İntegral işareti altında Türev

(Genel) "Leibniz formülü"

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\,dt\right) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}\,dt + \beta'(x).f(x,\beta(x)) - \alpha'(x).f(x,\alpha(x))}$$

Örnek: $f(a) = \int_0^a \frac{\sin ax}{x}\,dx$ ise $f'(a) = ?$

Örnek: $y = \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt$ ise $\frac{dy}{dx} = ?$

Örnek:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\int_{\pi}^{x} \frac{dt}{2+\cos t}}{x-\pi} = ?$$

Örnek:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{\int_0^{2x} e^{t^2}\,dt} = ?$$

Örnek: $F(a)=\int_0^{\infty}\frac{\arctan(ax)}{x(1+x^2)}dx=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $F'(a)=\int_0^{\infty}\frac{\frac{\cancel{x}}{1+a^2x^2}}{\cancel{x}(1+x^2)}dx$

$$F'(a)=\frac{1}{1-a^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{a^2}{1+a^2x^2}\right)dx$$

$$F'(a)=\frac{1}{1-a^2}\lim_{b\to\infty}\left[\arctan x-a.\arctan ax\right]_0^b$$

$$F'(a)=\frac{1}{1-a^2}\lim_{b\to\infty}\left[\arctan b-a\arctan(ab)-0\right]$$

$$F'(a)=\frac{1}{1-a^2}\left[\frac{\pi}{2}-a\frac{\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+a}$$ olur.

Buradan; $F'(a)=\frac{\pi}{2(1+a)}\Rightarrow F(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$

bulunur.

Örnek: $\frac{d}{dt}\left(\int_1^4 \left(\sqrt{x^2+1}+t^2+1\right)dx\right)=?$ 6t

Örnek: $F(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$ ile $\frac{F''(x)}{F'(x)}=?$

Örnek: $f(x)=4-3x^2$, $[-1,2]$ için Ortalama değerini bulunuz. $c\in(-1,2)=?$

Çözüm: $f(c)=\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}(4-3x^2)\,dx$

$\boxed{f(c)=1}$

$4-3c^2=1 \Rightarrow \boxed{c=1}\in(-1,2)$ olur.

fonksiyonun ortalama değeri:

$\boxed{f_{ort}=1}$ dır.

EK-1

Örnek: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = ?$ $\quad \arctan x = t$

$x = \tan t$

$\dfrac{dx}{1+x^2} = dt$

$$= \int_0^{\pi/4} t\cos t\,dt$$

Örnek: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = 0$ dır. Çünkü $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ fonksiyonu $[-\pi, \pi]$ aralığında tek fonksiyondur. ($f(-x) = -f(x)$ olur)

Örnek: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$ olduğunu gösteriniz

$x = \frac{\pi}{2} - t$ dersek, $dx = -dt$ olur

$$\int_{\pi/2}^{0} f(\sin(\tfrac{\pi}{2} - t))\cdot(-dt) = \int_0^{\pi/2} f(\cos t)\,dt \text{ olur}$$

Örnek: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + \int_0^x \cos t\,dt}{\int_0^x t\,dt - x\cos x} = ?$ $\quad (-2)$

CamScanner ile tarandı

EK-2

Örnek: $I=\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx=\frac{a}{2}$

olduğunu gösteriniz

$a-x=t \quad -dx=dt$

$I=\int_0^a \frac{f(a-t)}{f(a-t)+f(t)}\,dt$ t yerine x yazalım.

$I=\int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x)+f(x)}\,dx$ olur.

$I+I=\int_0^a \frac{f(a-x)+f(x)}{f(a-x)+f(x)}\,dx=\int_0^a dx=a$

$2I=a \Rightarrow \boxed{I=\frac{a}{2}}$ olur.

Örnek: $f(x)=\int_{x^2}^{x^3} \sin t\,dt \quad f'(x)=?$

$f'(x)=3x^2\sin x^3-2x\sin x^2$

$I=\int \sin x \cdot \ln(\tan x)\,dx = ?$

$\ln(\tan x)=u \quad \sin x\,dx=dv$

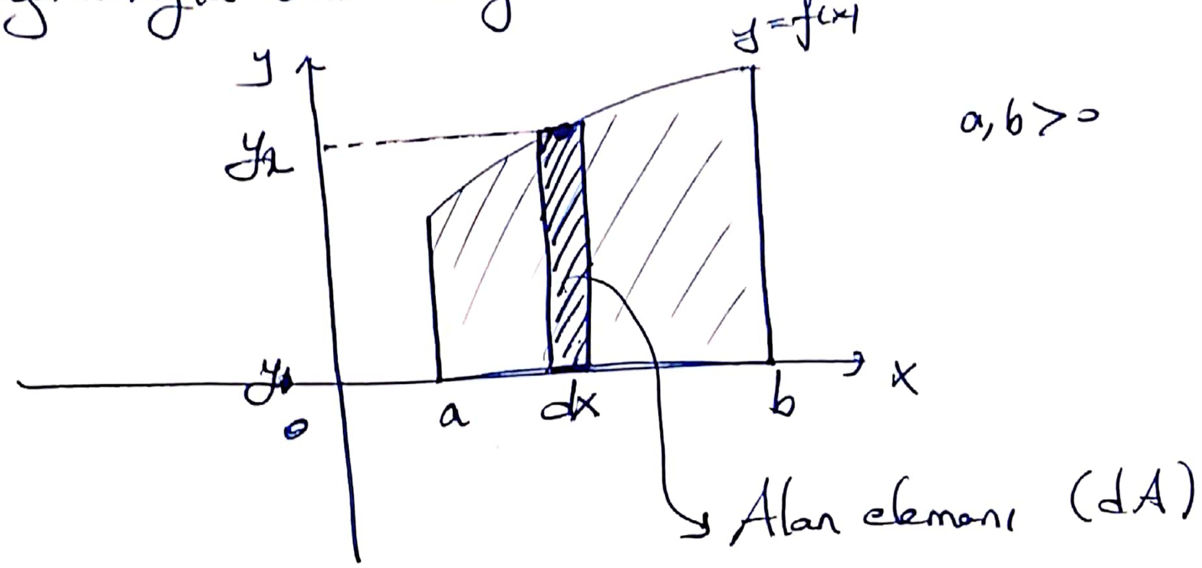
$\frac{\sec^2 x}{\tan x}dx=du \quad -\cos x=v$

$I=-\cos x\cdot\ln(\tan x)+\int \csc x\,dx$

$I=-\cos x\cdot\ln(\tan x)+\ln(\csc x-\cot x)+c$

Alan Hesabı

1) $y=f(x)$ eğrisi, $x=a$, $x=b$, $y=0$ doğrularıyla sınırlı bölgenin alanı:



$a, b > 0$

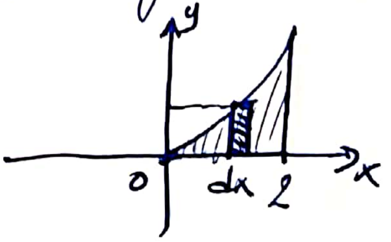
Alan elemanının alanı: $dA=(y_2-y_1)dx$ dır.

$$A=\int (y_2-y_1)dx=\int (f(x)-0)\,dx$$

$$\boxed{A=\int_a^b f(x)\,dx}$$ olur.

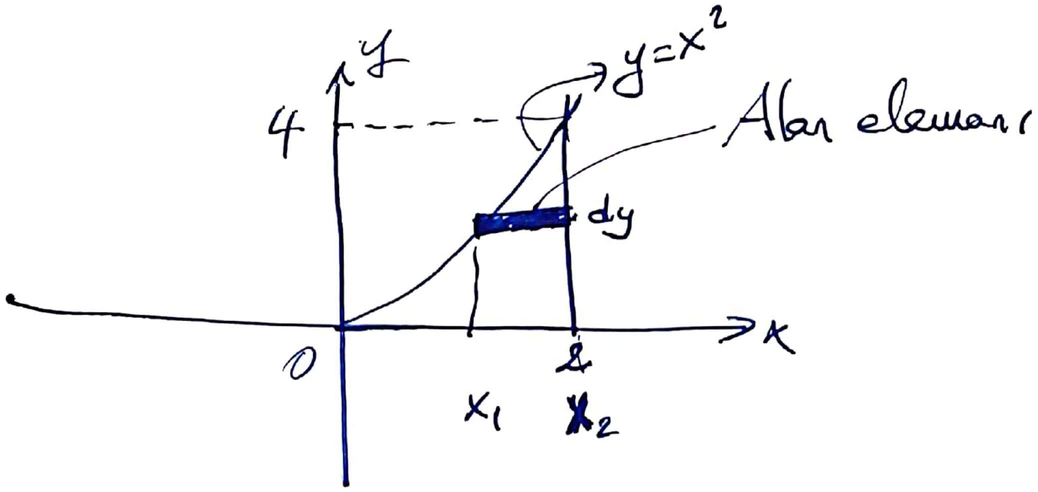
Örnek: $y=x^2$ parabolü, $x=2$, $y=0$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm:



$$A=\int_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}\ br^2$$

Çözüm:



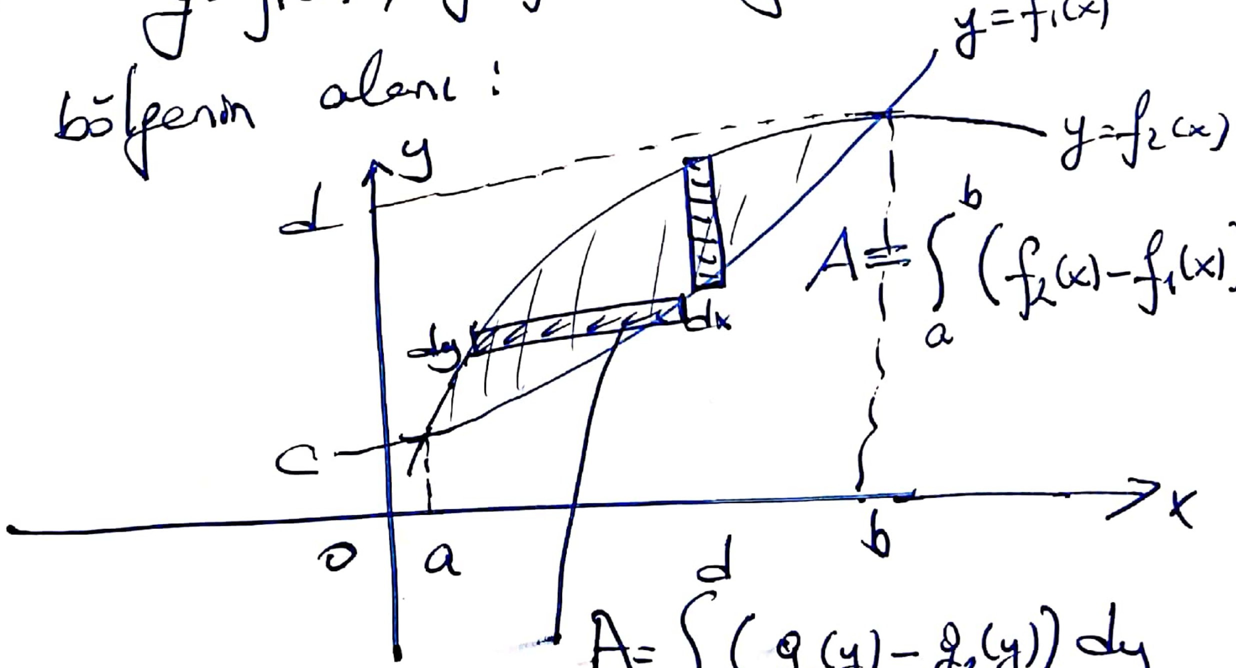
$$dA = (x_2 - x_1)\,dy$$

$$A = \int (x_2 - x_1)\,dy = \int_0^4 (2 - \sqrt{y})\,dy$$

$$= 2y - \frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_0^4 = 8 - \frac{2^4}{3} = \frac{8}{3} \text{ br}^2$$

---

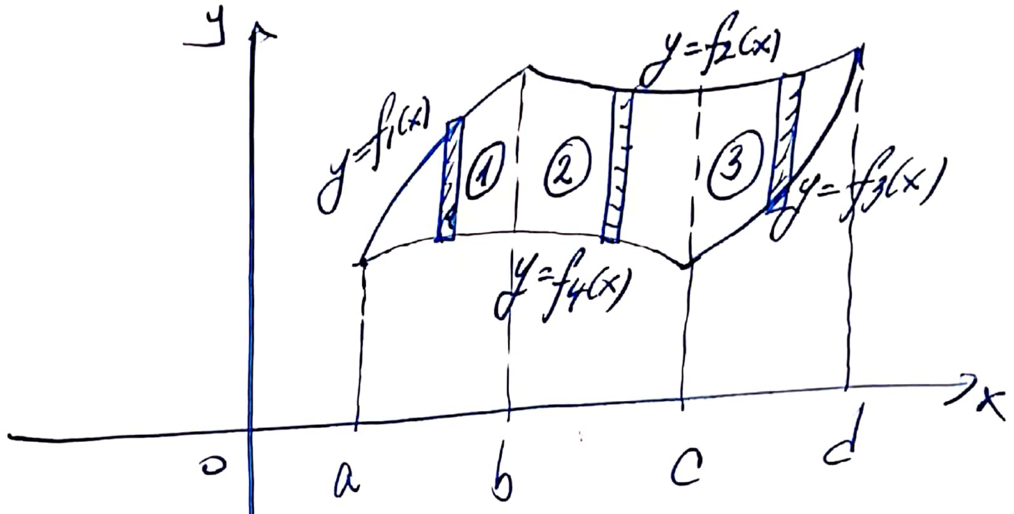
2) $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanı:



$$A = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx$$

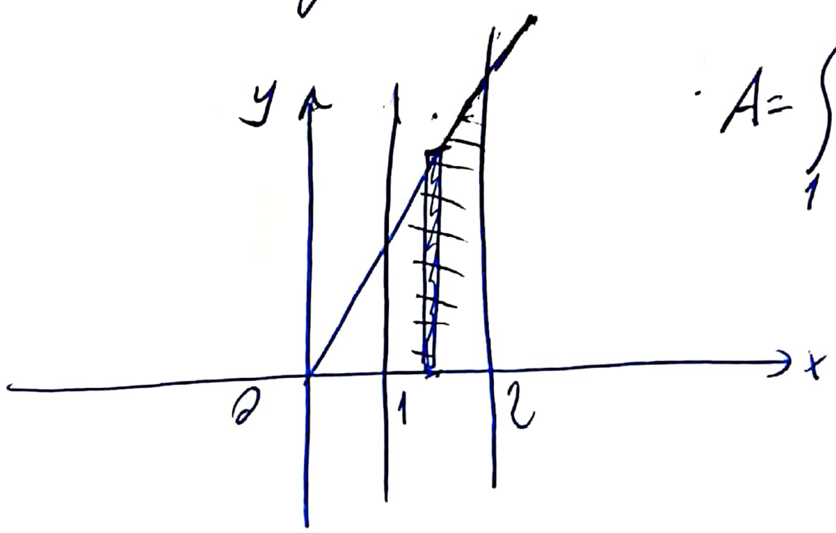
$$A = \int_c^d (g_1(y) - g_2(y))\,dy$$

$x=g_1(y)$, $x=g_2(y)$



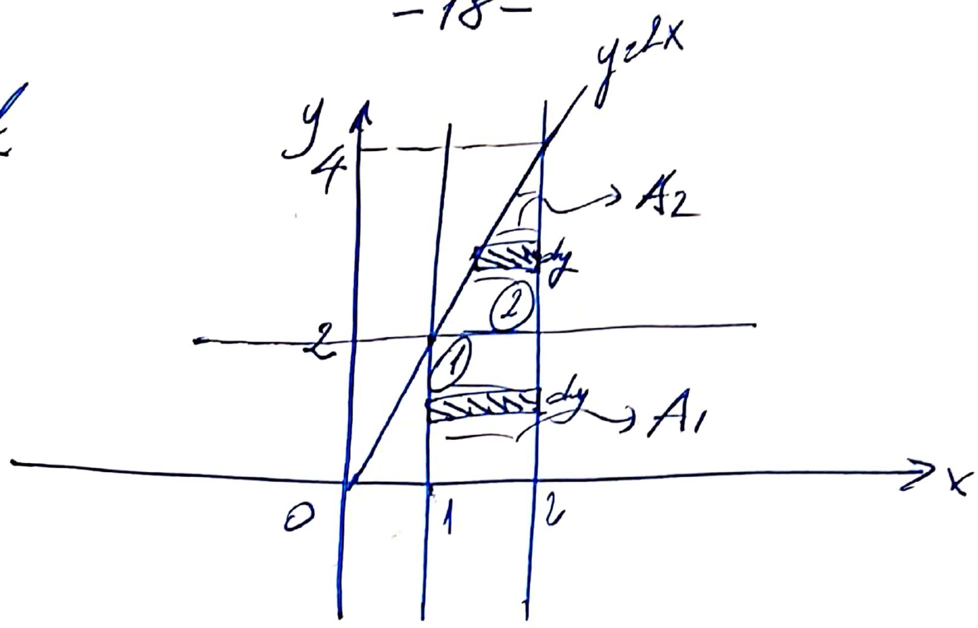
$$A=\underbrace{\int_a^b (f_1(x)-f_4(x))dx}_{1}+\underbrace{\int_b^c (f_2(x)-f_4(x))dx}_{2}+\underbrace{\int_c^d (f_2(x)-f_3(x))dx}_{3}$$

Örnek: $y=2x$, $x=1$, $x=2$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.



$$A=\int_1^2 (2x)dx = x^2\Big|_1^2 = 3$$

2. Yol



$$A = A_1 + A_2$$

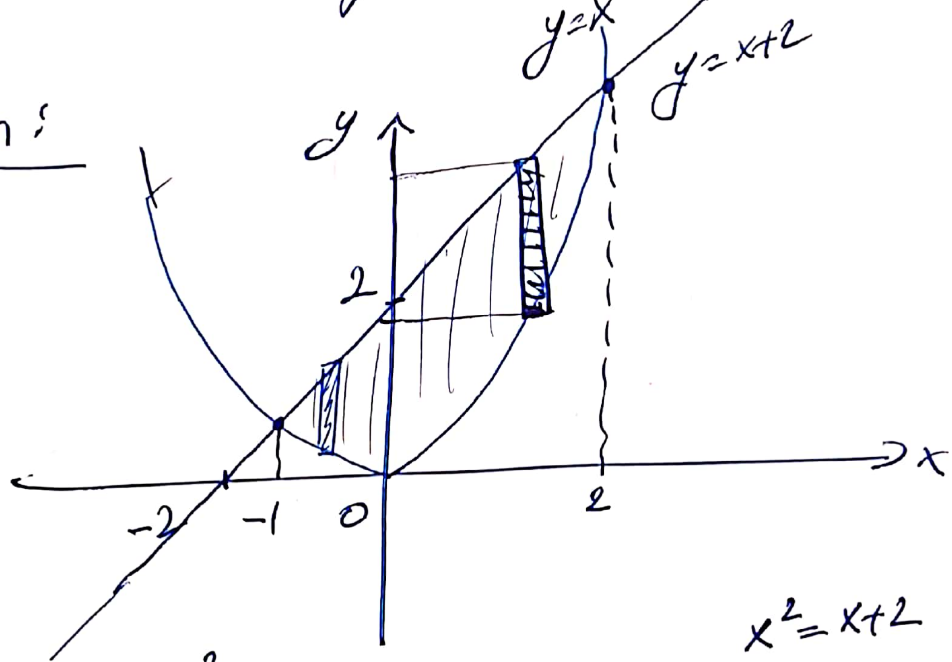
$$A_1 = \int_0^2 (2-1)\,dy = \int_0^2 dy = y\Big|_0^2 = \boxed{2}$$

$$A_2 = \int_2^4 \left(2 - \frac{y}{2}\right)dy = 2y - \frac{y^2}{4}\Big|_2^4 = 8 - 4 - (4-1)$$

$$\boxed{A_2 = 1} \qquad A = A_1 + A_2 = 2 + 1 = \boxed{3}$$

Örnek: $y=x^2$ parabolü ile $y=x+2$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm:



$x^2=x+2$

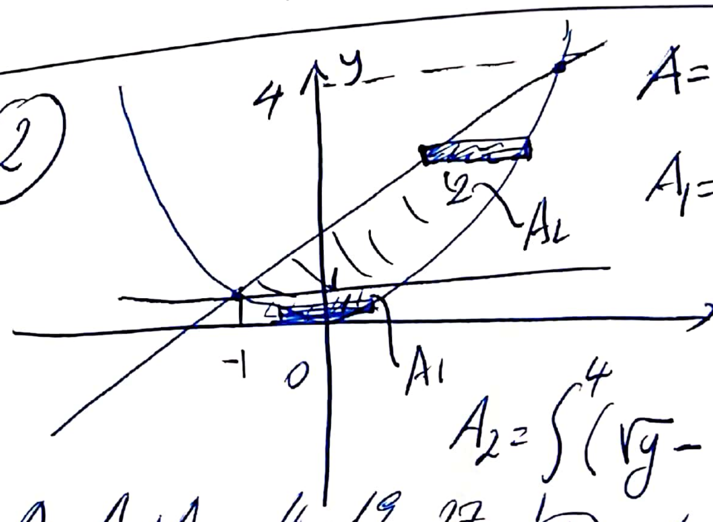
$x^2-x-2=0$

$-1 \quad 2$

(1) $A=\int_{-1}^{2}\left(x^2-(x+2)\right)dx$

$=\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx=\frac{9}{2}$ ✓

(2)



$A=A_1+A_2$

$A_1=\int_0^1\left(\sqrt{y}-(-\sqrt{y})\right)dy=2\int_0^1\sqrt{y}\,dy$

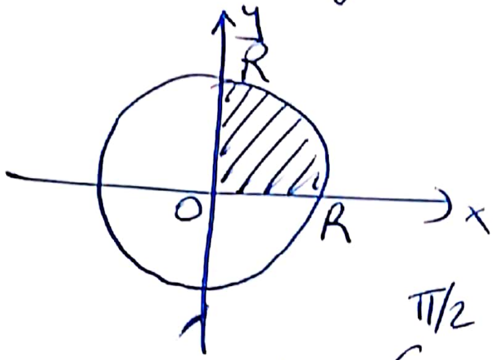
$\boxed{A_1=\frac{4}{3}}$

$A_2=\int_1^4\left(\sqrt{y}-(y-2)\right)dy=\frac{2}{3}\sqrt{y^3}-\frac{y^2}{2}+2y\Big|_1^4$

$\boxed{A_2=\frac{19}{6}}$

$A=A_1+A_2=\frac{4}{3}+\frac{19}{6}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$ ✓

Örnek: $x^2+y^2=R^2$ dairesinin alanını hesaplayınız



$$A=4\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

$x=R\sin t$ dersek.
$dx=R\cos t\,dt$ olur.

$$A=4\int_0^{\pi/2} R.\cos t . R.\cos t\,dt$$

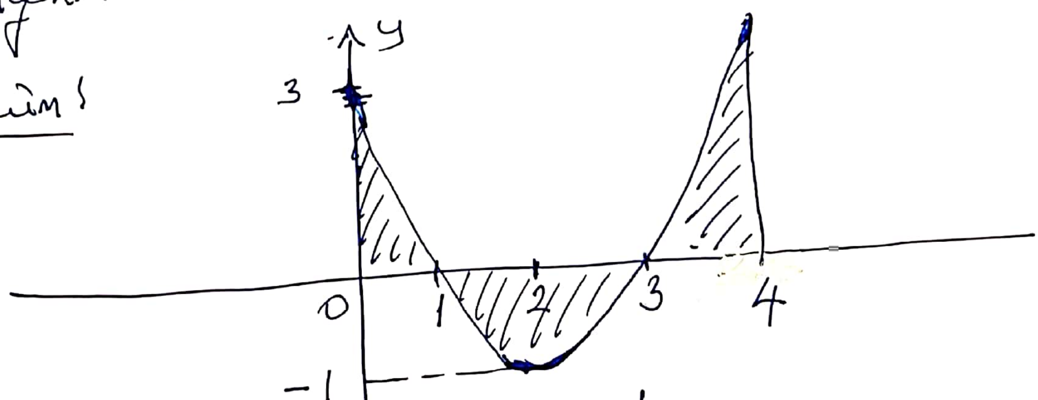
Sınırlar
$x=0$ için $t=0$
$x=R$ için $t=\frac{\pi}{2}$

$$A=4R^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=4R^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$=2R^2\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2}=\cancel{2}R^2\left[\frac{\pi}{\cancel{2}}\right]=\pi R^2$$

Örnek: $y=x^2-4x+3$ eğrisinin $0\leq x\leq 4$ aralığında kalan kısmı ve x ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

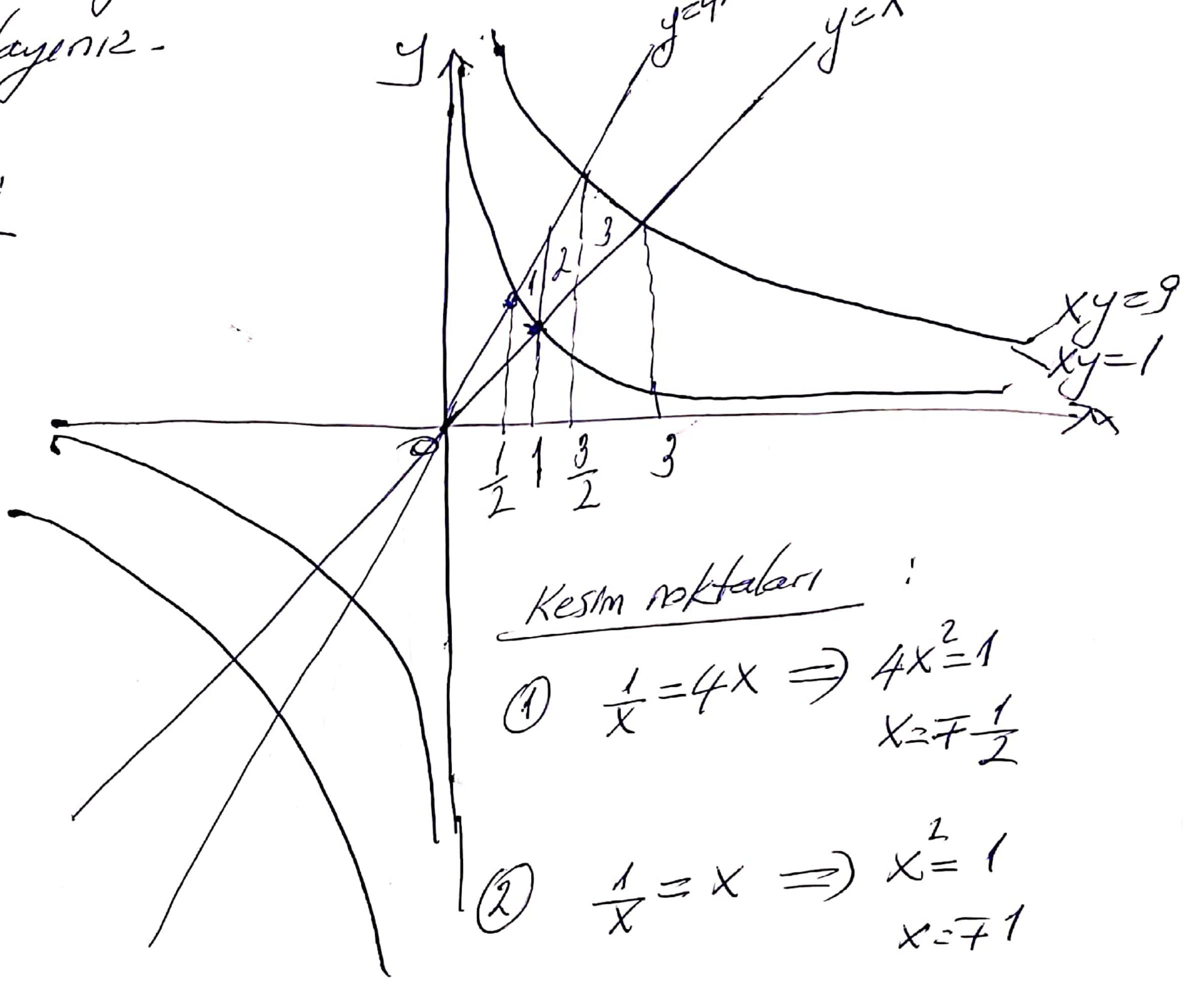


$$A=\int_0^1\left[(x^2-4x+3)-0\right]dx+\int_1^3\left[0-(x^2-4x+3)\right]dx+\int_3^4\left[(x^2-4x+3)-0\right]dx$$

$$\boxed{A=4\ br^2}$$

Örnek: $y=x$, $y=4x$, $xy=1$, ve $xy=9$ eğrilerinin birinci bölgede sınırladıkları R bölgesinin alanını hesaplayınız.

Çözüm:



Kesim noktaları:

① $\frac{1}{x}=4x \Rightarrow 4x^2=1$
$x=\mp\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{x}=x \Rightarrow x^2=1$
$x=\mp 1$

③ $\frac{9}{x}=4x \Rightarrow 4x^2=9$
$x=\mp\frac{3}{2}$

④ $\frac{9}{x}=x \Rightarrow x^2=9$
$x=\mp 3$

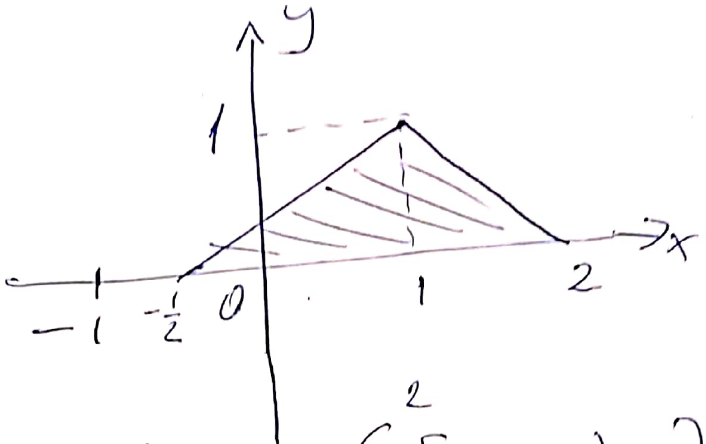
$$A=\int_{1/2}^{1}\left(4x-\frac{1}{x}\right)dx+\int_{1}^{3/2}(4x-x)\,dx+\int_{3/2}^{3}\left(\frac{9}{x}-x\right)dx$$

$$\boxed{A=4\ln 4}$$

Alan Hesabı

Örnek: $y=\frac{1}{3}(2x+1)$ ve $y=-x+2$ doğruları ve x-ekseni (y=0 doğrusu) tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

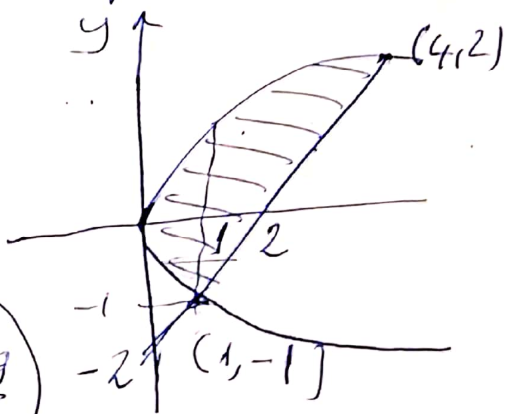
Çözüm:



$$A=\int_{x=-\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{2x+1}{3}-0\right)dx+\int_{1}^{2}\left[(-x+2)-0\right]dx$$

$$\boxed{A=\frac{5}{4}}$$

Örnek: $x=y^2$ ve $y=x-2$ tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

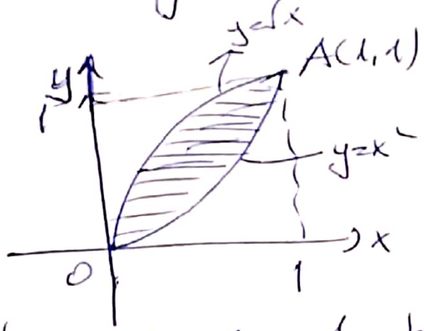


Çözüm: $A=\int_{x=0}^{1}\left[\sqrt{x}-(-\sqrt{x})\right]dx$

$$+\int_{x=1}^{4}\left[\sqrt{x}-(x-2)\right]dx=\frac{9}{2}$$

Örnek: $y=x^2$ ve $x=y^2$ tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

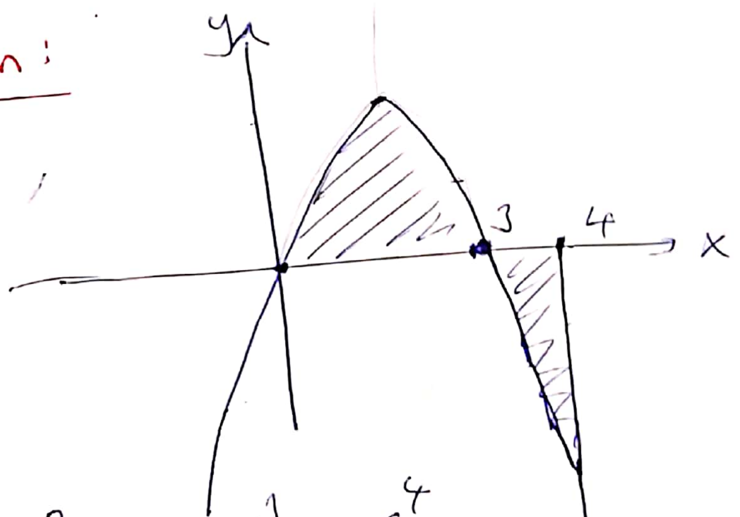
Çözüm:



$$A=\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3} \text{ birim kare.}$$

Örnek: $y=3x-x^2$ eğrisinin $0\leq x\leq 4$ aralığında kalan kısmı ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

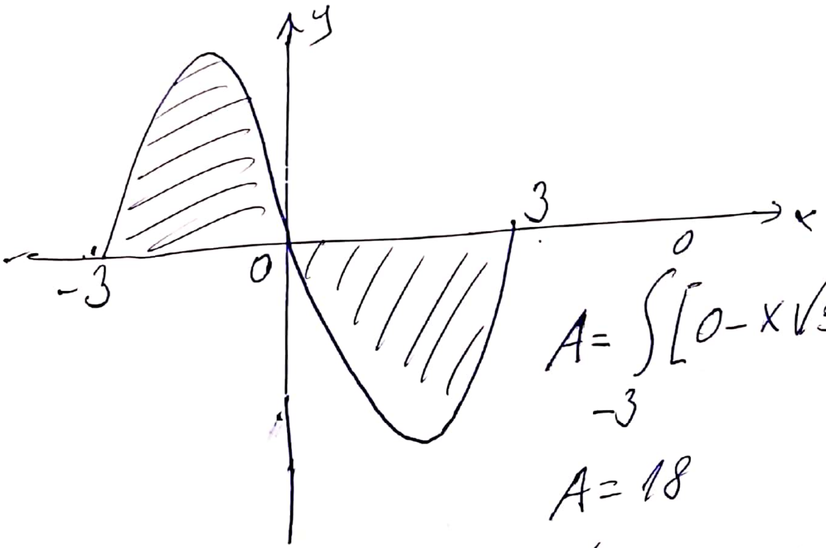


$$A=\int_0^3 \left[(3x-x^2)-0\right]dx-\int_3^4 (0-(3x-x^2))dx=\frac{19}{3}\ br^2$$

Alan örnek soruları

1) $y=3x-x^2$ eğrisinin $0\leq x\leq 4$ aralığında kalan kısmı ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız. $\left(\frac{19}{3}\ br^2\right)$

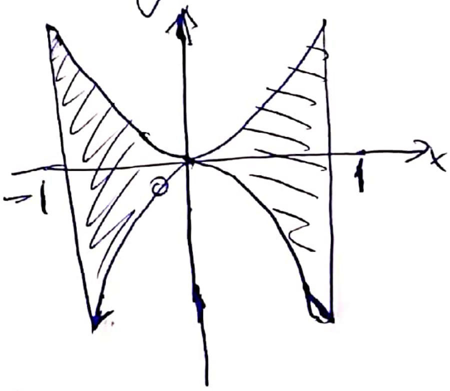
2) x ekseni ve $y=x.\sqrt{9-x^2}$ eğrisinin $-3\leq x\leq 3$ aralığında kalan kısmı tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız. $(18\ br^2)$



$$A=\int_{-3}^{0}\left[0-x\sqrt{9-x^2}\right]dx+\int_{0}^{3}\left[x\sqrt{9-x^2}-0\right]dx$$

$$A=18$$

3) $x=-1$, $x=1$ doğruları ve $y=x^2$; $y=-x^4$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



$$A=\int_{-1}^{0}\left[x^2-(-x^4)\right]dx+\int_{0}^{1}\left[x^2-(-x^4)\right]dx$$

$$A=2\int_{0}^{1}(x^2+x^4)dx=\frac{16}{15}\ br^2$$

4) Üstten $x^2+y^2=20$ çemberi, alttan $y=x^2$ parabolü tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Sonuç: $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{37}{15}$

---

5) $x^2+y^2=x$ ve $x^2+y^2=y$ çemberleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

---

6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

---

7) Köşeleri $A(2,5)$, $B(1,1)$, $C(3,2)$ noktalarında bulunan üçgenin alanını bulunuz. $\left(\frac{9}{2}\right)$

EK

Alan Soruları

Örnek: $y=x^2$ parabolü ile $y=x+2$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız. $\left(\frac{9}{2}\right)$

$(1/2, \cancel{1}, 3/2, 3)$

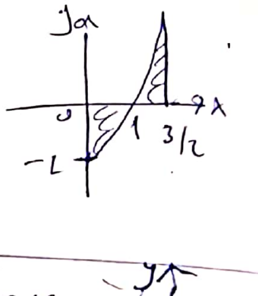
Örnek: $y=x$, $y=4x$, $xy=1$ ve $xy=9$ eğrilerinin birinci bölgede sınırladıkları D bölgesinin alanını hesaplayınız. $(A=4\ln 4)$

Ödev: D Bölgesi $x-y=1$, $x-y=3$, $xy=1$ ve $xy=4$ eğrilerinin birinci bölgede sınırladıkları bölge olduğuna göre Alanını hesaplayınız. $(A=12)$

Örnek: $x^2+y^2=4$ Çemberi $y=1$ doğrusunun üstünde kalan bölgenin alanını ve $y=\sqrt{3}x$ doğrusunun altında hesaplayınız. $\left(A=\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}\right)$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-y^2}-\frac{y}{\sqrt{3}}\right)dy$$

Örnek: $y=x^3+x-2$ eğrisi, $x=0$, $x=\frac{3}{2}$ doğruları, ~~arasında~~ ox ekseninin ~~kalan~~ sınırladığı Bölgenin alanını hesaplayınız.



$$A=-\int_0^1(x^3+x-2)\,dx+\int_1^{3/2}(x^3+x-2)\,dx$$

Örnek: $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$, $x=0$ ve $x=2$ ile sınırlı R bölgesinin alanını hesaplayacak integrali yazınız.

Örnek: $f(x)=\begin{cases}2x^2, & 0<x<3\\ 5x+3, & x\geq 3\end{cases}$; $x=4, y=0$ $\left(A=\int_0^3 2x^2dx+\int_3^4(5x+3)dx\right)$

Yaklaşık İntegral

1- Trapez İntegral kuralı

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = ?$$

$[a,b]$ aralığını n eşit parçaya bölelim.

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$x_0 = a$
$x_1 = a+h$
$x_2 = a+2h$
$\vdots$
$x_n = a+nh = b$

x_i	x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
f_i	f_0	f_1	f_2	$\ldots$	f_n

$$I_T = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\right]$$

2- Simpson İntegral kuralı

$$I_S = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

$n \geq 2$ çift sayı

Örnek 4: $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ integralini,

a) $n=4$ için integrali Trapez ve Simpson yöntemleriyle yaklaşık olarak hesaplayınız

b) $|I_G - I_T| = ?$ $\quad |I_G - I_S| = ?$

Çözüm: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $n=4$, $a=0$, $b=1$

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$

	0	0,25	0,5	0,75	1
x_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
f_i	1	0,941	0,8	0,64	1,5

$$I_T = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\right]$$

$$I_T = \frac{1}{8}\left[1 + 2(0,941) + 2(0,8) + 2(0,64) + 1,5\right] = 0,783$$

$$I_S = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4\right]$$

$$I_S = \frac{1}{12}\left[1 + 4(0,941) + 2(0,8) + 4(0,64) + 1,5\right] = 0,7854$$

$I_G = \frac{\pi}{4} = 0,7854$

$|I_G - I_T| = 0,0024$

$|I_G - I_S| = 0.$