

ANALİZ II

Kaynaklar

Caşkan Güler
cguler720@gmail.com

1) Thomas Calculus . Cilt I
George B. Thomas

2) Analiz I (veya Matematik 2)
Mustafa Balcı

3) Çözümlü Yüksek Matematik Problemleri
Cevdet Cerit
Konular

- 1) Belirsiz İntegral, Tanım ve Özellikler
- 2) Yerine Koyma Metodu, Kısmi İntegrasyon
- 3) Trigonometrik İntegraller
- 4) Ters Dönüşümler, Rasyonel Cebirsel Kesirlerin İntegralleri
- 5) $\tan \frac{x}{2} = u$ dönüşümü ($\tan x = u$ dönüşümü) ile çözülebilen İntegraller
Belirli İntegral, Riemann Teoremleri

- 6) Belirli integral ile Alan Hesabı
- 7) Genelleştirilmiş (İmproper) integralleri
- 8) Genelleştirilmiş (İmproper) integralleri için yakınsaklık Testleri
- 9) Seriler, Özel Seriler, Yakınsaklık Testleri
- 10) Yakınsaklık Testleri, Alternan Seriler, şartlı ve Mutlak yakınsaklık
- 11) Kuşvet Serileri, Taylor, Maclaurin Serileri
- 12) Serilerle ilgili işlemler
- 13) Yay Uzunluğu, Hacim Hesabı
- 14) Hacim Hesabı, Dönel yüzey alanlarının hesaplanması

Diferansiyel

$y=f(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli
 $dy=f'(x)dx$ dir.

Örnek: $y=(x^2-1).e^{x^2}$ ise $dy=?$

$$dy=(2x.e^{x^2}+2x.e^{x^2}.(x^2-1))dx$$

$$dy=2x^3e^{x^2}dx$$

örnek: $y=\ln(\tan x)$ ise $dy=?$

$$dy=\frac{1+\tan^2 x}{\tan x} dx = \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx = \frac{1}{\sin x \cos x} dx$$

$$= \frac{2}{\sin 2x} dx$$

örnek: $y=x \arctan x$ ise $dy=?$

$$dy=\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) dx$$

Belirsiz İntegral

$dy = f'(x)dx$ veya $y' = f'(x)$ ifadelerini gözönüne alalım. $f'(x)$ ifadesi biliniyorken, $f(x)$ 'i (ilkel fonksiyona) bulma işkenine İntegral denir. Yani İntegral diferansiyelin (türevin) tersi den bir işlemdir. Ters türev de denir.

$$2x dx \Rightarrow x^2$$

$$\cos x dx \Rightarrow \sin x$$

$$e^x dx \Rightarrow e^x$$

$$\sec^2 x dx \Rightarrow \tan x$$

$$f(x) dx \Rightarrow F(x) \text{ işlemi}$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C \text{ şeklinde ifade ederiz.}$$

Burada C keyfi sabittir.

$F(x)$ 'e $f(x)$ 'in belirsiz integrali denir.

-5-

Bir $f'(x)$ türev fonksiyonunun birbirinden bir sabit kadar farklı sonsuz sayıda ilkel fonksiyonu olacaktır. Örneğin,

$$\begin{array}{ll} f(x) = 5x^2 + 3 & \text{ise } f'(x) = 10x \\ f(x) = 5x^2 + 7 & \text{ise } f'(x) = 10x \\ f(x) = 5x^2 & \text{ise } f'(x) = 10x \\ \vdots & \end{array}$$

Görüldüğü gibi türevleri aynı olmasına karşılık fonksiyonlar birbirinden farklıdır. İşte bu sonsuz çözümü ifade edebilmek için belirsiz integralin çözümünde bir C sabiti ekleriz.

İntegral Alma Kuralları

1. $\int (f_1(x) + f_2(x) + \dots) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots$
2. $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$

3. Bir diferansiyel ifadesinin integrali, diferansiyeldeki değişkenden ibarettir.

$$\int dF(x) = F(x) + C \text{ dir.}$$

4. $I = \int f(t) dx = f(t) \int dx$ dir.
 $f(t)$ sabit durumdadır.

Bilmesi gereken integraller.

$$1) \int dx = x + C \quad ; \quad \int df(x) = f(x) + C$$

$$2) \int a dx = a \int dx$$

$$3) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$4) \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$5) \int e^x dx = e^x + C \quad ; \quad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$6) \int \sin x dx = -\cos x + C \quad ; \quad \int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C$$

- 7) $\int \cos x dx = \sin x + C$; $\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + C$
- 8) $\int \tan ax dx = \frac{1}{a} \ln(\sec ax) + C$
- 9) $\int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln(\sin ax) + C$
- 10) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
- 11) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
- 12) $\int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + C$
- 13) $\int \csc x \cdot \cot x dx = -\csc x + C$
- 14) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
- 15) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C$
- 16) $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}} + C$
 tam kare yapılır.
- 17) $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx$: paydanın türevi pay kısmında oluşturulur.

-8-

$$18) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (x = a \sin t)$$

$$19) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C \quad (x = a \tan t)$$

$$20) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C \quad (x = a \sec t)$$

$$21) \int \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x) + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \tanh x dx = \ln(\cosh x) + C$$

$$\int \coth x dx = \ln(\sinh x) + C$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$22) \int \operatorname{cosec} x dx = \ln(\operatorname{cosec} x - \cot x) + C$$

Yerme Koyma Metodu (Basit integraler)

Örnekler

1) $\int (x^2+5x-1)^4 (2x+5) dx = ?$
 $x^2+5x-1 = t$ dersek (dönüşümünü yaparsak)
 $(2x+5) dx = dt$ olur.

$$\int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{5} (x^2+5x-1)^5 + C$$

2) $\int \sqrt{2x+1} dx = ?$
 $2x+1 = t$ dersek
 $2dx = dt$ olur.

$$\frac{1}{2} \int \sqrt{t} \cdot dt = \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 3t^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= 3 \cdot (2x+1)^{\frac{3}{2}} + C \quad \checkmark$$

$$= 3 \sqrt{(2x+1)^3} + C$$

$$3) I = \int \cos(3x+1) dx = ?$$

$$4) I = \int x^2 \sin(x^3) dx = ?$$

$$5) \int x \cdot \sqrt{x^2+1} dx = ?$$

$$6) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}} = ?$$

$$7) \int \frac{\ln x}{x} dx = ?$$

$$8) \int x^2 e^{x^3} dx = ?$$

$$9) \int \tan^2 x \cdot \sec^2 x dx = ?$$

$$10) \int \frac{\sec x \cdot \tan x}{\sqrt{\sec x}} dx = ?$$

$$11) \int \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx = ?$$

$$12) \int x \cdot (x-1)^9 dx = ?$$

$$13) \int e^x \cdot \tan^2(e^x) dx = ?$$

$$14) \int \frac{2^x}{4^x + 1} dx = ?$$

$$15) \int \frac{dx}{e^x + 1} = ?$$

$$16) \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = ? \quad x = a \cos t$$

$$17) \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = ?$$

$$18) \int \frac{5-4x^2}{3+2x} dx = ?$$

$$19) \int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx = ?$$

$$20) \int \frac{x+2}{x+3} dx = ?$$

$$21) \int \frac{dx}{x \cdot (2 + \ln x)} = ?$$

$$22) \int \frac{2+\ln x}{x} dx = ?$$

$$23) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = ?$$

$$24) \int \frac{dx}{(1+x^2) \arctan x} = ?$$

$$25) \int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx = ?$$

$$26) \int \frac{dx}{1+\cos x} = ?$$

$$27) \int \cos x \cdot \sqrt{4+\sin x} dx = ?$$

$$28) \int |x| dx = \begin{cases} \int x dx, & x \geq 0 \\ \int -x dx, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C, & x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 + C, & x < 0 \end{cases}$$

$$29) \int \frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$$

$$30) \int \frac{\tan x}{\sqrt{\sec x}} dx = ?$$

$\sec x = t^2$ dersek.
 $\sec x \cdot \tan x dx = 2t dt$
 olur.

1. Yol

(E-1)

Örnek:

$$\int \cos^6 x \sin x dx$$

$$\cos x = u$$

$$-\sin x dx = du$$

$$\Rightarrow \int u^5 du = -\frac{u^6}{6} + C = -\frac{1}{6} \cos^6 x + C \quad (*)$$

2. Yol $\int \cos^6 x \sin x dx = \int \cos^4 x \cdot \cos x \cdot \sin x dx$

$$= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \sin x \cdot \cos x dx$$

$$\sin x = u$$

$$\cos x dx = du$$

$$= \int (1 - u^2)^2 \cdot u du = \int (1 - 2u^2 + u^4) u du$$

$$= \frac{u^6}{6} - \frac{2u^4}{4} + \frac{u^6}{6} + C$$

$$= \frac{1}{6} \sin^6 x - \frac{1}{2} \sin^4 x + \frac{1}{6} \sin^6 x + C \quad (**)$$

(*) ve (**) ^{kayfi} Sabit farkıyla birbirine eşit.

Yani ikisinin türevleri $\cos^5 x \sin x$ dir.

Sonuç olarak ikisi de doğrudur.

(**) dan (*)'ın farkı 2. sayfada görülmektedir

Ex-2

$$= \sin^2 x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{6} \sin^4 x \right) + C$$

$$= \sin^2 x \left(\frac{1 - \sin^2 x}{2} + \frac{1}{6} \sin^4 x \right) + C$$

$$= \sin^2 x \left(\frac{\cos^2 x}{2} + \frac{\sin^4 x}{6} \right) + C$$

$$= \sin^2 x \left(\frac{\cos^2 x}{2} + \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{6} \right) + C$$

$$= \sin^2 x \left(\frac{\cos^2 x}{2} + \frac{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x}{6} \right) + C$$

$$= \sin^2 x \left(\frac{3\cos^2 x + 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x}{6} \right) + C$$

$$= \sin^2 x \left(\frac{\cos^4 x + \cos^2 x + 1}{6} \right) + C$$

$$= \frac{1}{6} (1 - \cos^2 x) (\cos^4 x + \cos^2 x + 1) + C$$

$$= \frac{1}{6} [\cancel{\cos^4 x} + \cancel{\cos^2 x} + 1 - \cos^6 x - \cancel{\cos^4 x} - \cancel{\cos^2 x}] + C$$

$$= \frac{1}{6} [1 - \cos^6 x] + C = -\frac{1}{6} \cos^6 x + \frac{1}{6} + C \quad \text{Sabit}$$

$$= -\frac{1}{6} \cos^6 x + C$$