}$ " "
(Mutlak yakınsak)

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ " "
(şartlı yakınsak)

Kuvvet Serileri

x_0 bir sabit olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

serisine kuvvet serisi denir. Özel olarak $x_0=0$ için ;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

serisi elde edilir. Bu seride x değerlerinin alacağı değerlere karşılık elde edilecek serilerden bazıları yakınsak, bazıları da ıraksak olabilir. Serinin yakınsak olduğu x değerlerinin oluşturan aralığa yakınsaklık aralığı denir.

Yakınsaklık aralığı ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}_{R} |x|$$

$= R \cdot |x| < 1$ olmalıdır. (Yakınsak olması için)

$$|x| < \frac{1}{R}$$

$-\frac{1}{R} < x < \frac{1}{R}$ bulunur. Bu şekilde elde

edilen $\left(-\frac{1}{R}, \frac{1}{R}\right)$ aralığına serinin yakınsaklık
aralığı denir. $\frac{1}{R}$ yada yakınsaklık yarıçapı
denir.

Aralığın uç noktaları $\left(-\frac{1}{R} \text{ ve } \frac{1}{R}\right)$
özel olarak incelenir.

Örnek: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 3^n}$ serisinin yakınsaklık aralığını
bulunuz.

Çözüm: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 3^n}{(x+2)^n} \right|$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left| \frac{n}{3(n+1)} \right|}_{\frac{1}{3}} \cdot |x+2| = \frac{1}{3} |x+2| < 1 \text{ olmalıdır.}$$

$$|x+2| < 3$$

$$-3 < x+2 < 3$$

$$\boxed{-5 < x < 1}$$

$x = -5$ için $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ olur. Şartlı yakınsaktır.

$x = 1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ olur. Harmonik seridir. İraksaktır.

Sonuç olarak yakınsaklık aralığı $\boxed{-5 < x < 1}$ olur
(yakınsaklık yarıçapı: 3 tür.)

Ödev: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ yakınsaklık analizi ve yakınsaklık yarısapını bulunuz.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1) \cdot 3^n} \quad (-4 \leq x \leq -1)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 2^n}$

Taylor ve Maclauren Serileri

$y = f(x)$ fonksiyonu ve x_0 noktası veriliyor

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots$$

Serisine $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında

Taylor serisi (Taylor açılımı) denir.

Eğer $x_0 = 0$ ise

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$