

Tam Diferansiyel Denklemler

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (1)$$

Diferansiyel Denkleminde ;

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}} \text{ ise (1) denkleminde Tam}$$

Dif. Denklemdir. Bu durumda (1) denkleminde;
 $u = f(x,y)$ şeklindeki bir fonksiyonun Toplam Diferansiyeli olur. Bu durumda;

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy = 0 \quad (2)$$

yarılabılır. Buradan,

$$du = 0 \Rightarrow u = f(x,y) = C$$

şeklinde genel çözüm elde edilir.

(2) den ;

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= P(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= Q(x,y) \end{aligned} \right\} \text{ olur.} \quad (3)$$

(3) den $u = f(x, y)$ fonksiyonu bulunur.

Böylece $\boxed{u = f(x, y) = C}$ şeklinde (1) Dif.

Denkleminin Genel çözümünü elde edilmiştir olur.

Örnek: $(x^2 + \frac{y^2}{x}) dx + 2y \ln x dy = 0$ Dif. Denk-
leminin genel çözümünü bulunuz. $(\frac{x^3}{3} + y^2 \ln x = C)$

Örnek: $\cos y \cdot dx + (2y - x \sin y) dy = 0$ Dif. Denkleminin
genel çözümünü bulunuz. $(x \cos y + y^2 = C)$

Çözüm: $\frac{\partial P}{\partial y} = -\sin y$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin y$ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ olur. Tam Dif. Denklemdir.

$$(1) \frac{\partial f}{\partial x} = \cos y \quad \left. \begin{array}{l} (1) \text{ den } f = x \cos y + g(y) \\ (2) \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x \sin y \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x \sin y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin y + g'(y)$$

$$\boxed{f = x \cos y + y^2 + K}$$

$$2y - x \sin y = -x \sin y + g'(y)$$

Sonuç: $f = C$ (C: sabit)

$$g'(y) = 2y \Rightarrow \boxed{g(y) = y^2 + K}$$

$$\boxed{x \cos y + y^2 = C} \text{ bulunur.}$$

Örnek: $\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$ Dif. Denkleminin

genel çözümünü bulunuz. $\left(\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C \right)$

Örnek: $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$ Dif. Denkleminin

genel çözümünü bulunuz.

Örnek: $(x+y+8)dx + (x-y-2)dy = 0$ Dif. Denkleminin

genel çözümünü bulunuz.

Örnek: $(2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (y \cos x - x^2 \sin y) dy = 0$

Dif. Denklemini çözümler.

örnek: $[xy \cos(xy) + \sin(xy)] dx + [x^2 \cos(xy) + e^y] dy = 0$

Dif. Denklemini çözümler.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy) + x \cos(xy) = 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ olur. Tan. Dif. Denk.}$$

Çözüm: $\boxed{f(x,y) = C.}$ dir.

$$(1) \frac{\partial f}{\partial x} = xy \cos(xy) + \sin(xy) \quad (2) \text{ den } \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int (x^2 \cos(xy) + e^y) dy$$

$$(2) \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos(xy) + e^y \quad \left. \begin{array}{l} f = x \sin(xy) + e^y + g(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x} = \sin(xy) + xy \cos(xy) + g'(x) \end{array} \right\}$$

$$\boxed{f(x,y) = x \sin(xy) + e^y + K}$$

$$xy \cos(xy) + \sin(xy) = \sin(xy) + xy \cos(xy) + g'(x)$$

$$g'(x) = 0 \quad \boxed{g(x) = K = \text{sabit}}$$

Enesi $\boxed{x \sin(xy) + e^y = C}$ bulur.

5. Tam Diferansiyel Denklemlere Dönüştürülen Dif. Denklemler. (İntegrasyon Çarpanı)

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ Dif. denklemi bir tam diferansiyel denklem değilse, yani

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ise $\lambda(x,y)$ gibi bir fonksiyonla çarpılarak tam dif. denklem yapılabilir. Bu durumda elde edilen denklemin çözümü, verilen denklemin çözümü ile aynı olur. $\lambda(x,y)$ 'ye integrasyon çarpanı denir.

$$1) \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{-Q} dx$$

$$2) \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy$$

3) Eğer $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ fonksiyonları aynı dereceden Homojen fonksiyonlar ise, yani denklem

her dif. denklem ile integrasyon carpanı,

$$\lambda(x,y) = \frac{1}{xP+yQ}$$

dur.

Örnek: $(y+xy^2)dx - xdy = 0$ Dif. Denklemin genel çözümünü bulunuz. $\left(\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C = 0\right)$

$$\ln \lambda = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy$$

Örnek: $(x^2+y^2+x)dx + ydy = 0$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$

$$\ln \lambda = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{-Q} dx = \frac{0-2y}{-y} dx = 2dx \Rightarrow \boxed{\lambda = e^{2x}}$$

Örnek: $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$ Dif. Denkleminin genel çözümünü bulunuz. $\left(\lambda = \frac{1}{xP+yQ}\right)$

b) Lineer Diferansiyel Denklemler

$y' + P(x)y = Q(x)$ şeklindeki denkleme birinci mertebeden lineer Dif. denklem denir.

$P(x)$ ve $Q(x)$ sürekli fonksiyonlardır.

$Q(x) = 0$ ise denkleme, Homojen Dif. Denklem denir.

1- İntegrasyon Çarpanı ile Çözüm.

$$(P(x)y - Q(x))dx + dy = 0$$

$$\underbrace{\lambda(P(x)y - Q(x))}_{P_1} dx + \underbrace{\lambda dy}_{Q_1} = 0$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} \quad \text{Tam Dif. olma şartı}$$

$$\lambda P(x) = \lambda' \Rightarrow \int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int P(x) dx$$

$\lambda = e^{\int P(x) dx}$

 int. çarpanı

Örnek: $y' - y \cot x = \sin x$ Dif. Denkleminin
genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $(\sin x + y \cot x) dx - dy = 0$
(1.706)

$$\lambda = e^{-\int \cot x dx} = e^{-\ln \sin x} = \frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$$

$$\underbrace{\left(1 + y \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)}_{P_1} dx - \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{Q_1} dy = 0$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\cos x}{\sin^2 x} ; \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

Tan Dif. Denklemleri.

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + y \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{\sin x}$$

$$(2) \text{ den } \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = -\frac{1}{\sin x} y$$

$$f = -\frac{y}{\sin x} + g(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y \cos x}{\sin^2 x} + g'(x)$$

$$1 + \frac{y \cos x}{\sin^2 x} = \frac{y \cos x}{\sin^2 x} + g'(x)$$

$$f'(x) = 1$$

$$\boxed{f(x) = x + K}$$

$$U = f(x, y) = -\frac{y}{\sin x} + x + K$$

$U = C$: Genel çözüm

$$\boxed{-\frac{y}{\sin x} + x = C} \quad (C = C - K)$$

veya

$$\boxed{y = (x + C^*) \sin x} \quad (C^* = -C)$$

bulunur.

~~Cözüm:~~
(2. Yol)

$$y' - y \cot x = \sin x$$

$$\lambda = \frac{1}{\sin x} \text{ olur.}$$

$$\frac{y'}{\sin x} - \frac{y \cos x}{\sin^2 x} = 1 \text{ olur.}$$

$$\frac{\sin x \cdot y' - y \cos x}{\sin^2 x} = 1$$

$$(y/\sin x)' = 1$$

2. Yol $y' + p(x)y = q(x)$ şeklindeki bir lineer
Dif. Denklemin bir $\lambda = \lambda(x)$ fonksiyonu ile çarpılırsa,

$$\lambda y' + \lambda p(x)y = \lambda q(x) \text{ olur.}$$

$$\rightarrow (\lambda y)'$$

$$(\lambda y)' = \lambda' y + \lambda y' \text{ dir.}$$

$$\cancel{\lambda' y} + \lambda y' = \cancel{\lambda y' + \lambda p(x)y}$$

$$\cancel{\lambda' y} = \cancel{\lambda p(x)y}$$

$$\lambda' = \frac{d\lambda}{dx}$$

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int p(x) dx$$

$$\ln \lambda = \int p(x) dx$$

$$\lambda = e^{\int p(x) dx}$$

İntegrasyon Çarpanı

$$(e^{\int p(x) dx} y)' = \lambda q(x) e^{\int p(x) dx} \Rightarrow d(e^{\int p(x) dx} y) = \lambda q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C$$

$$y = e^{-\int p(x) dx} \cdot \int \lambda q(x) e^{\int p(x) dx} dx$$

Genel çözüm
bulunur.

$$+ C e^{-\int p(x) dx}$$