

-13-

$$n=1$$

$$i \neq 12$$

$$a_3 = \frac{2a_1}{3 \cdot 2} = \frac{a_1}{3}$$

$$n=2$$

$$i \neq 12$$

$$a_4 = 0$$

$$n=3$$

$$i \neq 12$$

$$a_5 = 0$$

olur. 0 kelde $n \geq 4$ için bütün ketsa

lar sıfır olacaktır.

0 kelde C_{2m} ;

$$y = a_0(1-3x^2) + a_1\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)$$

bulunur.

ADI NOKTA CIVARINDA SERİ GÖZÜMLERİ

Adi nokta civarında

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Diferansiyel denkleminin

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

şeklinde bir seri gözümünün bulunduğu teoremler verildi. Örneklerle bu gözümün nasıl bulunacağını verelim. Dikkat edilmesi gereken aranan gözüm serisinin sonsuz tane $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ katsayıya bağlı olmasıdır. Bir gözüm serisinde, bu katsayılar birbirleri ile belirli bir kuralla bağlantısız olabilecekleri gibi, bazen kısmen (bir kısmı birbirleri ile, belirli kuralla bağlı) veya bütün katsayılar iki katsayıya bağlı olarak yazılabilir. Eğer bir gözüm serisinin katsayıları belli kurallarla bağlı ise bu kural veya kurallara rekürans bağıntısı denir. Rekürans bağıntısı yardımı ile, bir gözüm serisinin sonsuz tane katsayısını arama problemi bazen iki katsayının bulunması problemine kadar indirilebilir.

Ör $y'' + xy' + y = 0$ diferansiyel denkleminin $x=1$ noktası civarında lineer bağımsız iki gözümünü bulunuz.

$P(x)=1$, $Q(x)=x$, $R(x)=1$ dir. Hepsi polinomdur.

$P(x)$ sabit bir fonksiyon olduğundan her nokta diferansiyel denklemin adi noktasıdır.

$x=1$ 'de denklemin bir adi noktasıdır. Dolayısıyla $x=1$ adi noktası civarında diferansiyel denklemin

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \quad a_0 \neq 0$$

...unda seri çözümünü" aranır. Serinin türevleri

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2}$$

dir. Denkleme yerine yazarsak;

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} + x \left[\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0$$

dur. İkinci serinin önündeki x çarpanı $x = 1 + (x-1)$ şeklinde çözümlene alınırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} + x \left[\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0$$

dur.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n (x-1)^n = 0$$

dir. Üç seride de, $(x-1)$ in en küçük üssüne (burada $n-2$) göre gerekli indis ötelemesi yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (n-1) (x-1)^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} (n-1) (x-1)^{n-2} = 0$$

veya

$$\sum_{n=2}^{\infty} [a_n n(n-1) + a_{n-1} (n-1) + a_{n-2} (n-1)] (x-1)^{n-2} = 0$$

bulunur. Seri sıfıra eşit olduğundan, $(x-1)$ in kuvvetlerini içeren terimlerin katsayıları da sıfır olur. Buradan

$$n=0 \text{ için } a_0 \cdot (0) \cdot (-1) = 0 \Rightarrow a_0 \neq 0 \quad -14-$$

$$n=1 \text{ için } a_1 \cdot (1) \cdot (0) = 0 \Rightarrow a_1 \neq 0$$

dır. Bu nedenle a_0 ve a_1 keyfi iki sabittir.

$$n \geq 2 \text{ için } a_n(n)(n-1) + a_{n-1}(n-1) + a_{n-2}(n-1) = 0$$

veya

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n} - \frac{a_{n-2}}{n}$$

olur. Bu son bağıntı serinin katsayıları arasındaki bağıntıyı verir. Dolayısıyla rekürans bağıntısıdır. $n \geq 2$ için, rekürans bağıntısından a_n 'ler

$$a_2 = -\frac{a_1}{2} - \frac{a_0}{2}$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{3} - \frac{a_1}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{2} \right) - \frac{a_1}{3} = \frac{a_0}{6} - \frac{a_1}{6}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= -\frac{a_3}{4} - \frac{a_2}{4} = -\frac{1}{4} \left(\frac{a_0}{6} - \frac{a_1}{6} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{2} \right) \\ &= \frac{a_0}{12} + \frac{a_1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= -\frac{a_4}{5} - \frac{a_3}{5} = -\frac{1}{5} \left(\frac{a_0}{6} - \frac{a_1}{6} \right) - \frac{1}{5} \left(\frac{a_0}{12} + \frac{a_1}{6} \right) \\ &= -\frac{a_0}{20} \end{aligned}$$

⋮

şeklinde bulunur. Görüldüğü gibi, çözüm serisinin sonsuz tane a_n katsayısı, rekürans bağıntısı yardımıyla a_0 ile a_1 cinsinden yazılabilir. Diferansiyel denklemin

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n, \quad a_0 \neq 0$$

-17-
-15-

ormunda seri çözümünü arandığından, bu seride a_0 ve a_1 cinsinden bulunan katsayılar yerine konur. Daha sonra a_0 'lı terimler bir yerde ve a_1 'li terimler bir yerde toplanırsa

$$y = a_0 \left[1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} - \frac{(x-1)^5}{20} - \dots \right] \\ + a_1 \left[(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{6} - \dots \right]$$

şeklinde aranan çözüm serisi bulunur. Bu seri $|x-1| < \infty$ da yakınsaktır.

~~ör~~ $y'' - (x-2)y' + 2y = 0$ diferansiyel denkleminin $x=2$ noktası civarında çözümünü bulunuz.

$P(x)=1$, $Q(x)=-(x-2)$, $R(x)=2$ her üçü de polinom ve ortak bölenleri yok. $P(x) \neq 0$ olduğundan her x değeri denklemin adi noktasıdır. Dolayısıyla $x=2$ 'de denklemin bir adi noktasıdır. O halde denklemin $x=2$ adi noktası civarında

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$$

formunda seri çözümünü aranır. Türevler alınırsa

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-2)^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-2)^{n-2}$$

dir. y , y' ve y'' 'yi denkleme yerine yazalım:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-2)^{n-2} - (x-2) \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-2)^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-2)^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} (n-2) a_{n-2} (x-2)^{n-2} + 2 a_{n-2} (x-2)^{n-2} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-2} + 2a_{n-2}] (x-2)^{n-2} = 0$$

dur. Bu ifade her x için geçerli olduğundan, $\forall n \geq 2$ için $(x-2)^{n-2}$ nin katsayıları sıfır olur. Buradan

$$n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-2} + 2a_{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow n(n-1)a_n - (n-4)a_{n-2} = 0$$

dur. Bu son ifade düzenlenirse

$$a_n = \frac{(n-4)}{n(n-1)} a_{n-2}$$

rekürans bağıntısı elde edilir. O halde $n \geq 2$ için aranan çözüm serisinin ilk birkaç teriminin katsayıları

$$a_2 = \frac{(2-4)}{2(2-1)} a_0 = -a_0$$

$$a_3 = \frac{3-4}{3(3-1)} a_1 = -\frac{1}{6} a_1$$

$$a_4 = \frac{4-4}{4(4-1)} a_2 = 0$$

$$a_5 = \frac{5-4}{5(5-1)} a_3 = \frac{1}{20} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) a_1 = -\frac{1}{120} a_1$$

$$a_6 = \frac{6-4}{6(6-1)} a_4 = 0$$

⋮

Bu katsayıları

-17-

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n \text{ de yerine yazılırs}$$

$$y = a_0 [1 - (x-2)^2] + a_1 \left[(x-2) - \frac{1}{6} (x-2)^3 - \frac{1}{120} (x-2)^5 - \dots \right]$$

şeklinde bulunur. Buradaki a_0 ve a_1 keyfi iki sabittir.

Örnek: $(x^2+1)y'' - 4xy' + 6y = 0$

denkleminin $x=0$ civarında seri çözümünü buluruz.

Çözüm: $x_0=0$ noktası verilen denklem için bir adı noktadır. Bu durumda çözüm:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{olur. Buradan,}$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

olur. y, y' ve y'' 'yi verilen dif. denkleme

yerine yerince,

$$(x^2+1) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 4x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

olur.

-11-

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 4na_n x^n$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 4na_n x^n$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n x^n = 0$$

Öör. Buradaki tüm serileri aynı toplan altında yazmak için ikinci seride $n=0, 1$ 'e karşılık gelen, üçüncü seride $n=1$ 'e karşılık gelen ve dördüncü seride $n=0, 1$ 'e karşılık gelen terimleri dışarı alırsak

$$2a_2 + 6a_3x - 4a_1x + 6a_0 + 6a_1x +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} - 4na_n + 6a_n] x^n$$

-12-

$$2a_2 + 6a_0 + (6a_3 + 2a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{n(n-1)a_n}{n(n-1)} + \right.$$

$$\left. + (n+2)(n+1)a_{n+2} - \underline{4na_n} + \underline{6a_n} \right] x^n = 0$$

dur. Bu ifadenin sıfır ~~olması~~ için ;
olabilmesi

$$2a_2 + 6a_0 = 0$$

$$6a_3 + 2a_1 = 0$$

$$\underbrace{[n(n-1) - 4n + 6]}_{\sim} a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0$$

$n \geq 1, 2, \dots$

$$[(n-2)(n-3)]a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0$$

$n \geq 2, 3, \dots$

olmalıdır. Buradan,

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = -3a_3 \\ a_2 = -3a_0 \end{array} \right\} \quad a_{n+2} = \frac{(n-2)(n-3)a_n}{(n+2)(n+1)}, \quad n \geq 2$$

Katsayılar bağlantısı, bulunur. Buradan,