

⑥ $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ olsun.

$y_0 = y_{01} + y_{02} + \dots + y_{0n}$ olur.

örnek: $y'' + 4y = e^x + \sin 2x$ Dif. Denklemin
genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

1) $y''' + y'' = 12x$

2) $y'' - y = \sin x + 2 \cos x$

3) $y'' - 3y' + 2y = x^2 \cdot e^{3x}$

4) $y'' + y = \sin x + 2 \cos x + e^x + 1$

İkinci mertebeden Sabit Katsayılı Diferansiyel Denklemler.

$ay'' + by' + cy = f(x)$ şeklindeki denklemlerdir.

Burada $(a \neq 0)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ sabitlerdir.

$f(x) = 0$ ise denkleme Homojen Dif. Denklem denir. $f(x) \neq 0$ ise Homojen olmayan Dif. Denklem denir.

Homojen Denklemin çözümü

$ay'' + by' + cy = 0$ Homojen Dif. Denkleminin çözümü $y = e^{rx}$ şeklindedir. Denklemleri sağlama

koşulunu yazarsak,

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

$e^{rx} \neq 0$ dir. O halde $ar^2 + br + c = 0$ olmalıdır.

$ar^2 + br + c = 0$ denkleme karakteristik denklem denir.

$ar^2 + br + c = 0$ karakteristik denkleminin :

- 1) r_1 ve r_2 şeklinde birbirinden farklı iki gerçek kökü olsun. Bu durumda çözüm ; $e^{r_1 x}$ ve $e^{r_2 x}$ olur. Bu iki ekmandan oluşan küme Homojen denklemin Temel çözüm kümesi denir.

$$C_K = \{ e^{r_1 x}, e^{r_2 x} \}$$

Bu kümenin elemanları lineer bağımsızdır.

Homojen Dif. Denklemin Genel çözümü

Temel çözüm kümesinin lineer birleşimidir.

Yani; $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ dir.

- 2) $r_1 = r_2 = r$ iki katlı kök olsun. Bu durumda çözüm ; e^{rx} ve $x e^{rx}$ olur.

$$C_K = \{ e^{rx}, x e^{rx} \} : \text{Temel çözüm kümesi}$$

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} = (C_1 + C_2 x) e^{rx} : \text{Genel çözüm}$$

3) $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ kompleks olsun.

$\mathcal{K} = \{ e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x \}$: Temel çözüm kümesi

$$\boxed{y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)} \quad \text{Genel çözüm}$$

Örnekler:

1) $y'' - 6y' + 5y = 0$ Dif. Denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 5$$

$$\mathcal{K} = \{ e^x, e^{5x} \}$$

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{5x}}$$

2) $y'' - 2y' + y = 0$ Dif. Denk. genel çözümünü bulunuz

$$r_1 = r_2 = 1$$

$$\mathcal{K} = \{ e^x, x e^x \}$$

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 x e^x = e^x (C_1 + C_2 x)}$$

3) $y'' + 2y' + 2y = 0$ Dif. Denk. genel çözümünü bulunuz.

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

$$r_{1,2} = -1 \pm i$$

$$GK = \{ e^{-x} \cos x, e^{-x} \sin x \}$$

$$y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

Homojen olmayan Dif. Denklemlerin Çözümü

Belirsiz Katsayılar Yöntemi

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (a \neq 0) \text{ şeklinde}$$

sabit katsayılı lineer homojen olmayan Dif. Denk-
lemi Belirsiz katsayılar yöntemiyle çözümlenebilir.

İçin ;

$$f(x) = \{ \text{Polinom}, Me^{ax}, M \sin x + N \cos x, \text{ veya bu fonk-} \}$$

siyonların ikisi ikisi birbirleri ile çarpımları

olmalıdır.

Mertebe düzme metodu

u

Bir çözümün bilinmesi durumunda mertebe düzme:

Sabit katsayılı dif. denklemin, karakteristik denkleminin köklerinin katlı olması durumunda bir çözümün diğerini $y = u(t) \cdot y_1(t)$ şeklinde bir dönüşüm yaparak elde ederiz.

Bu dönüşüm daha geniş bir sınıf olan $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ şeklindeki sabit katsayılı olmayan bir dif. denklemin bir $y_1(t)$ çözümünü biliniyorsa diğer çözümün bulunmasında da kullanılır. Mertebe düzme metodu, y' 'ye göre ikinci mertebeden olan dif. denklemleri u 'ya göre birinci mertebeden dif. denkleme dönüştürür. Bu nedenle metoda mertebe düzme metodu denir. Bu metodun uygulanabilirliği için çözümlerden biri bilinmelidir.

$$y = u \cdot y_1 \quad (y_1 \text{ bilinir})$$

$$y' = u'y_1 + u y_1', \quad y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + u y_1''$$

$$\boxed{y_1 u'' + (2y_1' + p y_1) u' = 0} \quad \text{olar. Bu denklem } u' \text{ 'ye}$$

göre birinci mertebeden dif. denklemdir.

Örnek: $t^2 y'' + 2t y' - 2y = 0$ dif. denkleminin bir çözümü $y_1(t) = t$ olduğuna göre, mertebe düzme metodunu kullanarak ikinci çözümünü $y_2(t)$ 'yi bulunuz.

$$y = ut \Rightarrow y' = u't + u, y'' = u''t + 2u'$$

$$t^2(u''t + 2u') + 2t(u't + u) - 2ut = 0$$

$$t^3u'' + 4t^2u' = 0 \Rightarrow \int \frac{u''}{u'} dt = \int -\frac{4t^2}{t^3} dt \text{ veya}$$

$$\int \frac{du'}{u'} = \int -\frac{4}{t} dt \Rightarrow \ln u' = -4 \ln t + \ln C_1$$

$$u' = \frac{C_1}{t^4}$$

$$u = -\frac{C_1}{3t^3} + C_2$$

$$y = u \cdot t$$

$$y = \left(-\frac{C_1}{3t^3} + C_2\right) \cdot t$$

$$y = -\frac{C_1}{3t^2} + C_2 t \Rightarrow \boxed{y = \left(\frac{K_1}{t^2} + C_2 t\right)} \quad \left(K_1 = -\frac{C_1}{3}\right)$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $y_2(t) = \frac{1}{t^2}$ $y_1(t)$

örnek 3 $ty'' - y' + 4t^3y = 0$, $t > 0$ dif. denkleminin bir çözümünü $y_1(t) = \cos t^2$ olduğuna göre, mertebesi $y_1(t)$ ile aynı olan $y_2(t)$ 'yi bulunuz.

Sonuç: $y_2(t) = \sin t^2$

örnek 4 $ty'' - y' = 3t^2$ dif. denkleminin çözümünü bulunuz.

Sonuç: $y = C_1 t^2 + C_2 + t^3$

Ancak $f(x)$ bu fonksiyonlardan biri veya bunların toplamı şeklinde ise Belirsiz katsayılar yöntemi kullanılır.

Bu yöntemle denklemin çözümünü bulmak için önce Homojen denklemin genel çözümünü bulunur. (y_H : Homojen denklemin genel çözümünü olsun.) Sonrada $f(x)$ fonksiyonuna göre bir özel çözüm önerilir. ve bu ~~özel~~ özel çözüm bulunur. (y_o : özel çözüm)

Sonuç olarak ;

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad \text{Dif. Denkleminin}$$

genel çözümünü ;

$$y = y_H + y_o$$

olur.

① $f(x)$ m. dereceden polinom olsun.

1. Eğer $c \neq 0$ ise y_0 m. dereceden polinom olur.

2. Eğer $b \neq 0$ ve $c = 0$ ise y_0'' $(m+1)$. dereceden polinom olur.

3. Eğer $b = 0$ ve $c = 0$ ise y_0'' $(m+2)$. dereceden polinom olur.

Örnek: $y'' - 2y' - 3y = x + 1$ Dif. Denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Örnek : $y'' - 2y' = x + 1$ Dif. Denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm :

(2) $f(x) = Me^{\alpha x}$ olsun

1. α karakteristik denklemin köklerinden biri değilse ;

$$\boxed{y_0 = ke^{\alpha x}} \text{ olur.}$$

2. α karakteristik denklemin köklerinden biri ise ;

$$\boxed{y_0 = kxe^{\alpha x}} \text{ olur.}$$

3- α karakteristik denklemin iki katlı kökü ise ;

$$\boxed{y'' = kx^2 e^{\alpha x}} \text{ olur.}$$

Örnek :

örnek :

örnek :

③ $f(x) = M \cos \lambda x + N \sin \lambda x$ olsun.

1- Karakteristik denklemin kökleri: $r_{1,2} = \pm i\lambda$
değilse ;

$$\boxed{y_0 = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x} \text{ olur.}$$

2- Karakteristik denklemin kökleri: $r_{1,2} = \pm i\lambda$
ise ;

$$\boxed{y_0 = x \cdot (a \cos \lambda x + b \sin \lambda x)} \text{ olur.}$$

Örnek: $y'' - 5y' + 6y = 2 \cos x$ Dif. Denkleminin
genel çözümünü bulunuz.

Örnek: $y'' + 4y = \sin 2x$ Dif. Denkleminin
genel çözümünü bulunuz.

Sonuç: $y_0 = x(a \sin 2x + b \cos 2x)$

$$y_0 = -\frac{1}{4}x \cos 2x$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{4}x \cos 2x$$

④ $f(x) = R(x)e^{\alpha x}$ olsun.

$$y_0 = Z(x) \cdot e^{\alpha x} \text{ olur.}$$

Örnek: $y'' - 5y' + 6y = e^x \cos x$ Dif. Denkleminin
genel çözümünü bulunuz.

Örnek: $y'' + 3y' + 2y = (x+1)e^x$ Dif. Denkleminin genel çözümünü bulunuz.

(5) $f(x) = M(x)\sin x + N(x)\cos x$ olsun.

Burada $M(x)$ ve $N(x)$ polinom olarak verilir. Hangisinin derecesi büyük ise y_0 çözümünde o dikkate alınır.

$$y_0 = (\text{polinom})_1 \sin x + (\text{polinom})_2 \cos x$$

olur.

Örnek: $y'' + 2y' - 3y = 2\sin x + x\cos x$ Dif. Denk. genel çözümünü bulunuz.

Sonuç: $y_0 = (a_1x + b_1)\sin x + (a_2x + b_2)\cos x$

$$y_0 = \left(\frac{1}{10}x - \frac{3}{50}\right)\sin x + \left(-\frac{1}{5}x - \frac{9}{50}\right)\cos x$$