

-10-

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^3} dx \quad \begin{array}{l} \ln x = u \\ \frac{1}{x^3} dx = dv \\ \frac{1}{x} dx = du \\ -\frac{1}{2x^2} = v \end{array}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \ln x \Big|_1^b + \int_1^b \underbrace{\frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x}}_{-\frac{1}{4x^2}} dx \right]$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2b^2} \ln b + \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4} \right]$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln b}{2b^2} \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{\frac{1}{b}}{4b} = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{4b^2} = 0$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

Örnek: $\int_8^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}} dx$

$$x > 0; \quad \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}} > \frac{x}{\sqrt{x^4-x}} > \frac{x}{\sqrt{x^4}} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

$$\int_8^{\infty} \frac{1}{x} dx \text{ iraksaktır.} \quad \int_8^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}} dx \text{ 'de iraksaktır.}$$

Genelleştirilmiş İntegraler için yakınsaklık ve ıraksaklık testleri

① Doğrudan Karşılaştırma Testi

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $[a, \infty)$ aralığında sürekli ve her $x \geq a$ için $0 \leq f(x) \leq g(x)$ olsun. Bu durumda,

① Eğer $\int_a^{\infty} g(x) dx$ yakınsak ise $\int_a^{\infty} f(x) dx$ de yakınsaktır.

② Eğer $\int_a^{\infty} f(x) dx$ ıraksak ise $\int_a^{\infty} g(x) dx$ de ıraksaktır.

Örnek : $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ integrali yakınsak mıdır?
ıraksak mıdır?

Örnek : $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ integrali yakınsak mıdır?
ıraksak mıdır?

Örnek : $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 0.1}} dx$ integrali yakınsak mıdır?
ıraksak mıdır?

Örnek 1. $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ integrali yakınsak mıdır?
yoksa ıraksak mıdır?

Çözüm : $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = e^{-x}$ olsun.

Dogrudan karsılastırma testine göre,

Her $x \geq 1$ için $0 < e^{-x^2} \leq e^{-x}$ olur.

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-x} \Big|_1^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-b} + e^{-1} = \lim_{b \rightarrow \infty} -\underbrace{\frac{1}{e^b}}_0 + \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \text{ olur}$$

0 halde $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$ integrali yakınsaktır.

$$\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx \leq \int_1^{\infty} e^{-x} dx \text{ olduğundan,}$$

$\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ integralide yakınsak olur.

-76-

Örnek 2. $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ integralinin yakınsak olup olmadığını test ediniz.

Çözüm: Her $x \geq 1$ için $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ dir.

$$0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \text{ olur.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{b} + 1 = 1 \text{ yakınsaktır.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \text{ olduğundan}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \text{ integralide yakınsak olur.}$$

↓
Doğrudan karşılaştırma Testine göre

-7C-

Örnek 3. $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-0.1}} dx$ integrali yakınsak

midir? yoksa ıraksak midir. Test ediniz.

Çözüm: Her $x \geq 1$ için $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x^2-0.1}}$ olur.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b - \ln 1 = \infty \text{ olur}$$

0 halde $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ integrali ıraksaktır.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx < \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-0.1}} dx \text{ olduğundan.}$$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-0.1}} dx$ integrali de ıraksak olacaktır.
Doğrudan Karşılaştırma Testine

② Limit Karşılaştırma Testi

$f(x)$ ve $g(x)$ $[a, \infty)$ aralığında pozitif ve sürekli fonksiyonlar ise

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < \infty$$

oluyorsa, $\int_a^{\infty} f(x) dx$ ve $\int_a^{\infty} g(x) dx$

integraleri birlikte yakınsak veya birlikte ıraksatırlar
(aynı karakterlerdedirler)

Örnek: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ integrali yakınsaktır mı?

$x \in [1, \infty)$ için $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ve $g(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonları pozitif sürekli fonksiyonlardır.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1 \text{ olur.}$$

$$\downarrow$$

$$L = 1 \quad \underline{\underline{0 < L < \infty}}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad (p \text{ integrali } p=2>1 \text{ yakınsaktır})$$

0 halde $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ integralinde yakınsaktır.

(Sonuç olarak her iki integralde aynı karakterdedir)

Örnek: $\int_2^{\infty} \frac{x}{x^{3/2}-1} dx$ integrali yakınsak mıdır?

$$f(x) = \frac{x}{x^{3/2}-1} \quad ~~\frac{x}{x^{3/2}-1}~~$$

$$f(x) = \frac{x}{x^{3/2}-1} > \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}} = g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^{3/2}-1}}{\frac{x}{x^{3/2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{3/2}}{x^{3/2}-1} = 1 \text{ olur.}$$

$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^{1/2}} dx = \infty$ ıraksaktır. 0 halde verilen integralde ıraksak olur. (Limit karşılaştırma Testine göre)

86-

$$\int_2^{\infty} \frac{x}{x^{3/2}-1} dx$$

İntegralin doğrudan karşılaştırmalı
Testi uygulanabilir.

$$f(x) = \frac{x}{x^{3/2}-1} > \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}} = g(x)$$

Her $x \geq 2$ için $0 < \frac{x}{x^{3/2}} < \frac{x}{x^{3/2}-1}$ olur.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^{1/2}} dx = \infty \text{ ıraksaktır.}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{x}{x^{3/2}-1} dx \text{ integrali daha büyük olacaktır}$$

ıraksak olacaktır.

-8c-

örnek: $\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{1+\sin^2 x}{x^4} dx$ integralinin

Karakterini belirleyiniz.

Çözüm:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ dir.}$$

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1$$

$$1 \leq 1+\sin^2 x \leq 2$$

$$\frac{1}{x^4} \leq \frac{1+\sin^2 x}{x^4} \leq \frac{2}{x^4} \text{ olur.}$$

$$\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{2}{x^4} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\pi/2}^b \frac{2}{x^4} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{-2}{3x^3} \right|_{\pi/2}^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \underbrace{-\frac{2}{3b^3}}_0 + \frac{2}{\frac{3\pi^3}{8}} = \frac{16}{3\pi^3} \text{ yakınsaktır.}$$

0 halde $\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{1+\sin^2 x}{x^4} dx$ integrali daha küçük

değere sahip olduğundan yakınsak olacaktır.

Ödev: 1) $\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x - 2^x} dx$ integralinin karakteri
belirleyiniz.

2) $\int_2^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4 - 1}} dx$ integralinin karakteri
belirleyiniz.

3) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \ln x}$ integralinin karakteri
belirleyiniz.

-3-
Örnekler

- 1) $\int_1^{\infty} \frac{1+\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^3} dx$ integralinin yakınsak veya ıraksak olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm:

$$\frac{1+\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^3} < \frac{2}{\sqrt{x}+x^3} < \frac{2}{x^3} \quad \text{olur. } x \in [1, \infty) \text{ için}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{2}{x^3} dx \quad p \text{ integralidir. } p=3 > 1 \text{ yakınsaktır.}$$

0 halde $\int_1^{\infty} \frac{1+\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^3} dx$ integralide yakınsaktır.

- 2) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$ integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz. ~~yakınsak olup~~
(Eğer yakınsak ise sonucunu bulunuz)

$$\frac{\ln x}{x^3} < \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \quad x \in [1, \infty) \text{ için}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad p=2 > 1 \text{ yakınsaktır. } \left(\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \right)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx \text{ integralide yakınsaktır.}$$