TOPLAMLAR ve SIGMA GÖSTERİLİMİ

M ve n tamsayı ($m \le n$) ve f(x) bir fonksiyon olmak üzere, fonksiyon m, m+1, m+2, ... , n noktalarında tanımlı olsun.

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

gösterilimi fonksiyonun yukarıda belirtilen noktalardaki aldığı değerlerin toplamını ifade eder.

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + ... + f(n)$$

Bazen f(i) yerine yaygın olarak kısaca a_i ibaresi de kullanılır. Bu durumda

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n$$

olarak düzenlemek mümkündür.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

gösterilimi ise bir sonsuz seriyi ifade etmektedir.

ÖZELLİKLER :

1-) $\sum_{i=m}^{n}(Af(i) = A\sum_{i=m}^{n} f(i)$; A= sabit

2-) $$\sum_{i=m}^{n}(Af(i)+Bg(i)) = \sum_{i=m}^{n} Af(i) + \sum_{i=m}^{n} Bg(i)$$

$$= A\sum_{i=m}^{n} f(i) + B\sum_{i=m}^{n} g(i)$$

3-) $$\sum_{i=m}^{m+n} f(i) = \sum_{i=0}^{n} f(i+m)$$

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = \sum_{i=0}^{n-m} f(i+m) = \sum_{\substack{i=1 \\ i=m-(m-1)=1}}^{n-(m-1)} f(i+(m-1))$$

4-) $$\sum_{i=m+1}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n} f(i) - \sum_{i=1}^{m} f(i)$$

5-) $$= \sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n \text{ tane}} = n.1 = n$$

6-) $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

7-) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

8-) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

9-) $\sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 \ldots\ldots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$; $r \neq 1$

10-) $\sum_{i=m}^{n} [f(i+1) - f(i)] = f(n+1) - f(m)$

11-) $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - k^3 = (n+1)^3 - 1^3$; Teleskopik Toplam

---

/ $\sum_{k=m+1}^{n} (6k^2-4k+3) = ?$ $\quad 1 \leq m \leq n$

$$\sum_{k=1}^{n} (6k^2-4k+3) = 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + 3\sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 6 \cdot \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6} - 4 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + 3 \cdot n$$

$$= 2n^3 + n^2 + 2n$$

Böylece;

$$\sum_{k=m+1}^{n} (6k^2-4k+3) = \sum_{k=1}^{n} (6k^2-4k+3) - \sum_{k=1}^{m} (6k^2-4k+3)$$

$$= (2n^3+n^2+2n) - (2m^3+m^2+2m)$$

TEMEL ALAN PROBLEMİ

$a<b$ olacak şekilde bu aralıkta sürekli olan $y=f(x)$ pozitif tanımlı fonksiyonunun altında x ekseninin üzerinde kalan düzlemsel alanı bulmak isteyelim. Oluşan alan x ekseni, $x=a$ ve $x=b$ doğruları ile sınırlı olan pozitif alandır. Bu amaçla;

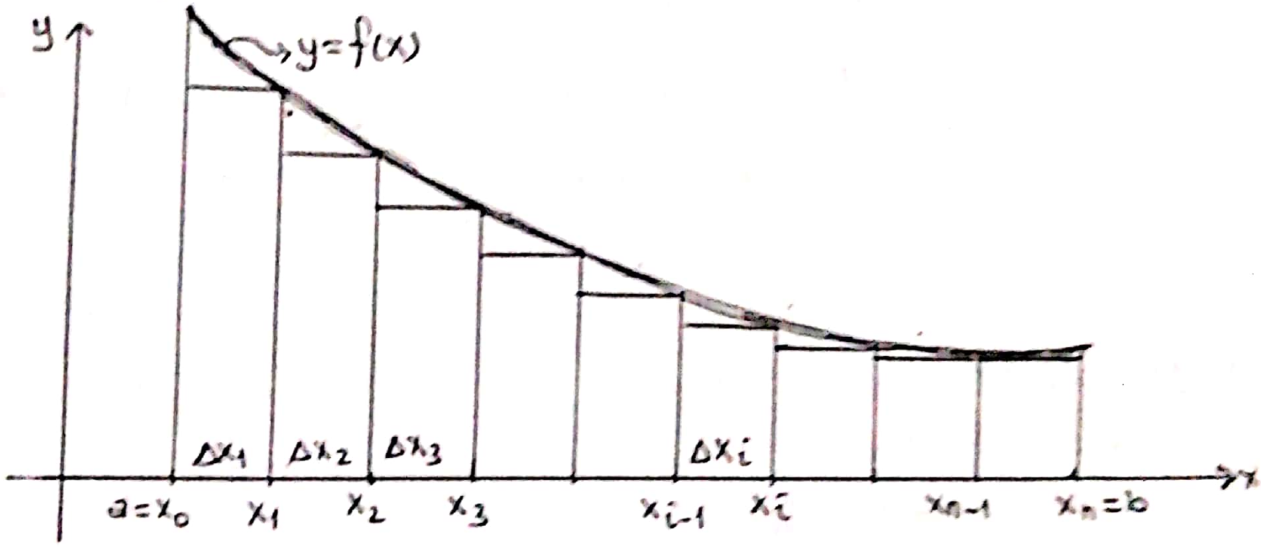
$[a,b]$ aralığını n adet alt aralığa (n adet eşit aralığa) bölelim.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 .... < x_{n-1} < x_n = b$$

Δx_i bu aralıktaki i. alt aralığın ($[x_{i-1}; x_i]$) boyu olmak üzere

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad ; (i=1, 2, 3, ..., n)$$

olur. Dolayısıyla her bir alt aralık tabanı Δx_i, yüksekliği $f(x_i)$ olan bir dikdörtgen olacaktır.



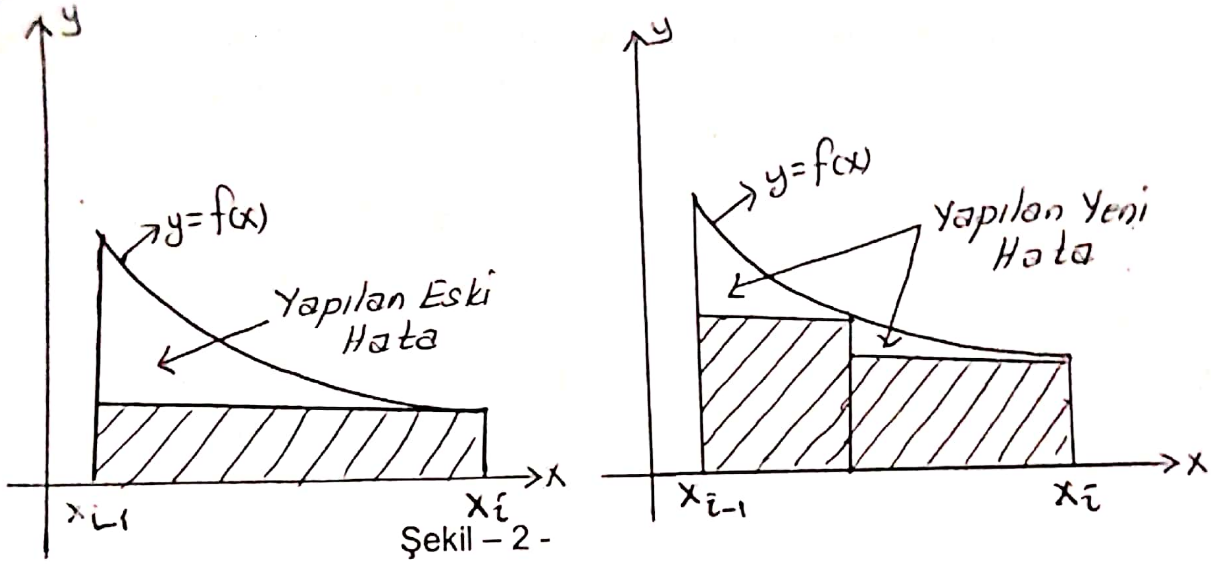
Şekil – 1 -

Bu alanların toplamı;

$$S_n = f(x_1).\Delta x_1 + f(x_2).\Delta x_2 + f(x_3).\Delta x_3 + ... + f(x_n).\Delta x_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$$

olacaktır.



Şekil – 2 -

Bu şekilde yukarıda verilen bilgiler ve şekiller doğrultusunda;

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + i.\Delta x = a + i.\frac{(b-a)}{n}$$

olmak üzere eğer

$$S_n = f(x_1).\Delta x_1 + f(x_2).\Delta x_2 + \dots\dots\dots + f(x_n).\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$$

Toplamının limiti varsa bu toplama;
y=f(x) eğrisinin altında x ekseni, x=a ve x=b doğruları ile sınırlı bölgenin alanı denir ve **A** ile gösterilir. Dolayısıyla;

$$A = \lim_{n\to\infty} f(x_1).\Delta x_1 + f(x_2).\Delta x_2 + \dots\dots\dots + f(x_n).\Delta x_n$$

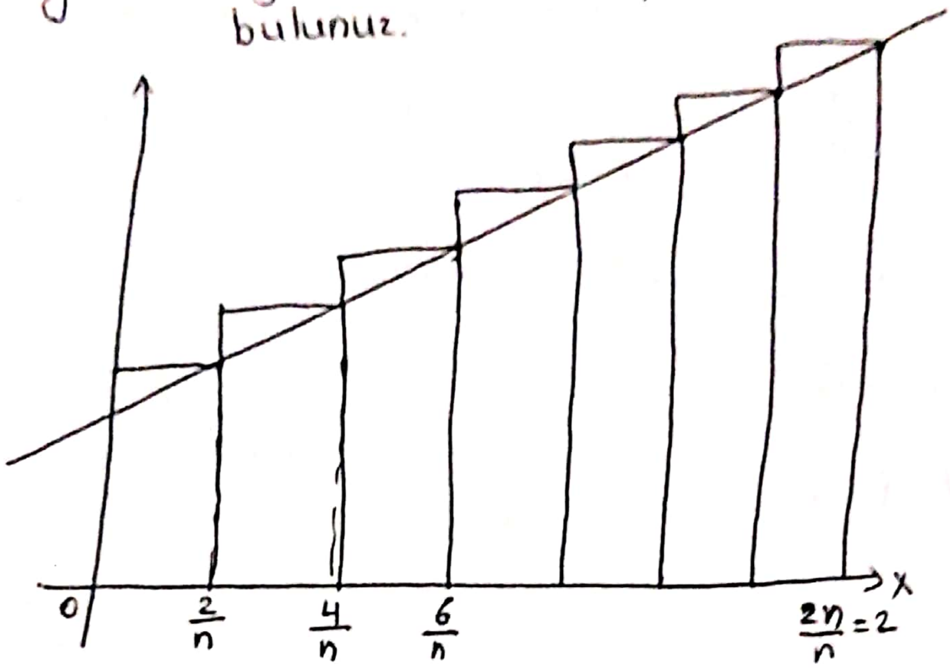
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n$$

olarak elde edilmiş olur. $(\max \Delta x_i = 0)$

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$$

$y=x+1$ eğrisi ile x ekseni, $x=0$ ve $x=2$ arasındaki alanı bulunuz.



1. ÇÖZÜM:

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_i = a + i.\Delta x = a + i\frac{(b-a)}{n} = 0 + i.\frac{2}{n} = \frac{2i}{n}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right).\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{n}\right).\left(\frac{2i}{n}+1\right)$$

$$S_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}+1\right) = \frac{2}{n}\left[\frac{2}{n}\,\frac{n.(n+1)}{2} + n\right]$$

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4(n)(n+1)}{n^2\ 2} + 2 = 4 \text{ br}^2.$$

2. ÇÖZÜM

$x_0=0$, $x_1=\frac{2}{n}$, $x_2=\frac{4}{n}$, $x_3=\frac{6}{n}$; $x_n=\frac{2n}{n}$

$y=x+1$'in $x=x_i$'deki değeri

$x_i=\frac{2i}{n}$; $x_i+1=\frac{2i}{n}+1$ olup i. aralık

$$\left[\frac{2(i-1)}{n} ; \frac{2i}{n}\right] ; \Rightarrow \Delta x_i = \frac{2}{n}$$

$\Delta x_i \to 0 \Rightarrow n\to\infty$ 'dur.

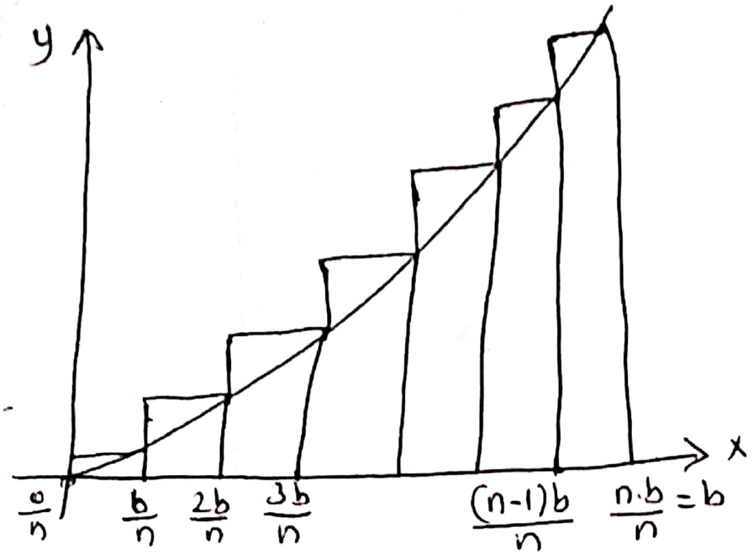
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}+1\right).\frac{2}{n}$$

$$= \frac{2}{n}\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

$$= \frac{2(n+1)}{n} + 2$$

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = 2+2 = 4 \text{ br}^2$$

$y=x^2$ eğrisinin altında x ekseni, $x=0$ ve $x=b$ ile sınırlı alanı bulunuz



$$\Delta x_i=\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{b-0}{n}=\frac{b}{n}$$

$$x_i=a+i.\Delta x=0+i\frac{b}{n}$$
$$=i.\frac{b}{n}$$

$$S=\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i.b}{n}\right)^2.\left(\frac{b}{n}\right)$$
$$=\frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$
$$=\frac{b^3}{n^3}\left[\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}\right]$$

$$A=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{n^3}\left[\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}\right]$$

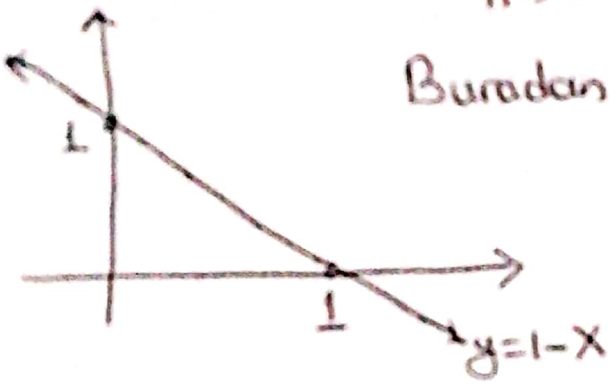
$$A=\frac{b^3}{3}\ br^2.$$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n^2}$ ifadesinin alan olduğunu gösteriniz ve değerini bulunuz.

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i \quad \text{idi.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n-i}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1-\frac{i}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\right)$$



Buradan $\Delta x_i = \frac{1}{n}$; $f(x_i) = 1 - \frac{i}{n} \Rightarrow x_i = \frac{i}{n}$

$f(x_i) = 1 - x_i$

$f(x) = 1 - x$ olur.

Dolayısıyla;

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (n-i)$$

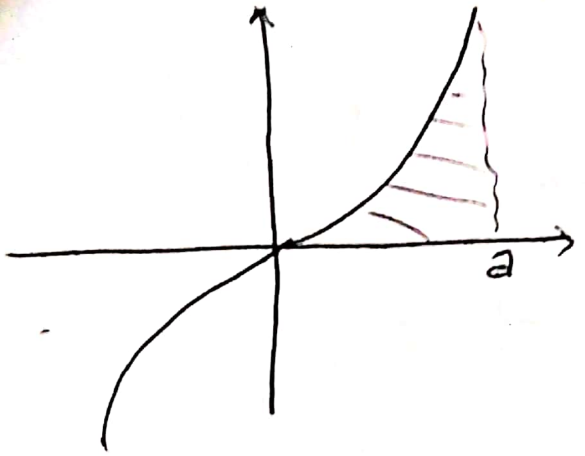
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left[n^2 - \frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ br}^2$$

CamScanner ile tarandı

$y=x^3$ eğrisi, $x=0$, $x=a$ ve x ekseni arasındaki alanı bulunuz.



$$A=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$$

$$\Delta x_i=\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{a-0}{n}=\frac{a}{n}$$

$$x_i=a+i.\Delta x=0+i.\frac{a}{n}$$
$$x_i=i.\frac{a}{n}$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f\left(i.\frac{a}{n}\right).\frac{a}{n}=\sum_{i=1}^{n}\left(i.\frac{a}{n}\right)^3.\frac{a}{n}$$

$$=\frac{a^4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$=\frac{a^4}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=\frac{a^4}{n^4}.\frac{n^2.(n+1)^2}{4}$$

$$A=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a^4}{n^4}.\frac{n^2.(n+1)^2}{4}\right]$$

$$A=\frac{a^4}{4}\ \text{br}^2$$

BÖLÜNTÜLER ve RIEMANN TOPLAMLARI

P, $[a,b]$ aralığında sonlu, sıralı bir reel sayı dizisi olmak üzere;

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

olsun.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

P sonlu, sıralı dizisi $[a,b]$'nin bir bölüntüsü olarak adlandırılır ve $[a,b]$'yi $[x_{i-1}, x_i]$ olacak şekilde n tane aralığa ayırır. i. aralığın boyu

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad ; (1 \le i \le n)$$

olmak üzere Δx_i 'lerin en büyüğü **P'nin normu** olarak adlandırılır ve $\|P\|$ ile gösterilir.

$$\|P\| = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$$

f(x) fonksiyonu aralığın her bir (x_{i-1}, x_i) noktasında sürekli olduğundan bu aralıkta Maksimum ve Minimum değerler alır. Böylece (x_{i-1}, x_i) için;

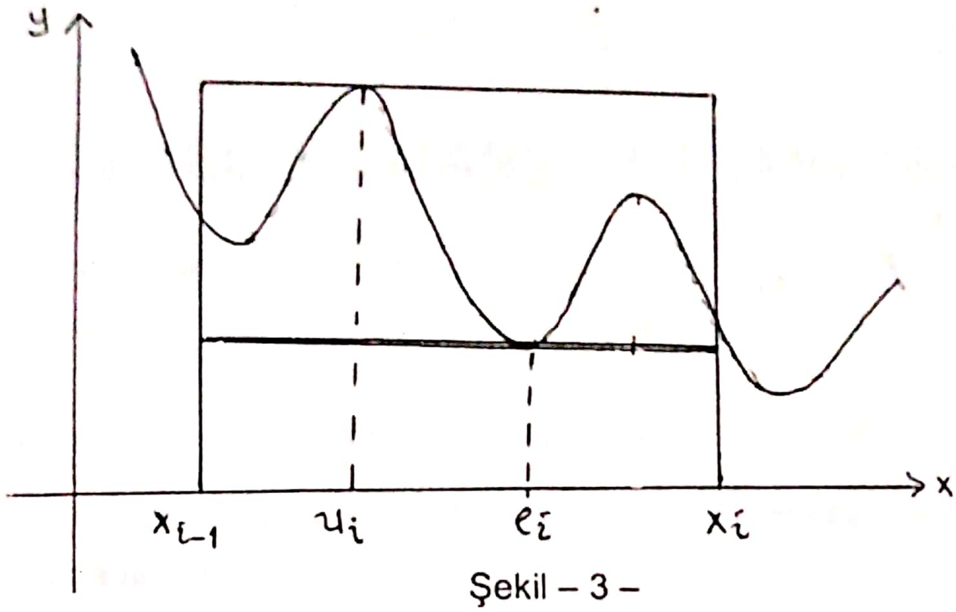
$$f(l_i) \le f(x) \le f(u_i) \quad ; \quad x_{i-1} \le x \le x_i$$

olacak şekilde l_i ve u_i reel sayıları mevcut olur.

Eğer $[a,b]$'de $f(x) \ge 0$ ise (yani f(x) pozitif tanımlıysa);

$$f(l_i).\Delta x_i \quad \text{ve} \quad f(u_i).\Delta x_i$$

ifadeleri x ekseninin üzerinde, tabanı eksende ve üst ucu fonksiyonun **en küçük ve en büyük değerlerini alacak şekilde ALAN** ifade ederler.



Şekil – 3 –

Eğer A_i , y=f(x) eğrisinin altında x_{i-1} ile x_i düşey doğrularının sınırladığı alan ise şekilden kolaylıkla görüleceği üzere;

$f(l_i).\Delta x_i \leq A_i \leq f(u_i).\Delta x_i$ ' dir.

Eğer f(x) negatif değerler alırsa bu durumda

$f(l_i).\Delta x_i$ ve $f(u_i).\Delta x_i$

ifadelerinden biri veya ikisi negatif olur ve x ekseninin altında oluşan negatif alanı belirtir. Yapılacak olan işlemlerde daima;

$f(l_i).\Delta x_i \leq f(u_i).\Delta x_i$

olarak alınacaktır.