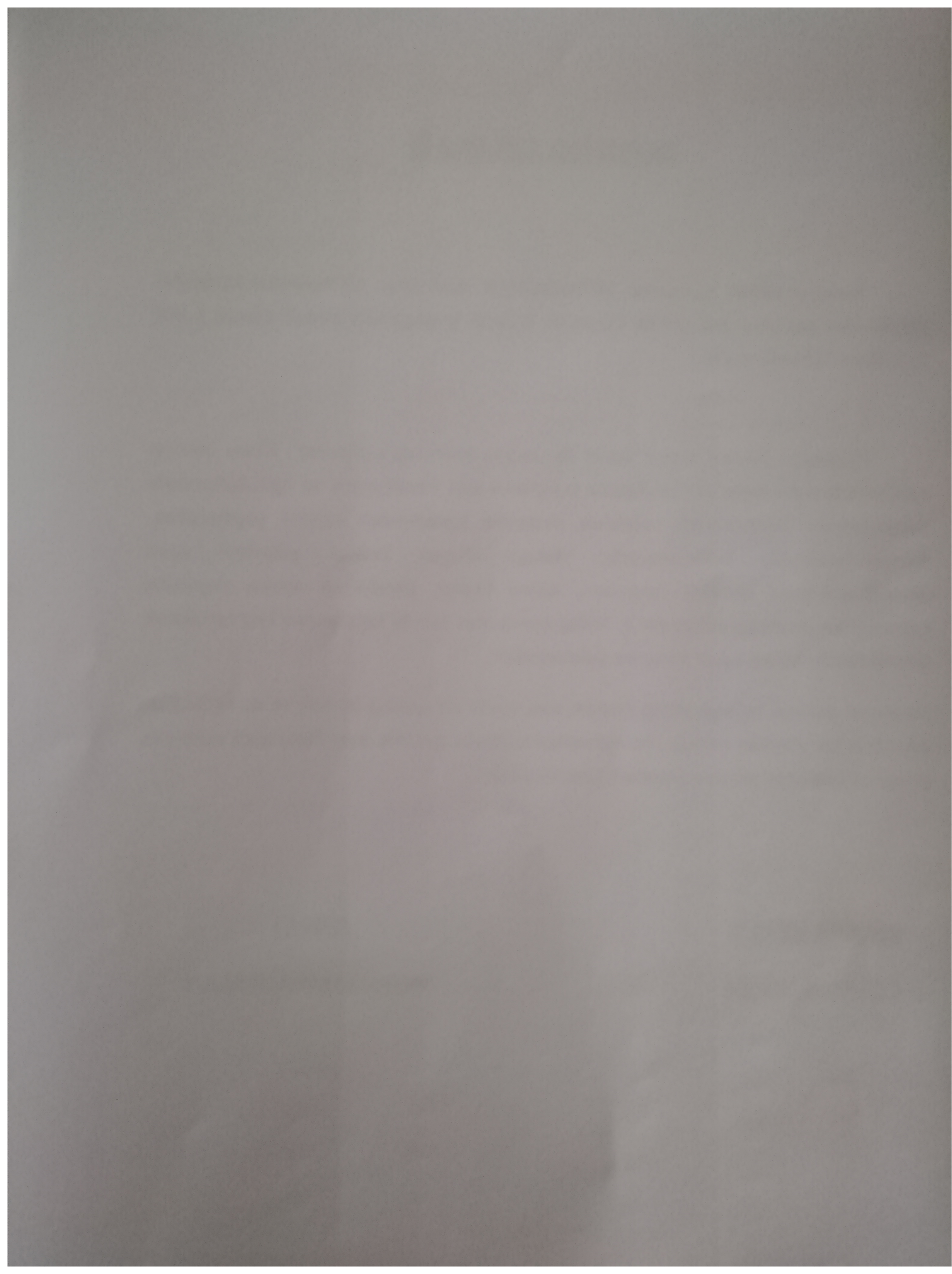




EK

Adi Nokta Komsuluğunda Çözümler (Civarında)

Teorem $x = x_0$

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \quad (1)$$

denklemin bir adi noktası olsun. Yani ;

$$P(x) = \frac{B(x)}{A(x)}, \quad Q(x) = \frac{C(x)}{A(x)} \quad \text{fonksiyonları}$$

$x = x_0$ da analitik olsun. Bu takdirde ;

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

şeklinde olan lineer bağımsız iki çözüme sahiptir.
Bu şekilde her hangi bir seri çözümlerin yakınsaklık
yarıkapı en azından (1) denklemin x_0 'a en yakın
(reel veya kompleks) tekil noktasına olan uzaklığı
kadaradır.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (2); \quad x_0 \text{ noktası } (1) \text{ denkleminin}$$

adi noktası olsun. Bu durumda (1) in (2) formunda lineer bağımsız iki analitik çözümü vardır. Dahası

(2) formunda verilen her hergeçer

Kuvvet serisi çözümünün yakınsaklık yarıçapı, en az x_0 dan (1) denklemin en yakın singüler noktasına (reel veya kompleks değerli) olan uzaklık kadar büyüktür.

Örnek: $2y'' + xy' + y = 0$ denkleminin $x=0$ noktası etrafındaki kuvvet serisi çözümünün yakınsaklık yarıçapı için minimum değeri bulunuz.

Çözüm: Bu denklem için $P(x) = \frac{x}{2}$ ve $Q(x) = \frac{1}{2}$ dir.

~~Her~~ Bu fonksiyonlar her reel veya kompleks değerli x için analittir. Verilen Dif. Denklem ~~den~~ singüler noktaya sahip olduğundan $x=0$ adi nokta ve en yakın singüler nokta arasındaki uzaklık sonsuzdur. Böylece yakınsaklık yarıçapı sonsuzdur.

Örnek: $(1+x^2)y'' - y' + y = 0$ Denklemim $x=0$ noktası etrafındaki kuvvet serisi çözümünün yakınsaklık yarıçapı için minimum değeri bulunur.

Çözüm: $P(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, $Q(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Verilen Dif. Denk.

İngilizce noktaları F_i kompleks sayısı olduğundan $x=0$ adı noktasıdır. Dahası, 0 den F_i ye uzaklık "1" dir. Böylece $x=0$ etrafında kuvvet serisi çözümün için yakınsaklık yarıçapı en az "1" dir.

Örnek: $2y'' + xy' + y = 0$, $x_0 = 1$ civarındaki Seri çözümünü bulunur. Ayrıca serinin yakınsaklık yarıçapını belirleyiniz.

Çözüm: Yakınsaklık yarıçapı ∞ dir.

Denklemim $x_0 = 1$ noktasını $t=0$ 'a kaydırırsak.

$x-1=t \Rightarrow x=t+1$ dönüşümü yaparsak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad \left[\begin{array}{l} 2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + (t+1) \frac{dy}{dt} + y = 0 \\ y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \end{array} \right]$$

Örnek: $y'' + e^x y' + (1+x^2)y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Seri çözümünü bulunuz.

Çözüm: $p(x) = e^x$, $q(x) = 1+x^2$ dir. ve ikisi de her x için analittir. $r = \infty$ dir.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots\right) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$+ (1+x^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

4. derece kadar terimleri alalım.

$$(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + 30a_6 x^4 + \dots)$$

$$+ (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots)$$

$$+ (a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + 4a_4 x^4 + \dots)$$

$$+ \left(\frac{1}{2}a_1 x^2 + a_2 x^3 + \frac{3}{2}a_1 x^4 + \dots\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{6}a_1 x^3 + \frac{1}{2}a_2 x^4 + \dots\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{24}a_1 x^4 + \dots\right)$$

EK-4

$$+ (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots)$$

$$+ (a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 + \dots) = 0$$

$$2a_2 + a_1 + a_0 = 0 \quad x^0 \text{ koeffizienten}$$

$$6a_3 + 2a_2 + 2a_1 = 0 \quad x^1 \quad "$$

$$12a_4 + 3a_3 + 2a_2 + \frac{1}{2}a_1 + a_2 + a_0 = 0 \quad x^2 \quad "$$

$$12a_4 + 3a_3 + 3a_2 + \frac{1}{2}a_1 + a_0 = 0$$

$$20a_5 + 4a_4 + 4a_3 + a_2 + \frac{7}{6}a_1 = 0 \quad x^3 \quad "$$

$$30a_6 + 5a_5 + 5a_4 + \frac{3}{2}a_3 + \frac{4}{3}a_2 + \frac{1}{24}a_1 = 0 \quad x^4 \quad "$$

$$y(0) = a_0 = 1 \quad y'(0) = a_1 = 0 \text{ olur.}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{6}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = -\frac{1}{120}, \quad a_6 = \frac{11}{720}$$

elde edilir.

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \frac{11}{720}x^6 + \dots \text{ bulunur.}$$

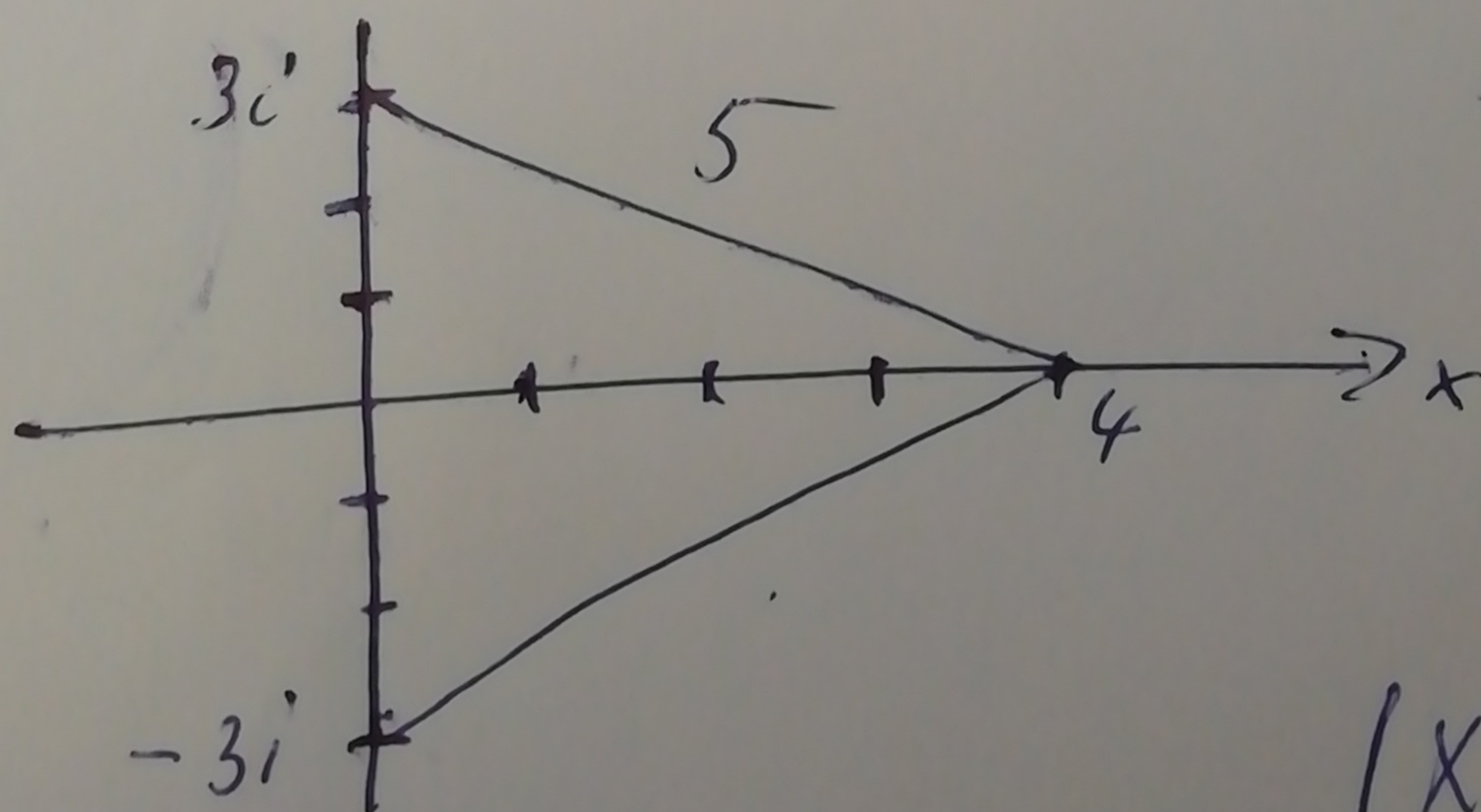
Örnek: $(x^2+9)y'' + xy' + x^2y = 0$ denklemini, x in $\emptyset$ kuvvetleri ile verilen bir seri çözümün yakınsaklık yarıçapını belirleyin.

Çözüm: $p(x) = \frac{x}{x^2+9}$, $q(x) = \frac{x^2}{x^2+9}$ (real veya kompleks)
($x-4$) ün kuvvetlerine göre seri çözüm bulun

Kompleks tekil noktalarının reel olanlarla aynı öreunde tutulması gerektirir.

Tekil noktalar $x = \pm 3i$ dir. Bunlardan her birinin 0' dan uzaklığı (kompleks düzlemde) 3 dir. Böylece

$\sum a_n x^n$ şeklindeki bir seri çözümün yakınsaklık yarıçapı en az 3 dir. Her bir tekil noktanın 4'e uzaklığı 5 tir. Böylece $\sum a_n (x-4)^n$ şeklinde bir seri çözüm, en az 5 den bir yakınsaklık yarıçapına sahiptir.



Tekilliklere en yakın uzaklık olarak yakınsaklık yarıçapı

$$|x-4| < 3$$

$$1 < x < 7 \text{ olur.}$$

EK-6

Örnek: $(x^2-4)y'' + 3xy' + y = 0$

Denklemin x 'in kuvvetleri cinsinden genel çözümünü bulunuz. Sonra $y(0)=4, y'(0)=1$ koşulları altında özel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $p(x) = \frac{3x}{x^2-4}, \quad q(x) = \frac{1}{x^2-4}$

$x^2-4=0 \quad x=\pm 2$ Tekil noktalar.

Böylece serinin yakınsaklık yarıçapı en az 2 dir.

-2	nm	0	a	uzaklığı	2
$+2$	nm	0	a	"	2 dir.

Çözüm serisinin; $|x| < 2$ yakınsaklık aralığı olur.
en az