

İntegral işareti altında Türev

(Genel) "Leibniz Formülü"

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t) dt \right) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dt + \beta'(x) \cdot f(x, \beta(x)) - \alpha'(x) \cdot f(x, \alpha(x))$$

Örnek: $f'(a) = \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$ ise $f'(a) = ?$

Örnek: $y = \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt$ ise $\frac{dy}{dx} = ?$

Örnek: $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\int_{\pi}^x \frac{dt}{2 + \cos t}}{x - \pi} = ?$

Örnek: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\int_0^{2x} e^{t^2} dt} = ?$

Örnek: $F(a) = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(ax)}{x(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \ln(1+a)$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $F'(a) = \int_0^{\infty} \frac{\frac{x}{1+a^2x^2}}{x(1+x^2)} dx.$

$$F'(a) = \frac{1}{1-a^2} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{a^2}{1+a^2x^2} \right) dx$$

$$F'(a) = \frac{1}{1-a^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\arctan x - a \cdot \arctan ax \right]_0^b$$

$$F'(a) = \frac{1}{1-a^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\arctan b - a \arctan(ab) - 0 \right]$$

$$F'(a) = \frac{1}{1-a^2} \left[\frac{\pi}{2} - a \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+a}$$

Buradan; $F'(a) = \frac{\pi}{2(1+a)} \Rightarrow F(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a)$
bulunur.

Örnek: $\frac{d}{dt} \left(\int_1^4 \sqrt{x^2+1} + t^2+1 \right) dx = ?$ (6t)

Örnek: $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ ise $\frac{F''(x)}{F'(x)} = ?$

Örnek: $f(x) = 4 - 3x^2$, $[-1, 2]$ için Ortalama değeri bulunuz. $c \in (-1, 2) = ?$

Çözüm: $f(c) = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 (4 - 3x^2) dx$

$$\boxed{f(c) = 1}$$

$$4 - 3c^2 = 1 \Rightarrow \boxed{c = 1} \in (-1, 2) \text{ olur.}$$

Fonksiyonun Ortalama değeri:

$$\boxed{f_{ort} = 1} \text{ dir.}$$

EK-1

Örnek: $\int_0^1 \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = ?$ $\arctan x = t$
 $x = \tan t$
 $\frac{dx}{1+x^2} = dt$
 $= \int_0^{\pi/4} t \cos t dt$

Örnek: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx = 0$ dir. Çünkü $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$
fonksiyonu $[-\pi, \pi]$ aralığında tek fonksiyondur.
($f(-x) = -f(x)$ olur)

Örnek: $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$ olduğunu gösteriniz
 $x = \frac{\pi}{2} - t$ dersek, $dx = -dt$ olur

$\int_{\pi/2}^0 f(\sin(\frac{\pi}{2} - t)) \cdot (-dt) = \int_0^{\pi/2} f(\cos t) dt$ olur

Örnek: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + \int_0^x \cos t dt}{\int_0^x t dt - x \cos x} = ?$ (-2)

EK-2

Örnek: $I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx = \frac{a}{2}$

olduğunu göstermek

$a-x=t \quad -dx=dt$

$I_2 = \int_0^a \frac{f(a-t)}{f(a-t) + f(t)} dt$ t yerine x yazalım.

$I_2 = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x) + f(x)} dx$ olur.

$I + I = \int_0^a \frac{f(a-x) + f(x)}{f(a-x) + f(x)} dx = \int_0^a dx = a$

$2I = a \Rightarrow \boxed{I = \frac{a}{2}}$ olur.

Örnek: $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sin t dt$ $f'(x) = ?$

$f'(x) = 3x^2 \sin x^3 - 2x \sin x^2$