

 YTÜ – Kimya-Metalürji Fakültesi Sınavı Soru ve Cevap Kâğıdı	NOT TABLOSU							
	Soru 1						Not Toplamı	
Adı Soyadı								
Öğrenci Numarası								
Bölümü							Sınav Tarihi	21/04/2022
Dersin Adı	Analiz-II- Ara sınav	Grup No		Sınav Süresi	90 dk	Sınav Yeri		
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı	Prof. Dr. Coşkun GÜLER						İmza	
YÖK'nün 2547 sayılı Kanunun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.								

CEVAP ANAHTARI

Soru 1-a) (18 puan)

$$I_n = \int x^n \cos x dx$$

integrali için bir rekürans (indirgeme) formülü bulunuz. Bulduğunuz formülü kullanarak I_3 ü hesaplayınız.

Soru 1-b) (17 puan)

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{6x - x^2}} = ?$$

1-a) $I_n = \int x^n \cos x dx$

$$\left[\begin{array}{l} u = x^n \Rightarrow du = n \cdot x^{n-1} dx \\ \cos x dx = dv \Rightarrow \sin x = v \end{array} \right]$$

$$I_n = \int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n \int \sin x \cdot x^{n-1} dx$$

$$\left[\begin{array}{l} x^{n-1} = u \Rightarrow (n-1) x^{n-2} dx = du \\ \sin x dx = dv \Rightarrow -\cos x = v \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} &= x^n \sin x - n \left[-x^{n-1} \cos x + \int \cos x (n-1) x^{n-2} dx \right] \\ &= x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1) \int \cos x \cdot x^{n-2} dx \\ &= x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1) I_{n-2} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6 I_1 + C \\ &= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6 \left[\int x \cos x dx \right] + C \\ &= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6 [x \sin x + \cos x] + C \\ &= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + C \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx \\ u = x \Rightarrow du = dx \\ \cos x dx = dv \Rightarrow \sin x = v \\ \Rightarrow \\ \int x \cos x dx = x \sin x + \cos x \end{array} \right]$$

$$1-b) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{6x-x^2}} = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-(x-3)^2}} \quad \left[\begin{array}{l} x-3 = 3\sin t \\ dx = 3\cos t dt \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{(3+3\sin t)^2 3\cos t dt}{\sqrt{9-9\sin^2 t}}$$

$$= \int \frac{(3+3\sin t)^2 3\cos t dt}{3\sqrt{1-\sin^2 t}}$$

$$= \int \frac{(3+3\sin t)^2 3\cos t dt}{3\cos t}$$

$$= \int 9(1+\sin t)^2 dt$$

$$= 9 \left[\int (1+2\sin t+\sin^2 t) dt \right]$$

$$\left[\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2} \right]$$

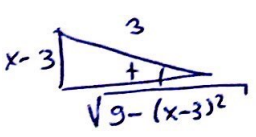
$$= 9 \int dt + 18 \int \sin t dt + 9 \int \sin^2 t dt$$

$$= 9t - 18\cos t + 9 \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt$$

$$= 9t - 18\cos t + \frac{9}{2}t - \frac{9}{4}\sin 2t + C$$

$$= \frac{27t}{2} - 18\cos t - \frac{9}{4}\sin 2t + C$$

$$= \frac{27}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right) - \frac{18\sqrt{9-(x-3)^2}}{3} - \frac{9}{4} \cdot 2 \cdot \frac{x-3}{3} \cdot \frac{\sqrt{9-(x-3)^2}}{3} + C$$

$$\sin t = \frac{x-3}{3}$$


$$t = \arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right)$$

$$= \frac{27}{2} \arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right) - 6\sqrt{9-(x-3)^2} - \frac{x-3}{2} \sqrt{9-(x-3)^2} + C$$

	YTÜ – Kimya-Metalürji Fakültesi		NOT TABLOSU					
	Sınavı Soru ve Cevap Kâğıdı		Soru 2				Not Toplamı	
Adı Soyadı								
Öğrenci Numarası								
Bölümü						Sınav Tarihi	21/04/2022	
Dersin Adı	Analiz-II- Ara sınav		Grup No		Sınav Süresi	90 dk	Sınav Yeri	
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı	Prof. Dr. Coşkun GÜLER					İmza		
YÖK'nün 2547 sayılı Kanunun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fılı işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.								

CEVAP ANAHTARI

Soru 2-a) (18 puan)

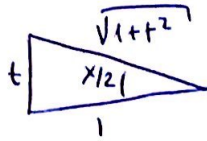
$$\int \frac{dx}{1 - 2\sin x - \cos x} = ?$$

Soru 2-b) (17 puan)

$$\int \frac{x^2 - x + 2}{x(x-1)^2} dx = ?$$

$$2-a) \int \frac{dx}{1 - 2\sin x - \cos x} = \int \frac{2}{1+t^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt$$

$$\left[\begin{aligned} \tan \frac{x}{2} = t &\Rightarrow dx = \frac{2 dt}{1+t^2} \\ \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} &= 2 \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} &= \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \frac{x}{2} = \arctan t & \\ x = 2 \arctan t & \\ dx = \frac{2 dt}{1+t^2} & \end{aligned} \right]$$



$$\begin{aligned} &= \int \frac{2 dt}{1+t^2-4t-1+t^2} \\ &= \int \frac{2 dt}{2t^2-4t} = \int \frac{dt}{t^2-2t} \\ &= \int \frac{dt}{t(t-2)} \\ &= \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} \right) dt \\ &= \int \left[-\frac{1}{2t} + \frac{1}{2(t-2)} \right] dt \\ &= -\frac{1}{2} \ln |t| + \frac{1}{2} \ln |t-2| + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln |\tan \frac{x}{2}| + \frac{1}{2} \ln |\tan \frac{x}{2} - 2| + C \end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} &= \frac{A(t-2)+Bt}{t(t-2)} \\ A+tB &= 0 \Rightarrow A+B=0 \\ -2A &= 1 \\ A &= -\frac{1}{2} \\ B &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right]$$

$$2-b) \int \frac{x^2 - x + 2}{x(x-1)^2} dx$$

Basit Kesirler Ayırma Yöntemi ile

$$\frac{x^2 - x + 2}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx = A(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 - x) + Cx$$

$$= (A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B+C=-1 \\ A=2 \end{cases} \quad \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \\ C=2 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2 - x + 2}{x(x-1)^2} dx = \int \frac{2}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx$$

$$= 2\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C$$

$$\left[\begin{array}{l} x-1=u \\ dx=du \\ \int \frac{du}{u^2} = -u^{-1} + C \\ = -\frac{1}{x-1} + C \end{array} \right]$$

 YTÜ – Kimya Metalürji Fakültesi Sınavı Soru ve Cevap Kâğıdı	NOT TABLOSU						
	Soru 3				Not Toplamı		
Adı Soyadı							
Öğrenci Numarası							
Bölümü						Sınav Tarihi	21/04/2022
Dersin Adı	Analiz-II- Ara sınav	Grup No		Sınav Süresi	90 dk	Sınav Yeri	
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı	Prof. Dr. Coşkun GÜLER					İmza	
YÖK'nün 2547 sayılı Kanunun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fahi işleyenler bir veya iki yıl için uzaklaştırma cezası alırlar.							

CEVAP ANAHTARI

Soru 3-a) (15 puan)

$$\int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx$$

integralini üst Riemann toplamlarını kullanarak hesaplayınız.

Soru 3-b) (15 puan)

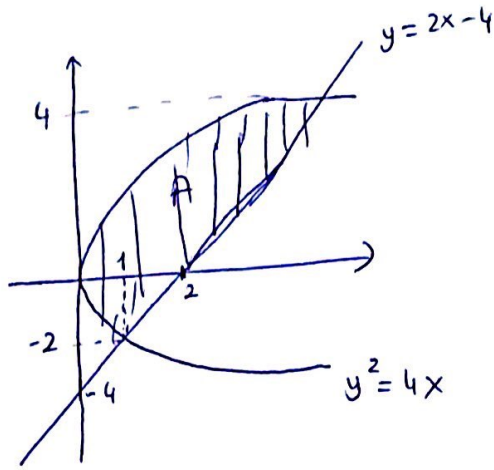
$y^2 = 4x$ ve $y = 2x - 4$ eğrileri veriliyor. Bu eğriler tarafından sınırlanan bölgenin alanını,

- x - eksenine göre hesaplayarak bulunuz. (Bölgeyi çizerek gösteriniz.)
- y - eksenine göre hesaplayarak bulunuz. (Bölgeyi çizerek gösteriniz.)

3-a) Üst Riemann toplamlarını kullanarak

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(0 + \frac{(i-1)}{n}\right) \right\} \quad f(x) = x^2 - 3x + 2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{(i-1)}{n}\right)^2 - \frac{3(i-1)}{n} + 2 \right] \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \left[i^2 - 2i + 1 \right] - \frac{3}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2 \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2 \cdot n(n+1)}{2} + n \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} \left[\frac{n(n+1)}{2} - n \right] + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot 2n \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \\
 &= \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

3-b) $y^2 = 4x$, $y = 2x - 4$



Ortak kesim noktaları için

$$y^2 = 2y + 8$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$y_1 = 4, y_2 = -2$$

i) x-eksenine göre hesaplırsak

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 2\sqrt{x} \, dx + \int_1^4 [2\sqrt{x} - (2x - 4)] \, dx \\ &= 4 \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 + \frac{4}{3} x^{3/2} \Big|_1^4 - x^2 \Big|_1^4 + 4x \Big|_1^4 \\ &= 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \cdot [2^{2 \cdot \frac{3}{2}} - 1] - (16 - 1) + 4(16 - 1) \\ &= \frac{8}{3} + \frac{28}{3} - 15 + 12 = \frac{36}{3} - 15 + 12 = 12 - 15 + 12 = 9 \end{aligned}$$

ii) y-eksenine göre hesaplırsak

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^4 \left(\frac{y}{2} + 2 - \frac{y^2}{4} \right) dy \\ &= \frac{y^2}{4} + 2y - \frac{y^3}{12} \Big|_{-2}^4 \\ &= \left[\frac{16}{4} + 8 - \frac{16 \cdot 4}{12} - \left(\frac{4}{4} - 4 + \frac{8}{12} \right) \right] \\ &= 4 + 8 - \frac{16}{3} - 1 + 4 - \frac{2}{3} \\ &= 15 - 6 \\ &= 9 \end{aligned}$$