Örnek 4- $(x^2-1)y''+3xy'+xy=0$, $y(0)=4$, $y'(0)=6$

Başlangıç Değer problemının kuvvet serisi çözümünü bulunuz. (Çözüm Serisini 4. derece terimlere kadar yazınız). Serinin yakınsaklık ~~(yarıçapını)~~ aralığını bulunuz.

Çözüm: $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$ dışındaki bütün noktalar verilen Diferansiyel denklemin adi noktalarıdır.

Başlangıç şartları $x=0$ da verilmiş olduğundan $x_0=0$ almalıyız. ($x_0=0$ civarında (komşuluğunda) Seri çözümünü bulmalıyız)

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \;,\; y'=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1} \;,\; y''=\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}$$

$$(x^2-1)\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + 3x\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + 3\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - 2a_2 + 2\cdot 3a_3 x$$

$$+ 3a_1 x + a_0 x + 3\sum_{n=2}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0$$

$$-2a_2 + (a_0 + 3a_1 - 6a_3)x + \sum_{n=2}^{\infty}\Big[-(n+2)(n+1)a_{n+2} +$$

$$+ \big(n(n-1) + 3n\big)a_n + a_{n-1}\Big]x^n = 0$$

$$\begin{cases} -2a_2 = 0 \\ a_0 + 3a_1 - 6a_3 = 0 \\ -(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n+2)a_n + a_{n-1} = 0, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

$$a_2 = 0, \qquad a_3 = \frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{2}a_1$$

$$a_{n+2} = \frac{n(n+2)a_n + a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}; \quad n \geq 2$$

$$a_4 = \frac{8a_2 + a_1}{12} = \frac{1}{12}a_1$$

$$a_5 = \frac{15a_3 + a_2}{20} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{2}a_1\right) = \frac{1}{8}a_0 + \frac{3}{8}a_1$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$y = a_0 + a_1 x + \left(\frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{2}a_1\right)x^3 +$$

$$+ \frac{1}{12}a_1 x^4 + \left(\frac{1}{8}a_0 + \frac{3}{8}a_1\right)x^5 + \cdots$$

$$y = a_0\left(1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^5 + \cdots\right) + a_1\left(x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{8}x^5 + \cdots\right)$$

$y(0) = 4$, $y'(0) = 6$ Başlangıç koşulları

$y(0) = 4 \Rightarrow a_0 = 4$

$y'(0) = 6 \Rightarrow a_1 = 6$ olur.

$$y = 4\left(1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^5 + \cdots\right) + 6\left(x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{8}x^5 + \cdots\right)$$

Yakınsaklık aralığı

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{3x}{x^2-1} \quad ; \quad \frac{R(x)}{P(x)} = \frac{x}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

$$\frac{3x}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 3 \cdot x^{2n+1} \quad ; \quad |x|<1$$

$$\frac{x}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n+1} \quad ; \quad |x|<1 \text{ olur.}$$

Sonuç olarak; Çözüm serisi en az $|x|<1$ için yakınsaktır.

Örnek-2. $(x^2-1)y''+3xy'+xy=0$, $y(2)=4$, $y'(2)=6$ Başlangıç Değer Problemnin kuvvet serisi çözümünü elde edin2. (Yakınsaklık aralığını bulunuz.)

Çözüm: $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n$ $x-2=t$ dersek

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$((t+2)^2-1)\frac{d^2y}{dt^2}+3(t+2)\frac{dy}{dt}+(t+2)y=0,\ y(0)=4,\ y'(0)=6$$

$$\boxed{y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n}$$

$x^2-1=0 \Rightarrow x=\mp 1$ tekil noktalar

-1'in 2 ye uzaklığı: 3
1'in 2 ye " : 1 } dir.

Çözüm serisi en az $|x-2|<1$ için yakınsaktır.

$$-1<x-2<1$$

$$\boxed{1<x<3}$$ Yakınsaklık aralığı

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,\quad y'=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n\cdot t^{n-1},\quad y''=\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)\cdot t^{n-2}$$

olur. Denklemde yerine yazalım.

$$(t^2+2t+3)\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)t^{n-2}+3(t+2)\sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^{n-1}+(t+2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)t^n+2\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)\cdot t^{n-1}+3\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)t^{n-2}+$$

$$+3\sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^n+6\sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1}+2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)t^n+2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n\cdot t^n+3\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)t^n+$$

$$+3\sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^n+6\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)t^n+\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}t^n+2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n=0$$

$$4a_2 t + 6a_2 + 18a_3 t + 3a_1 t + 6a_1 + 12a_2 t + a_0 +$$

$$+ 2a_0 + 2a_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} \Big[a_n n(n-1) + 2a_{n+1}(n+1)\cdot n + 3a_{n+2}(n+2)(n+1)$$

$$+ 3a_n n + 6a_{n+1}(n+1) + a_{n-1} + 2a_n \Big] t^n = 0$$

$$6a_2 + 6a_1 + 3a_0 = 0$$

$$4a_2 + 18a_3 + 3a_1 + 12a_2 + 2a_1 = 0$$

$$a_n n(n-1) + 2a_{n+1}(n+1)n + 3a_{n+2}(n+2)(n+1) + 3a_n n + 6a_{n+1}(n+1) +$$

$$+ a_{n-1} + 2a_n = 0 \quad , n \geq 2$$

$$\boxed{a_2 = -\frac{a_0}{2} - a_1} \; ; \quad 18a_3 + 16a_2 + 5a_1 = 0$$

$$18a_3 + 16\left(-\frac{a_0}{2} - a_1\right) + 5a_1 = 0$$

$$18a_3 - 8a_0 - 16a_1 + 5a_1 = 0$$

$$\boxed{a_3 = \frac{4}{9}a_0 + \frac{11}{18}a_1}$$

$$3a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_{n+1}\underbrace{\left[2(n+1)n + 6(n+1)\right]}_{(n+1)(2n+6)}$$

$$+a_n\left[n(n-1) + 3n + 2\right] + a_{n-1} = 0 \quad ; \quad n \geq 2$$

$$a_{n+2} = \frac{-a_{n+1}(n+1)(2n+6) - a_n(n^2+2n+2) - a_{n-1}}{3(n+2)(n+1)} \quad ; n \geq 2$$

Rekürans bağıntısı

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \cdots$$

$$y = a_0 + a_1 t + \left(-\frac{a_0}{2} - a_1\right)\cdot t^2 + \left(\frac{4}{9}a_0 + \frac{11}{18}a_1\right)t^3 + (\quad\quad)t^4 + \cdots$$

$$y = a_0\left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{9}t^3 - \cdots\right) + a_1\left(t - t^2 + \frac{11}{18}t^3 - \cdots\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 4 \Rightarrow \quad a_0 = 4 \\ y'(0) = 6 \Rightarrow \quad a_1 = 6 \end{array}\right\} \text{olur.}$$

$$y = 4\left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{9}t^3 - \cdots\right) + 6\left(t - t^2 + \frac{11}{8}t^3 - \cdots\right)$$

Örnek 3 : $(1-x)y'' - xy' = e^x$ homojen olmayan

Dif. Denklemin $x_0=0$ komşuluğundaki çözümünü

bulunuz.

Çözüm: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \;,\; y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \;,\; y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

$$(1-x)\cdot \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(n+1) n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\boxed{\cdot 2a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \text{ olur.}}$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_{n+1}(n+1)n - a_n \cdot n \right] x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_{n+1}(n+1)n - a_n \cdot n = \frac{1}{n!}, \quad n=1,2,3,\cdots \quad (n \geq 1 \text{ için})$$

$$6a_3 - 2a_2 - a_1 = 1 \; ; \; a_3 = \frac{1}{6}(1+2a_2+a_1) = \frac{1}{6}(2+a_1)$$

$$12a_4 - 6a_3 - 2a_2 = \frac{1}{2} \; ; \; a_4 = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}+6a_3+2a_2\right) = \frac{1}{24}(7+2a_1)$$

$$20a_5 - 12a_4 - 3a_3 = \frac{1}{6} \; ; \; a_5 = \frac{1}{20}\left(\frac{1}{6}+12a_4+3a_3\right) = \frac{1}{20}\left(\frac{28}{6}+\frac{3}{2}a_1\right)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}a_1 x^3 + \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}a_1 x^4 + \frac{28}{120}x^5 + \frac{3}{40}a_1 x^5 + \cdots$$

$$y = a_0 + a_1\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{24}x^4 + \frac{7}{30}x^5 + \cdots$$

Genel çözüm bulunur.

$1-x=0 \Rightarrow x=1$ Tekil nokta olur. O halde

Çözüm serisi en az $|x|<1$ için yakınsaktır.

Örnek 1) $(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$

Legendre denklemini $x_0 = 0$ civarındaki Seri çözümün en büyük yakınsaklık aralığını bulunuz.

(Burada α sabittir) (yakınsaklık yarıçapının alt sınırını bulunuz)

Çözüm: $P(x) = 1-x^2$, $Q(x) = -2x$, $R(x) = \alpha(\alpha+1)$

$P(x) = 0 \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ (Tekil noktalar)

$x = \pm 1$ in $x_0 = 0$ a uzaklığı 1 dir. O halde

Seri çözümü olan $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en az $|x| < 1$ için yakınsaktır. (Daha geniş yakınsaklık aralığı mümkün olabilir.)

Örneğin $\alpha = 1$ için $y = x$ çözüm olur.