

① $f(x)$ m. dereceden polinom olsun.

1. Eğer $c \neq 0$ ise y_0 m. dereceden polinom olur.

2. Eğer $b \neq 0$ ve $c = 0$ ise y_0 $(m+1)$. dereceden polinom olur.

3. Eğer $b = 0$ ve $c = 0$ ise y_0 $(m+2)$. dereceden polinom olur.

Örnek: $y'' - 2y' - 3y = x + 1$ Dif. Denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$r_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 3 \end{cases}$$

$$y_H = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

$$y_0 = ax + b \quad y_0' = a, \quad y_0'' = 0$$

$$-2a - 3ax - 3b = x + 1$$

$$-3a = 1$$

$$-2a - 3b = 1$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} - 3b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{9}$$

$$y_0 = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$$

Örnek: $y'' - 2y' = x + 1$ Dif. Denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y_H = C_1 + C_2 e^{2x}$
 $y_G = (ax + b)x = ax^2 + bx$ a ve b bulunur.

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + ax^2 + bx$$

② $f(x) = Me^{\alpha x}$ olsun

1. α karakteristik denklemin köklerinden biri değilse;

$$y_G = k e^{\alpha x} \text{ olur.}$$

2. α karakteristik denklemin köklerinden biri ise;

$$y_G = k x e^{\alpha x} \text{ olur.}$$

3. α karakteristik denklemin iki katlı kökü ise ;

$$\boxed{y_0 = kx^2 e^{\alpha x}} \text{ olur.}$$

Örnek: $y'' - y = 3e^{2x}$

$$y' - y = 0 \quad r^2 - 1 = 0 \quad r_1 = -1, r_2 = 1 \quad T = \{e^{-x}, e^x\}$$

$$\boxed{y_H = C_1 e^{-x} + C_2 e^x}$$

$$y_0 = k e^{2x} \quad y_0' = 2k e^{2x}, \quad y_0'' = 4k e^{2x}$$

$$4k e^{2x} - k e^{2x} = 3e^{2x}$$

$$3k = 3 \quad \boxed{k=1}$$

$$\boxed{y_0 = e^{2x}}$$

$$\boxed{y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + e^{2x}}$$

örnek : $y'' - y = 3e^x \quad y_0 = kx e^x$

örnek : $y'' - 2y' + y = 3e^x$

$$y_0 = kx^2 e^x$$

③ $f(x) = M \cos \lambda x + N \sin \lambda x$ olsun.

1- Karakteristik denklemin kökleri: $r_{1,2} = \pm i\lambda$
değilse ;

$$\boxed{y_0 = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x} \text{ olur.}$$

2- Karakteristik denklemin kökleri: $r_{1,2} = \pm i\lambda$
ise ;

$$\boxed{y_0 = x \cdot (a \cos \lambda x + b \sin \lambda x)} \text{ olur.}$$

Örnek: $y'' - 5y' + 6y = 2 \cos x$ Dif. Denkleminin
genel çözümünü bulunuz.

(Ödev)

Örnek: $y'' + 4y = \sin 2x$ Dif. Denkleminin
genel çözümünü bulunuz.

Sonuç: $y_0 = x(a \sin 2x + b \cos 2x)$

$$y_0 = -\frac{1}{4}x \cos 2x$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{4}x \cos 2x$$

④ $f(x) = R(x)e^{\alpha x}$ olsun.

$$y_0 = Z(x) \cdot e^{\alpha x} \text{ olur.}$$

Örnek: $y'' - 5y' + 6y = e^x \cos x$ Dif. Denkleminin

genel çözümünü bulunuz.

(Ödev)

Örnek: $y'' + 3y' + 2y = (x+1)e^x$ Dif. Denkleminin

genel çözümünü bulunuz.

$$y = (ax+b)e^x \quad y' = ae^x + (ax+b)e^x, \quad y'' = 2ae^x + (ax+b)e^x$$

$$2a + ax + b + 3a + 3ax + 3b + 2ax + 2b = x + 1$$

$$\begin{aligned} 6a &= 1 & 5a + 5b &= 1 \\ a &= \frac{1}{6} & 5b &= 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$b = \frac{1}{30}$$

$$y_0 = \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{30}\right)e^x$$

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{30}\right)e^x$$

⑤ $f(x) = M(x)\sin \lambda x + N(x)\cos \lambda x$ olsun.

Burada $M(x)$ ve $N(x)$ polinom olarak verilir. Hangisinin derecesi büyük ise y_0 çözümünde o dikkate alınır.

$$y_0 = (\text{polinom})_1 \sin \lambda x + (\text{polinom})_2 \cos \lambda x$$

olur.

Örnek: $y'' + 2y' - 3y = 2\sin x + x\cos x$ Dif. Denk.

genel çözümünü bulunuz.

Sonuç: $y_0 = (a_1x + b_1)\sin x + (a_2x + b_2)\cos x$

$$y_0 = \left(\frac{1}{10}x - \frac{3}{50}\right)\sin x + \left(\frac{1}{5}x - \frac{9}{50}\right)\cos x$$

⑥ $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ olsun.

$$\boxed{y = y_1 + y_2 + \dots + y_n} \text{ olur.}$$

örnek: $y'' + 4y = e^x + \sin 2x$ Df. Denkleminin

genel çözümünü bulunuz.

$$y = y_1 + y_2$$

$$y_1 = Ke^x \quad 5K = 1 \quad K = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{y_H = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x}$$

$$\boxed{y_1 = \frac{1}{5}e^x}$$

$$y_2 = (A \cos 2x + B \sin 2x)x$$

A ve B bulunur.

$$y_2 = \frac{1}{5}e^x + (A \cos 2x + B \sin 2x)x$$

Ödev:

$$1) y''' + y'' = 12x$$

$$2) y'' - y = \sin x + 2 \cos x$$

$$3) y'' - 3y' + 2y = x^2 \cdot e^{3x}$$

$$4) y'' + y = \sin x + 2 \cos x + e^x + 1$$

SABİTİN DEĞİŞİMİ YÖNTEMİ (Parametrelerin Değişimi Yöntemi)

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

$ay'' + by' + cy = 0$ Homojen Dif. Denklemin genel çözümünü bulunur.

$$K = \{y_1, y_2\} \text{ olsun. (Temel Çözüm Kümesi)}$$

Homojen Dif. Denklemin genel çözümü :

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2} \text{ olur. } C_1 = C_1(x) = ?$$

$$C_2 = C_2(x) = ?$$

$$y' = \underbrace{C_1' y_1 + C_2' y_2}_{=0 \text{ (Kabul ediyor)}} + C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

$$y'' = C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 y_1'' + C_2 y_2''$$

$$a[C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 y_1'' + C_2 y_2''] + b[C_1 y_1' + C_2 y_2'] + c[C_1 y_1 + C_2 y_2] = f(x)$$

olur. Dürünkürse ;

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = \frac{f(x)}{a}$$

olur.

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad C_1' y_1 + C_2' y_2 &= 0 \\ (2) \quad C_1' y_1' + C_2' y_2' &= \frac{f(x)}{a} \end{aligned} \right\} \text{Sistemi elde edilir.}$$

Bu sistem çözülerek C_1' ve C_2' bulunur.

Sonrada integral alınarak ;

$$C_1 = F(x) + K_1 \quad \text{ve} \quad C_2 = G(x) + K_2$$

şeklinde C_1 ve C_2 fonksiyonları bulunur.

Bulunan C_1 ve C_2 Homojen denklemin genel çözümünde yerine yerleştirilerek genel çözüm elde edilmiştir olur.

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$$

$$y = [F(x) + K_1] y_1 + [G(x) + K_2] y_2 \quad \text{Genel Çözüm}$$

Örnekler :

$$1) \quad y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

$$y = y_H + y_P$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

$$r_{1,2} = 3$$

$$C_2' = \frac{1}{x^2}$$

$$C_2 = -\frac{1}{x} + K_2$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

$$C_1' e^{3x} + C_2' x e^{3x} = 0$$

$$3C_1' e^{3x} + C_2' (1 + 3x) e^{3x} = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

$$C_1' + C_2' x = 0$$

$$3C_1' + C_2' (1 + 3x) = \frac{1}{x^2}$$

$$C_1' = -\frac{1}{x} \Rightarrow C_1 = -\ln x + K_1$$

$$y = (-\ln x + K_1) e^{3x} + \left(-\frac{1}{x} + K_2\right) x e^{3x}$$

2) $y'' + y = \sec^3 x$ Çözünür.

$r^2 + 1 = 0 \quad r = \pm i$

$y'' + y = 0$

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0$

$-C_1' \sin x + C_2' \cos x = \sec^3 x$

$-C_1' = + \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

$C_2' = \frac{\cos x}{\cos^3 x} = \sec^2 x$

$C_1 = -\frac{1}{2 \cos^2 x} + k_1 = -\frac{1}{2} \sec^2 x + k_1$

$C_2 = \tan x + k_2$

$y = (-\frac{1}{2} \sec^2 x + k_1) \cos x + (\tan x + k_2) \sin x$

3) $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$ Çözünür.

$y'' + 3y' + 2y = 0 \quad r^2 + 3r + 2 = 0 \quad r_1 = -2 \quad r_2 = -1$

$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$

$C_1' e^{-2x} + C_2' e^{-x} = 0$

$-2C_1' e^{-2x} - C_2' e^{-x} = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$

$C_2' e^{-x} = \frac{x-1}{x^2} e^{-x} \quad C_2 = \int \left(\frac{1}{x}\right) e^{-x} dx + \int \left(\frac{1}{x^2}\right) e^{-x} dx$

$y = (-\frac{1}{x} e^{-x} + k_1) e^{-2x} + (\ln x + \frac{1}{x} + k_2) e^{-x}$

$\frac{1}{x} = u \quad e^x dx = du$

4) $y'' + y = \tan^4 x$

Çözünür.

(Ödev)

$C_2 = -\left[\frac{1}{x} e^x + \int \frac{1}{x^2} e^x dx\right] + k_1$

$C_2 = -\frac{1}{x} e^x + k_1$

$C_2' e^{-x} = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$

$C_2 = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx$

$C_2 = \ln x + \frac{1}{x} + k_2$