

İndirgeme Formülü (Rekürans bağıntısı)

Örnek: $I_n = \int x^n e^x dx = ?$ $n \geq 1$ tam sayı

$$I_0 = \int e^x dx = e^x$$

$$I_n = x^n e^x - n \underbrace{\int x^{n-1} e^x dx}_{I_{n-1}} \quad \begin{array}{l} x^n = u, \quad e^x dx = dv \\ n \cdot x^{n-1} dx = du \quad e^x = v \end{array}$$

$$\boxed{I_n = x^n e^x - n I_{n-1}} \quad \begin{array}{l} n \geq 1 \text{ için} \\ \text{"İndirgeme Formülü"} \end{array}$$

$$I_2 = \int x^2 e^x dx = ? \quad I_0 = \int e^x dx = e^x$$

$$I_1 = x e^x - I_0$$

$$I_2 = x^2 e^x - 2 I_1$$

$$\boxed{I_2 = x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + C} \quad \checkmark$$

Örnek: $I_n = \int \cos^n x dx = ?$ integrali için indirgeme formülü bulunuz. Bir sonuc tanıtılarak $I_3 = \int \cos^3 x dx = ?$ ve $I_4 = \int \cos^4 x dx = ?$ integrallemi hesaplayınız.

Çözüm: $I_n = \int \cos^n x dx$, $I_0 = \int dx = x + C$
 $I_1 = \int \cos x dx = \sin x + C$
 $I_n = \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x dx$

$$\cos^{n-1} x = u \quad \cos x dx = dv$$

$$-(n-1) \cdot \cos^{n-2} x \cdot \sin x dx = du \quad \sin x = v$$

$$I_n = uv - \int v du$$

$$I_n = \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x dx \quad (\sin^2 x = 1 - \cos^2 x)$$

$$I_n = \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \underbrace{\int \cos^{n-2} x dx}_{I_{n-2}} - (n-1) \underbrace{\int \cos^n x dx}_{I_n}$$

$$n I_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2}$$

$$\boxed{I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} + C, \quad n \geq 2 \text{ için}}$$

-11-

$$I_3 = \int \cos^3 x dx, \quad I_0 = x$$
$$I_1 = \sin x$$

$$I_3 = \frac{1}{3} \cos^2 x \cdot \sin x + \frac{2}{3} I_1 + C$$

$$I_3 = \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \sin x + C$$

$$I_4 = \int \cos^4 x dx, \quad I_0 = x$$
$$I_1 = \sin x$$

$$I_4 = \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{4} I_2 + C$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} I_0 + C$$

$$I_4 = \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} x \right) + C$$

Örnek: $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = ?$ $n \geq 2$ tamsayı

Örnek: $I_n = \int (\ln x)^n dx = ?$ $n \geq 1$ tamsayı

örnek: $I = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = ?$

örnek: $I = \int x (\ln x)^3 dx = ?$

örnek: $I = \int x e^{\sqrt{x}} dx = ?$ $(\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx = ?)$

örnek: $I = \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = ?$

örnek: $I_n = \int \sec^n x dx = ?$ $n \geq 3$ tam $I_6 = ?$
 $I_7 = ?$

örnek: $I = \int (\arcsin x)^2 dx = ?$

Örnek: $\int x \sec^2 x dx = ?$

Örnek: $\int x \sin^2 x dx = ?$

Örnek: $\int \cos(\ln x) dx = ?$ ($\int \sin(\ln x) dx = ?$)

Trigonometrik İntegraller

1) $I = \int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$, $m, n \geq 0$ tam sayı.

Örnek: $\int \sin^3 x \cos^2 x dx = ?$

$$= \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \cdot \sin x dx$$

$\cos x = t$ dersek
 $-\sin x dx = dt$ olur

$$= - \int (1 - t^2) \cdot t^2 dt = - \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right] + C$$

$$= \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C$$

Örnek: $I = \int \cos^5 x \, dx = ?$

Örnek: $I = \int \sin^4 x \, dx = ?$

$$\left\{ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \right.$$

Kuvvet çift olduğunda formüllerinden yararlanır.

$$\cos^2 ax = \frac{1 + \cos 2ax}{2}, \sin^2 ax = \frac{1 - \cos 2ax}{2}$$

Örnek: $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx = ?$

Örnek: $\int \sqrt{1 + \cos 4x} \cdot \sin^3 4x \, dx = ?$

Örnek: $\int \sqrt{1 + \cos 4x} \, dx = ?$

2) $\tan x$ ve $\sec x$ kuvvetlerinin integralleri

Örnekler

1) $\int \tan^4 x dx = ?$ 2) $\int \sec^4 x dx = ?$

3) $\int \sec^3 x dx = ?$ 4) $\int \sec^5 x dx = ?$

5) $\int \tan^2 x \cdot \sec^4 x dx = ?$

6) $\int \tan^3 x \cdot \sec^3 x dx = ?$

7) $\int \tan^2 x \cdot \sec x dx = ?$

8) $\int \tan x \cdot \sec^4 x dx = ?$

Not: $\sec^3 x, \sec^5 x, \dots$ kuvvet tek sayı olduğunda
($\csc^3 x, \csc^5 x, \dots$)

Kısmi integral kuralı uygulanır.

$$3) \int \sin ax \cdot \cos bx = ?$$

$$\int \sin ax \cdot \sin bx = ?$$

$$\int \cos ax \cdot \cos bx = ? \quad \underline{\text{integrallerin öğrenimi}}$$

Örnek: $\int \sin 3x \cdot \cos 5x dx = ?$

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$$

deşliklerden yararlanılır.