

$$3) \quad I = \int_0^2 \frac{dx}{x-1} = ? \quad (o)$$

$$4) \quad I = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = ?$$

$$5) \quad I = \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x} = ?$$

$$6) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = ?$$

$$7) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{1+x^4} = ?$$

Örnek : $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = ?$ (p testi) p integrali den

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \begin{cases} -\frac{1}{1-p} & ; p > 1 \text{ (yakınsaktır)} \\ \infty & ; p \leq 1 \text{ (ıraksaktır)} \end{cases}$$

İmproper İntegralleri (Genelleştirilmiş İntegraller)

1. Tip İmproper İntegralleri

$y = f(x)$ fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında tanımlı ve sürekli olsun. Bu durumda,

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \text{ olur.}$$

$y = f(x)$ fonksiyonu $(-\infty, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli olsun. Bu durumda,

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \text{ olur.}$$

$y = f(x)$ fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı ve sürekli olsun. Bu durumda,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx \text{ olur.}$$

Bu integrallere 1. tip improper integralleri denir.

(İntegralin sınırında veya her iki sınırında da $\pm$ Sonsuz varsa bu integrallere 1. tip improper integralleri denir.)

Not: Limit sonlu ise improper integrali yakınsaktır.
ve limit değeri improper integralin değeridir.
Eğer limit yoksa (veya sonsuza gidiyorsa) improper integrali iraksaktır.

Örnek: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = ?$

Çözüm:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$$

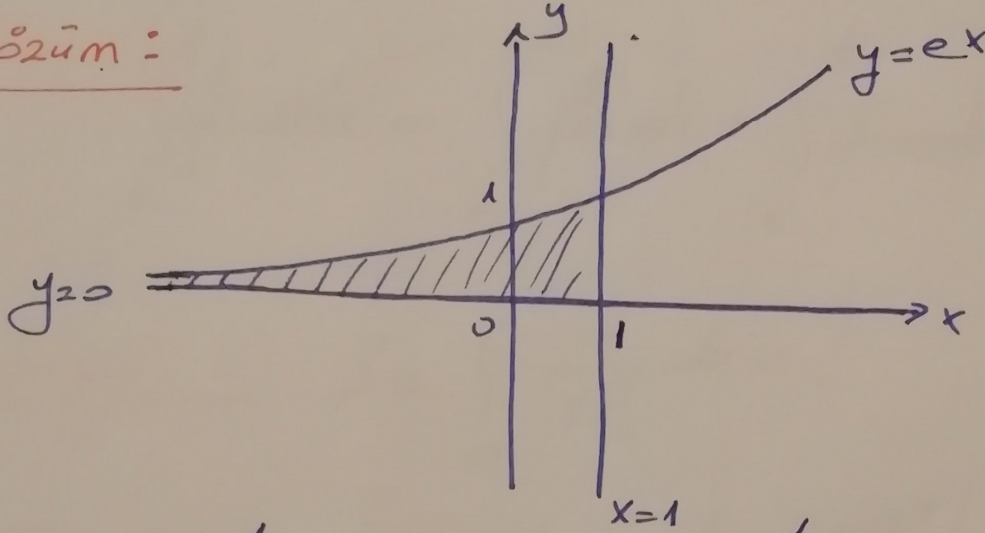
$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctan x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_0^b$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} [-\arctan a] + \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan b]$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi \text{ bulunur.}$$

Örnek: $y=e^x$ fonksiyonu ve $x=1, y=0$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm:



$$A = \int_{-\infty}^1 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^1 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} (e - e^a)$$

$A = e$ bulunur.

2. tip improper integralleri

- $y=f(x)$ fonksiyonu $(a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli ($x=a$ da sürekli) ise

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow a^+} \int_k^b f(x) dx \text{ dir.}$$

- $y=f(x)$ fonksiyonu $[a, b)$ aralığında tanımlı ve sürekli ($x=b$ de sürekli) ise

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow b^-} \int_a^k f(x) dx \text{ dir.}$$

- $y = f(x)$ fonksiyonu $[a, c)$, $(c, b]$ aralıklarında tanımlı ve sürekli olsun. ($x=c$ de süreksiz)

Bu durumda,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ olur.}$$

Örnek : $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = ?$

$$I = \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_k^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{k \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_k^1 = \lim_{k \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{k})$$

$\boxed{I = 2}$ olur. (Yakınsaktır)

Örnek : $I = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = ?$

$$I = \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_k^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{k \rightarrow 0^+} \ln|x| \Big|_k^1 = \lim_{k \rightarrow 0^+} -\ln|k|$$

$I = \infty$ olur. (İraksaktır)

Örnek: $I = \int_0^1 \ln x \, dx = ?$

$$I = \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_k^1 \ln x \, dx = \lim_{k \rightarrow 0^+} \left[x \cdot \ln |x| \Big|_k^1 - \int_k^1 x \cdot \frac{1}{x} \, dx \right]$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0^+} \left[\underbrace{-k \cdot \ln |k|}_{?(0)} - 1 + k \right] = -1 \text{ bulunur.}$$

$\lim_{k \rightarrow 0^+} -k \cdot \ln k = 0 \cdot \infty$ Belirsizliği

$$= \lim_{k \rightarrow 0^+} - \frac{\ln k}{\frac{1}{k}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Belirsizliği}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0^+} - \frac{\frac{1}{k}}{-\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow 0^+} k = 0 \text{ olur.}$$

Örnekler:

1) $I = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} \, dx = ? \quad (\pi)$

2) $I = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^2} = ? \quad \left(\frac{1}{\ln 2} \right)$

$$1) \quad I = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx = ?$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} \text{ fonksiyonu } 2x-x^2 > 0 \text{ için}$$

tanımlıdır. 0 halde $0 < x < 2$ aralığında tanımlıdır.

$$I = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$$

$$I = \lim_{a \rightarrow 0^+} \underbrace{\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx}_{I_1} + \lim_{b \rightarrow 2^-} \underbrace{\int_1^b \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx}_{I_2}$$

$$2x-x^2 = -(x^2-2x) = -[(x-1)^2-1] = 1-(x-1)^2$$

$$I_1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} dx \quad \begin{array}{l} x-1 = \sin t \text{ dersek} \\ dx = \cos t dt \text{ olur.} \end{array}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int \frac{\cos t dt}{\sqrt{1-\underbrace{\sin^2 t}_{\cos^2 t}}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} t \Big| = \lim_{a \rightarrow 0^+} \arcsin x$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \underbrace{\arcsin 0}_0 - \arcsin(a-1) = -\arcsin(-1) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{I_1 = \frac{\pi}{2}}$$

-56-

$$I_2 = \lim_{b \rightarrow 2^-} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$$

Benzer 1. kember yapılırsa,

$$I_2 = \lim_{b \rightarrow 2^-} \arcsin(x-1) \Big|_1^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow 2^-} \arcsin(b-1) - \underbrace{\arcsin 0}_0$$

$$= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{\pi}{2}}$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$I = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \text{ bulunur.}$$

$$2) I = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^2} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x (\ln x)^2 = ? \quad 0 \cdot \infty \text{ Belirsizliği var}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Belirsizliği}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\ln x) \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2(\ln x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-(-\infty)}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Belirsizliği}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0 \text{ olur. 0 halde}$$

Integral İmporper integraldır.

$$I = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{1/2} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

$$\ln x = t \text{ dersek} \\ \frac{1}{x} dx = dt \text{ olur.}$$

$$I = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int \frac{dt}{t^2} = \lim_{a \rightarrow 0^+} -\frac{1}{t} \Big| = \lim_{a \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\ln x} \Big|_a^{1/2}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\ln \frac{1}{2}} + \frac{1}{\underbrace{\ln a}_0} = \frac{1}{\ln 2} \text{ bulunur.}$$

-5d-

$$3) \quad I = \int_0^2 \frac{dx}{x-1} = ?$$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^2 \frac{dx}{x-1}$$

$$= \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{dx}{x-1} + \lim_{b \rightarrow 1^+} \int_b^2 \frac{dx}{x-1}$$

$$= \lim_{b \rightarrow 1^-} \ln|x-1| \Big|_0^b + \lim_{b \rightarrow 1^+} \ln|x-1| \Big|_b^2$$

$$= \lim_{b \rightarrow 1^-} \ln|b-1| - \underbrace{\ln|-1|}_{\ln 1} + \lim_{b \rightarrow 1^+} \underbrace{\ln|1|}_0 - \ln|b-1|$$

$$= \lim_{b \rightarrow 1^-} \ln|b-1| - \lim_{b \rightarrow 1^+} \ln|b-1|$$

$$\boxed{I = 0} \text{ olur.}$$

$$4) I = \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx = ?$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x \cdot e^{-x} dx \quad \begin{array}{l} x=u, \quad e^{-x}dx = dv \\ dx=du \quad -e^{-x}=v \end{array}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-x \cdot e^{-x} \Big|_0^b + \int_0^b e^{-x} dx \right]$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-b e^{-b} - e^{-x} \Big|_0^b \right]$$

$$I = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-b e^{-b} - \underbrace{e^{-b}}_0 + \underbrace{1}_0 \right]$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} b e^{-b} = \infty \cdot 0 \text{ Belirsizlik'i}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b}{e^b} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Belirsizlik'i}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^b} = 0 \text{ olur. 0 halde ;}$$

$$\boxed{I = 1} \text{ bulunur.}$$