

Basit Teknikler

1) Bilinmeyen fonksiyonun kısmi türevi bir fonksiyona eşitse bu denklem, doğrudan integral alınarak çözülür.

Örnek: $\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + y^2$

Örnek: $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = x^3 - y$

Örnek: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y \sec^2 x + e^x + 2e^y$

2) KDD, sadece bağımsız değişkenlerden birine göre kısmi türev içeriyorsa, bu denklemi Adı Dif. Denklem olarak görmeye alıp çözüm yaparız.

Örneği: $u_{xx} + cu = 0$ KDD'nin genel çözümünü $c > 0$, $c = 0$ ve $c < 0$ için belirler.

$u = u(x, t) = ?$

-12.

Örnek: $u_{yy} + u_y = x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Örnek: $y \cdot u_y + u = x$

Örnek: $u_x + 2xy = 4xy$

Örnek: $y \cdot u_{xy} + 2u_x = x$

Örnek: $u_{yy} - x^2 u = 0$

Örnek: $xy^3 z_x + x^2 y^3 z = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \cos y$

Birinci mertebeden Lineer KDD'ler.

$$A(x,y) z_x + B(x,y) z_y + C(x,y) z = D(x,y) \quad (1)$$

$$L = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C \quad : \text{Lineer operatör} \quad (2)$$

$$Lz = D(x,y) \quad (3)$$

L operatörü C_1, C_2 keyfi sabitler f, g keyfi fonk. olmak üzere,

$$L(C_1 f + C_2 g) = C_1 L(f) + C_2 L(g) \quad \text{Lineerlik}$$

koşulunu sağlar.

$Lz = 0$ ise denkleme Homojen denklem denir.

Tanım: (1) denklemini sağlayan en az birinci mertebe türevleri sürekli olan $z = \varphi(x,y)$ fonksiyonuna (1) denkleminin bir integral yüzeyi denir.

Örnek: $xy^3 z_x + x^2 y^3 z = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos y$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Sonuç: $z = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[\frac{\cos y}{y^3} \ln x + f(y) \right], x \neq 0, y \neq 0.$

Örnek: $z_{xx} + 4z = 5e^x$

Birinci mertebeden genel lineer KOD'da her iki türevin bulunması halini inceleyelim.

$$A(x,y) z_x + B(x,y) z_y + C(x,y) z = D(x,y)$$

denkleminde ;

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{array} \right\} \text{dönüşümünü uygulayalım.}$$

$$\text{Burada ; } J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0 \text{ dir. Yani } J \neq 0 \text{ dir}$$

$$z_x = z_\xi \cdot \xi_x + z_\eta \cdot \eta_x$$

$$z_y = z_\xi \cdot \xi_y + z_\eta \cdot \eta_y$$

dönüşümünü denkleme yerine yerarsak,

$$A(z_{\xi} \xi_x + z_{\eta} \eta_x) + B(z_{\xi} \xi_y + z_{\eta} \eta_y) + Cz = D$$

$$(A\xi_x + B\xi_y)z_{\xi} + (A\eta_x + B\eta_y)z_{\eta} + Cz = D$$

z_{η} 'nin katsayısını sıfır olarak seçersek,

$$A\eta_x + B\eta_y = 0$$

$$\boxed{\frac{\eta_x}{\eta_y} = -\frac{B}{A}} \text{ olur. } \eta_y \neq 0 \text{ dir.}$$

$\eta = \psi(x, y) = a$ (a : sabit) olsun.

$$d\eta = \eta_x dx + \eta_y dy = 0 \text{ olur. Buradan;}$$

$$\boxed{\frac{\eta_x}{\eta_y} = -\frac{dy}{dx}} \text{ olur. Buradan;}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}} \text{ olacaktır. Bu bir Adi Diferansiyel denklemdir. Bu denkleme karakteristiği}$$

denklemdir. Bu denklem çözülerek $\psi(x, y) = a$ karakteristiği bulunur. Yani $\eta = \psi(x, y)$ olur.

$\xi = \varphi(x, y)$ karakteristiği ile $\eta = \psi(x, y)$ ile
linear bağımsız olarak şekilde keyfi olarak
seçilir. Basit olması bakımından çoğu zaman
 $\xi = \varphi(x, y) = x$ (veya $\xi = \varphi(x, y) = y$) olarak
seçilir.

Böylece (1) denkleme;

$$\xi = x, \eta = \psi(x, y), J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

denklemi yazılırsa, Denklem,

$$A^* \xi + C^* \eta = D^*$$

şekline dönüşür. Bu denklem görüldüğü gibi
sadece bir denkleme göre fonksiyon içermektedir.
Bu denklem çözülerek Genel Çözüm bulunur.

Örnek: $xyz_x - x^2z_y + yz = 0$ KOD'un
genel çözümünü bulunuz.

Sonuç: $z = \frac{f(x^2 + y^2)}{x}, x \neq 0.$

Örnek: $4xP - 8yQ + 4Z = x \cos x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Sonuç: $Z = \frac{1}{4} \sin x + \frac{\cos x}{4x} + \frac{f(x^2y)}{x}, x \neq 0$

örnek: $(2xy^3 - x^4)Z_x + (2y^4 - x^3y)Z_y + 2(2y^3 - x^3)Z = x + y^2$

denklemini çözünüz.

örnek: $xZ_x + (x+y)Z_y + Z = x \ln x$

denklemini çözünüz.