

## Tam integralin zarfı

### Aykırı Çözüm (Tekil Çözüm)

Örnek:  $Pz + x(2y+1)P + (y^2+y)z - (2y+1)z = 0$   
KDD'nin bir tam integralini ve varsa tekil çözümünü  
bulunuz. (Tam integralin zarfını bulunuz)

Çözüm:  $F = Pz + x(2y+1)P + (y^2+y)z - (2y+1)z = 0$

$$\frac{dx}{z + x(2y+1)} = \frac{dy}{P + y^2 + y} = \frac{dz}{Pz + xP(2y+1) + Pz + z(y^2+y)} = \frac{-dP}{\underbrace{P(2y+1) + P(2y+1)}_0} =$$
$$= \frac{dP}{2xP + (2y+1)z - 2z + z(-2y-1)}$$

$$dP = 0 \Rightarrow \boxed{P = a} \text{ ara integral}$$

$$z = \frac{(2y+1)(z-ax)}{a+y(y+1)} \text{ okur.}$$

$$dz = Pdx + zdy \Rightarrow dz = a dx + \frac{(2y+1)(z-ax)}{a+y(y+1)} dy$$

$$\int \frac{dz - a dx}{z - ax} = \int \frac{2y+1}{a+y^2+y} dy$$

$$\ln(z-ax) = \ln(a+y^2+y) + \ln b$$

$$\boxed{z = ax + b(a+y^2+y)} \text{ Tam Integral}$$

-2-

Şimdi bu yüzey ailesinin zarfını bulalım.

(Şimdi bu yüzey ailesinin Aykırı Çözümünü bulalım)  
"Tekil Çözümünü"

Bunun için her iki tarafın (Tam İntegralin) a ve b parametrelerine göre türevini alırsak,

$$\left. \begin{array}{l} x + b = 0 \\ a + y^2 + y = 0 \end{array} \right\} \text{dur.} \quad b = -x \quad a = -(y^2 + y) \text{ olur. Bunları}$$

Tam integralde yerine yazarsak,

$$Z = ax + b(x + y^2 + y)$$

$$Z = \cancel{ax} - (y^2 + y)(-y^2 - y + y^2 + y) - (y^2 + y)x$$

$$\boxed{Z = -x(y^2 + y)} \quad \text{Aykırı Çözüm (Tekil Çözüm) bulunur.}$$

### Clairaut Denklemi:

$Z = xP + yQ + f(P, Q)$  formundaki denkleme Clairaut denklemi denir.

$$F = xP + yQ + f(P, Q) - Z$$

$$\frac{-dP}{P-P} = \frac{-dQ}{Q-Q} \Rightarrow P=a, Q=b \text{ ara integralleri elde edilir.}$$

Bu denkleme yerne yazılarak,

$$Z = ax + by + f(a, b) \text{ şeklinde Clairaut denkleminin}$$

tem integrali elde edilir.

Not: Clairaut denkleminin tem integrali üç boyutlu uzayda düzlemlerdir. Bu iki parametrelili düzlem arkasının tepe noktası bir zarf yüzeyi genellikle bulunur. Bu zarf yüzeyi Clairaut denklemini sağlayan Tekil (Aykırı) çözümlerdir.

Örnek:  $Z = xP + yQ + P^2 - Q^2$  KOD'un tem integralini  
varsa aykırı (tekel) çözümlerini bulunuz.

-4-

Çözüm:  $Z = x\rho + yq + \rho^2 - q^2$  Clairaut denklemdir.

$$\rho = a, \quad q = b$$

$$\boxed{Z = ax + by + a^2 - b^2} \quad \text{Tam integral}$$

$$F = ax + by + a^2 - b^2 - t$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= x + 2a = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b} &= y - 2b = 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} a &= -\frac{x}{2} \\ b &= \frac{y}{2} \quad \text{olar.} \end{aligned}$$

$$Z = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}.$$

$$\boxed{4Z = y^2 - x^2} \quad \text{Tekil (Aykırı) çözüm.}$$

("Hiperbolik Paraboloid Zarf yüzeyi elde edilir")

-5-

Örnek:  $(p+q)(z-xp-yq)=1$  KOD'nm tam çözümünü,  
varsa tekil (aykırı) çözümünü bulunuz.

Çözüm:  $z = xp + yq + \frac{1}{p+q}$  Clairaut Denklemi

$p=q$ ,  $q=0$  ara integraller.

$$\boxed{z = ax + by + \frac{1}{a+b}} \quad \text{Tam integral}$$

$$z_a = x - \frac{1}{(a+b)^2} = 0$$

$$z_b = y - \frac{1}{(a+b)^2} = 0$$

} olur. Buradan a ve b parametre  
eri yok edilişse  $x=y=0$  olur.  $x=y$  tam integralde  
yerine yazılırsa,

$$z = ax + by + \frac{1}{a+b}$$

$$z = (a+b)x + \frac{1}{a+b} \quad \text{olur.}$$

Eğer  $x > 0$ ,  $y > 0$  kabul edersek,

$$x=y = \frac{1}{(a+b)^2} \quad \text{eşitliği tam integralde kullanılırsa,}$$

Bu durumda  $(a+b)^2 = \frac{1}{x} \Rightarrow a+b = \frac{1}{\sqrt{x}} ; a+b = \frac{1}{\sqrt{y}}$   
olur. Bunu yerine yazarsak,

$$Z = (a+b)x + \frac{1}{a+b}$$

$$Z = \frac{x}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$$

$$\text{Çöz. } \boxed{Z = 2\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$\boxed{Z = \frac{x}{y} + y} \quad (2)$$

$$\boxed{Z = \frac{y}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}} \quad (3)$$

bulunur. (1), (2) ve (3) Clairaut denkleminin  
tekil çözümleridir.