

Ödev: Bir boyutlu ısı denklemi: (Bir çubuktaki ısı yayılması prob.)

$$U_t = k U_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L \quad k: \text{sabit}$$

Başlangıç koşulu: $U(x, 0) = f(x)$ $0 < x < L$ Başlangıç ısı

Sınır koşulları: $U(0, t) = 0, \quad U(L, t) = 0$

Dirichlet problemi çözülmüş. ($k > 0$) (Cauchy Problemi de denir)

Çözümü: Çözüm; $U(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ Separation of variables
 olsun. O halde $X(x)$ ve $T(t)$ fonksiyonlarını bakalım.

$$X \cdot T' = k \cdot X'' \cdot T$$

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

1) $X'' - \lambda X = 0$ Sturm-Liouville denklemi

2) $T' - k\lambda T = 0$ olur. Çözümlerine bakalım.

$\lambda = -\alpha^2$ olur.

(1) $X'' - \lambda X = 0$

$$U(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$U(0, t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$U(L, t) = X(L) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(L) = 0 \text{ olur.}$$

-9-

$$\boxed{X'' + \alpha^2 X = 0}, \quad T' + \alpha^2 L T = 0$$

$$\begin{cases} u(0, t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \\ u(L, t) = X(L) \cdot T(t) = 0 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} u(0, t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \\ u(L, t) = X(L) \cdot T(t) = 0 \end{matrix}} \right\} X(0) = 0, X(L) = 0 \text{ olur.}$$

$X'' + \alpha^2 X = 0$ in. $X(0) = 0, X(L) = 0$ koşullarını sağlayan bir çözümünü bulma bir öz değer problemidir.

→ Denklemin genel çözümü

$$X(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \text{ dir. } X(0) = 0 \text{ dan dolayı}$$

$$A = 0, X(L) = 0 \text{ dan } X(L) = B \sin \alpha L = 0 \text{ olur.}$$

Burada $B = 0$ seçilirse denklemin sıfır (sıfır) çözümü olur. 0 halde $B \neq 0$ ~~olmalıdır~~ ne ;

$$\sin \alpha L = 0 \text{ olur. ve}$$

$$\alpha L = n\pi \text{ olur.}$$

$$\boxed{\alpha_n = \frac{n\pi}{L}} \quad n = 1, 2, \dots \text{ dir.}$$

Böylece α_n öz değerlerme karşı gelen sınır koşullarını sağlayan öz fonksiyonlar ;

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \left(\alpha_n = \frac{n\pi}{L}\right)$$

olur.

-10-

$$T' + \alpha^2 k T = 0 \text{ denkleminin çözümü;}$$

$$\int \frac{dT}{T} + \int \alpha^2 k dt = \int 0$$

$$\ln T + \alpha^2 k t = \ln C$$

$$T(t) = C \cdot e^{-\alpha^2 k t} \text{ olur. } \alpha = \frac{n\pi}{L} \text{ için;}$$

$$T_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k t}$$

Sınır koşullarını sağlayan çözüm:

$$U_n(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$U_n(x, t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot C_n \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k t} \quad n=1, 2, \dots$$

$$U_n(x, t) = a_n \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad , n=1, 2, \dots \quad (a_n = B_n C_n \text{ dir})$$

$$(*) U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{Serisi verilen denklemin çözümüdür.}$$

Şimdi de Başlangıç ~~koşullarını~~ ~~koşullarını~~ koşullarını uygulayalım.

$$U(x, 0) = f(x)$$

$$U(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ olur. Burada } a_n \text{ ler}$$

$f(x)$ in Fourier sinüs serisinin katsayılarını oluşturur

a_n katsayılarını hesaplamak için ;

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ eşitliğini her iki}$$

tarafını $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ ile çarpıp 0 dan L ye kadar integralini alalım. O zaman,

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{L}{2} & , m = n \end{cases}$$

olar.

$$\int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = a_n \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = a_n \frac{L}{2}$$

dur. Buradan ;

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \text{ elde edilir. Buna}$$

$u(x,t)$ de (*) la yerne yerleştir. Çözüm:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)kt} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

bulunur.